بسم الله الرحمن الرحيم

وزارت علوم ، تحقیقات و فناوری

دانشگاه علوم پایه دامغان

دانشکدهٔ علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی

پایداری معادلات تابعی درجه سوم در فضاهای نرم دار

توسط :

زکیه مروی

استاد راهنما :

دکتر سید علیرضا کامل میرمصطفایی

تابستان ۱۳۸۷

به نام خدا

پایداری معادلات تابعی درجه سوم در فضاهای نرم دار

به وسیله ی:

زکیه مروی

پایان نامه ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی

از فعالیت های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ی:

ریاضی (گرایش محض)

از دانشگاه علوم پایه دامغان

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: عالی ۱۸/۷۸

دکتر سید علیرضا کامل میرمصطفایی، استادیار دانشگاه فردوسی مشهد (استاد راهنما)

دکتر غلامرضا عباسپور، استادیار دانشکده ریاضی دانشگاه علوم پایه دامغان (استاد داور)

دکتر مرتضی ابطحی، استادیار دانشکده ریاضی دانشگاه علوم پایه دامغان (استاد داور)

دکتر ...جلو، استادیار دانشکده شیمی دانشگاه علوم پایه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ماه ۱۳۸۷

تقدیم به مادر بزرگوارم

که با پشتیبانی ها و حمایت هایش،

در کوران سخت زندگی همواره یار و یاور من بوده است.

سپاسگزاری

اول، خدای بزرگ و مهربان را سـپاس که در سایهٔ الطاف او توانستم این پایان نامه را به انجام برسانم.

سپس از استاد گرانقدرم جناب آقای" *دکتر سید علیرضا کامل میرمصطفایی*" که افتخار بهره مندی از راهنمایی های ایشان را داشتم سپاسگزارم و از زحمات خالصانهٔ ایشان کمال تشکر را دارم.

همچنین از تمامی اساتید گروه ریاضی دانشگاه علوم پایه دامغان صمیمانه قدردانی می کنم.

در خاتمه از زحمات جناب آقای *حسـین اشرفی* سپاسگزارم و نیز از همکاری بی دریغ سرکار خانم *لیلا کشفی* که تایپ این پایان نامه را به عهده داشتند، کمال تشکر را دارم.

چکیده

در این پایان‌نامه نتایج به دست آمده در مورد پایداری هایرز ـ اولام ـ راسیاس تعمیم یافته را برای معادلهٔ تابعی درجه سوم

$$f(x+y+۲z)+f(x+y-۲z)+f(۲x)+f(۲y)$$
$$=۲[f(x+y)+۲f(x+z)+۲f(x-z)+۲f(y+z)+۲f(y-z)] \qquad (۱)$$

با استفاده از روش نقطهٔ ثابت تناوبی بیان می‌کنیم. در حالت $n \geq ۲$ در مورد پایداری معادلهٔ تابعی تعمیم یافته‌ای از معادلهٔ تابعی درجه سوم (۱) در فضاهای باناخ به روش نقطهٔ ثابت تناوبی بحث خواهیم کرد. همچنین به بررسی پایداری در مدول‌های باناخ روی جبرهای باناخ و C^*–جبرها می‌پردازیم.

به‌علاوه به بررسی پایداری نوعی از معادلات تابعی درجه سوم متعامد در مفهوم راتز می پردازیم و در پایان جواب عمومی و پایداری هایرز ـ اولام ـ راسیاس را برای معادلهٔ تابعی

$$f(۲x+y)+f(۲x-y)=۲f(x+y)+۲f(x-y)+۱۲f(x)$$

به روش هایرز، بررسی خواهیم کرد.

کلمات کلیدی. پایداری، معادلهٔ تابعی درجهٔ سوم، روش نقطهٔ ثابت تناوبی، تابع درجه سوم متعامد.

فهرست

۰

مقدمه

در سال ۱۹۴۰ اس. ام. اولام[1] [۳۲] سئوالی در مورد پایداری همومورفیسم‌ها به صورت زیر مطرح کرد؛

فرض کنیم G_1 یک گروه و G_2 یک گروه متریک با متر $d(.,.)$ باشد. برای $\varepsilon > 0$ داده شده آیا $\delta > 0$ موجود است به طوری که اگر به ازای هر $x, y \in G_1$ نگاشت $h : G_1 \longrightarrow G_2$ در رابطهٔ

$$d(h(xy), h(x)h(y)) < \delta$$

صدق کند، آنگاه برای هر $x \in G_1$ همومورفیسمی مانند $H : G_1 \longrightarrow G_2$ با شرط $d(h(x), H(x)) < \varepsilon$ موجود باشد؟

در سال بعد هایرز[2] [۱۵] در حالت خاص در فضاهای باناخ مسأله را حل کرد. هایرز نشان داد که اگر X و Y فضاهایْ باناخ با نرم‌های $||.||$ و $||.||$ باشند و تابع $f : X \longrightarrow Y$ در نامساوی‌های زیر برای هر $\varepsilon \geq 0$ و هر $x, y \in X$ صدق کند،

$$||f(x+y) - f(x) - f(y)|| \leq \varepsilon$$

---

[1] S. M. Ulam

[2] D. H. Hyers

آنگاه حد

$$a(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(۲^n x)}{۲^n}$$

برای هر $x \in X$ موجود است که $a : X \longrightarrow Y$ تابع جمعی یکتایی است به طوری که برای هر $x \in X$ نامساوی زیر برقرار است.

$$\|f(x) - a(x)\| \leq \varepsilon$$

به‌علاوه اگر $f(tx)$ نسبت به t وقتی که $x \in X$ ثابت فرض شود، پیوسته باشد، آنگاه a خطی است.

مسألهٔ هایرز در حالات مختلفی تعمیم داده شده است. به‌ویژه راسیاس[۳] [۱۲] و گاجدا[۴] [۲۰] مسألهٔ هایرز را به صورت های مختلفی تعمیم دادند.

پس از آن گاوروتا[۵] [۱۳] نتیجه راسیاس را تعمیم داد.

با توجه به اینکه مسألهٔ پایداری معادلات تابعی کاربردهای فراوانی در ریاضیات کاربردی و آنالیز ریاضی دارد، این مسأله به طور گسترده توسط تعداد زیادی از محققان بررسی شده است. به عنوان مثال [۲]، [۴]، [۷]، [۱۳]، [۱۶]، [۱۷]، [۱۹]،[۲۳]، [۲۶]، [۲۷]، [۳۱] را ببینید.

با توجه به تأثیرات زیاد راسیاس و هایرز در مورد بررسی مسائل پایداری معادلات تابعی، نوعی از پایداری معادلات تابعی را که به وسیلهٔ راسیاس در سال ۱۹۷۸ در [۲۵] معرفی و اثبات شد، پایداری هایرز ـ اولام ـ راسیاس می‌نامند.

در این پایان‌نامه نتایج به دست آمده در مورد پایداری هایرز ـ اولام ـ راسیاس را برای معادلات تابعی درجه سوم بررسی می‌کنیم.

ابتدا چند نوع معادلهٔ تابعی درجه سوم را معرفی کرده، سپس به بررسی پایداری هایرز ـ اولام ـ راسیاس برای آنها می‌پردازیم.

تابع درجه سوم $f(x) = cx^۳$ در معادلهٔ تابعی زیر صدق می‌کند.

$$f(۲x+y) + f(۲x-y) = ۲f(x+y) + ۲f(x-y) + ۱۲f(x)$$

---

[۳] Th. M. Rassias
[۴] Z. Gajda
[۵] Gavruta

معادلهٔ تابعی ذکر شده را معادلهٔ تابعی درجه سوم می‌نامیم و هر جواب معادلهٔ بالا را یک تابع درجهٔ سوم می‌نامیم.

این پایان‌نامه شامل ۵ فصل می‌باشد.

فصل اول شامل تعاریف و نتایج مقدماتی مورد نیاز در سراسر این پایان‌نامه است.

در فصل دوم با معرفی دو نوع معادلهٔ تابعی درجه سوم (نوع اول و نوع دوم) به بررسی پایداری معادلات تابعی درجه سوم با استفاده از قضیهٔ نقطهٔ ثابت تناوبی پرداخته‌ایم.

در فصل سوم معادلهٔ تابعی درجه سوم نوع اول را به حالت n–بعدی تعمیم داده و سپس پایداری آن را در فضاهای باناخ بررسی کرده‌ایم همچنین به بررسی پایداری در مدول‌های باناخ روی جبرهای باناخ و C^*–جبر پرداخته‌ایم.

فصل چهارم به بررسی پایداری معادلهٔ تابعی درجه سوم متعامد در مفهوم راتز[۶] اختصاص دارد.

در نهایت فصل پنجم شامل حل عمومی و بررسی پایداری معادلهٔ تابعی نوع دوم به روش هایرز می‌باشد. لازم به ذکر است مطالب فصلهای ۲ و ۳ و ۴ و ۵ به ترتیب از مقاله های [۲۰] و [۵] و [۸] و [۱۸] برداشت شده است.

---

[۶] J. Rätz

۱

پیش‌نیازها

در این فصل به بیان تعاریفی می‌پردازیم که در سراسر این پایان‌نامه مورد نیاز است. مطالب این فصل از مراجع [۱]، [۳]، [۹]، [۱۴]، [۲۹] و [۳۰] برداشت شده است.

۱.۱ تعریف فضای برداری. یک فضای برداری یا فضای خطی تشکیل شده از

۱) یک هیأت F از اسکالرها

۲) یک مجموعهٔ V از اشیایی به نام بردارها

۳) یک قاعدهٔ یا عمل به نام جمع برداری که مجموعهٔ V نسبت به این عمل بسته و دارای خواص زیر است

الف) به ازای هر $\alpha, \beta \in V$، $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

ب) به ازای هر $\alpha, \beta, \gamma \in V$، $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

ج) $\circ \in V$ ی موجود است به طوری که به ازای هر $\alpha \in V$ داشته باشیم:

$$\alpha+\circ=\circ+\alpha=\alpha$$

د) به ازای هر $\alpha \in V$ وجود داشته باشد عنصری مانند $-\alpha \in V$ به طوری که

$$\alpha + (-\alpha) = -\alpha + \alpha = ۰$$

۴) یک قاعده یا عمل به نام ضرب اسکالری که به ازای هر اسکالر مانند $c \in F$ و هر بردار $\alpha \in V$ بردار $c\alpha \in V$ بوده و دارای خواص زیر است

الف) عنصری مانند $۱ \in F$ وجود دارد بطوری که به ازای هر $\alpha \in V$ داشته باشیم $۱.\alpha = \alpha$.

ب) به ازای هر $c_۱, c_۲ \in F$ و $\alpha \in V$، $(c_۱c_۲)\alpha = c_۱(c_۲\alpha)$.

ج) به ازای هر $c \in F$ و $\alpha, \beta \in V$، $c(\alpha + \beta) = c\alpha + c\beta$.

د) به ازای هر $c_۱, c_۲ \in F$ و $\alpha \in V$، $(c_۱ + c_۲)\alpha = c_۱\alpha + c_۲\alpha$.

۲.۱ تعریف متر. یک متر روی مجموعه‌ای چون X تابعی است مانند

$$d : X \times X \longrightarrow [۰, \infty)$$

به طوری که دارای شرایط زیر است

الف) $d(x, y) = ۰$ اگر و تنها اگر $x = y$.

ب) به ازای هر $x, y \in X$، $d(x, y) = d(y, x)$.

ج) به ازای هر $x, y, z \in X$،

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

به عنوان مثال $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^{+}$ که $d(x,y)=|x-y|$ یک متر روی $\mathbb{R}$ می‌باشد.

۳.۱ تعریف فضای متریک. اگر X یک مجموعه باشد و d یک متر روی X باشد، زوج (X,d) را فضای متریک می‌گوییم. معمولاً اگر متر d روی X معلوم باشد به جای (X,d) می‌نویسیم فضای متری X.

به عنوان مثال $(\mathbb{R},|.|)$ فضای متریک است.

۴.۱ تعریف دنبالهٔ کشی . دنبالهٔ $\{x_n\}$ را در فضای متریک (X,d) کشی گوییم هرگاه

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists N\in\mathbb{N}\quad s.t.\quad\forall m,n\geq N\Longrightarrow d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

۵.۱ تعریف فضای متریک کامل. فضای متریک (X,d) را متریک کامل گوییم هرگاه هر دنبالهٔ کشی در آن همگرا باشد.

۶.۱ تعریف نگاشت جمعی. فرض کنیم X و Y فضاهای برداری باشند. نگاشت $f:X\longrightarrow Y$ را جمعی گوییم هرگاه به ازای هر $x,y\in X$ داشته باشیم

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

۷.۱ تعریف نگاشت دوجمعی. نگاشت $f:X\times X\longrightarrow Y$ را دوجمعی گوییم در صورتی که به ازای هر $x,y,z\in X$ داشته باشیم

$$f(x+y,z)=f(x,z)+f(y,z)\quad(۱$$

$$f(x,y+z)=f(x,y)+f(x,z)\quad(۲$$

به عبارت دیگر f هم نسبت به متغیر اول و هم نسبت به متغیر دوم جمعی باشد.

۸.۱ تعریف تابع متقارن. فرض کنیم X و Y فضاهای برداری باشند. تابع $f : X{\times}X \longrightarrow Y$ را متقارن گوییم هرگاه برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$f(x,y) = f(y,x)$$

۹.۱ تعریف پایداری. فرض کنیم یک شیء ریاضی در یک خاصیت تقریبی صدق کند. اگر بتوانیم این شیء را با یک شیء که دقیقاً در آن خاصیت صدق کند، تقریب کنیم، گوییم آن شیء پایدار است.

۱۰.۱ تعریف نقطهٔ ثابت. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $f : (X,d) \longrightarrow (X,d)$ یک تابع باشد. در این صورت نقطهٔ $x_\circ \in X$ را یک نقطهٔ ثابت f گوییم هرگاه $f(x_\circ) = x_\circ$.

۱۱.۱ تعریف جبر. یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$، یک فضای برداری مانند A روی $\mathbb{F}$ همراه با نگاشت

$$A{\times}A \longrightarrow A$$
$$(x,y) \mapsto xy$$

می‌باشد به طوری که برای هر $x,y,z \in A$ و هر $\alpha \in \mathbb{F}$، شرایط زیر برقرار می‌باشد؛

۱) $x(yz) = (xy)z$.

۲) $x(y+z) = xy + xz$

$(x+y)z = xz + yz$

۳) $x(\alpha y) = (\alpha x)y = \alpha(xy)$

۱۲.۱ تعریف نیم‌نرم. فرض کنیم A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. یک نیم‌نرم روی A یک نگاشت است به طوری که در شرایط زیر صدق کند

$$||.|| : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

۱) برای هر $x \in A$، $||x|| \geq 0$

۲) برای هر $x, y \in A$، $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

۳) برای هر $x \in A$، $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$.

۱۳.۱ تعریف نرم. نیم‌نرمی که در آن شرط زیر برقرار باشد نرم نامیده می‌شود

$$||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

۱۴.۱ تعریف نرم جبری. فرض کنیم A یک جبر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. یک نرم جبری، نرمی روی A می باشد به طوری که برای هر $x, y \in A$ داشته باشیم

$$||xy|| \leq ||x||.||y||$$

۱۵.۱ تعریف جبر نرم‌دار. هر جبر A که مجهز به نرم جبری باشد، یک جبر نرم‌دار نامیده می‌شود.

۱۶.۱ تعریف جبر باناخ. یک جبر نرم‌دار کامل، یک جبر باناخ نامیده می‌شود.

۱۷.۱ تعریف جبر باناخ یکدار. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد به طوری که A شامل عنصر همانی e با شرط ۱ $= \|e\|$ می‌باشد. در این صورت A یک جبر باناخ یکدار نامیده می‌شود.

۱۸.۱ تعریف عنصر وارون‌پذیر. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. عنصر $x \in A$ وارون‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه عنصر $y \in A$ موجود باشد به قسمی که

$$xy = yx = e$$

۱۹.۱ تعریف جبر مختلط. هر جبری که میدان آن اعداد مختلط باشد، جبر مختلط نامیده می‌شود.

۲۰.۱ تعریف برگشت. فرض کنیم A یک جبر مختلط باشد. نگاشت $* : A \longrightarrow A$ یک برگشت روی A نامیده می‌شود هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

۱) برای هر $x, y \in A$، $(x+y)^* = x^* + y^*$

۲) برای هر $x, y \in A$، $(xy)^* = y^* x^*$

۳) برای هر $x \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$، $(\alpha x)^* = \bar{\alpha} x^*$ که در آن $\bar{\alpha}$ مزدوج عنصر α می‌باشد

۴) $(x^*)^* = x$.

۲۱.۱ تعریف عنصر هرمیتی. عنصر $x \in A$ هرمیتی نامیده می‌شود هرگاه $x = x^*$.

۲۲.۱ تعریف $*$−جبر. هر جبر روی اعداد مختلط همراه با نگاشت $* : A \longrightarrow A$ به طوری که شرایط برگشت روی A برقرار باشد، یک $*$−جبر نامیده می‌شود.

۲۳.۱ تعریف $*$−جبر باناخ. یک $*$−جبر باناخ، $*$−جبری است که کامل باشد.

۲۴.۱ تعریف C^*–جبر. یک $*$–جبر باناخ یک C^*–جبر نامیده می‌شود هرگاه برای هر عنصر دلخواه آن مانند x داشته باشیم

$$\|xx^*\| = \|x\|^۲$$

۲۵.۱ تعریف عنصر نرمال. عنصر x در $*$–جبر A نرمال نامیده می شود هرگاه

$$xx^* = x^*x$$

۲۶.۱ تعریف عنصر یکه‌ای. عنصر x در $*$–جبر A یکه‌ای است هرگاه

$$xx^* = x^*x = e$$

که منظور از e عنصر همانی می باشد.

۲۷.۱ تعریف A**–مدول چپ باناخ.** فرض کنیم A یک جبر باناخ و X یک فضای باناخ باشد. در این صورت X، یک A–مدول چپ باناخ نامیده می‌شود هرگاه نگاشت زیر موجود باشد

$$A \times X \longrightarrow X$$
$$(a, x) \mapsto ax$$

به طوری که شرایط زیر برقرار باشند؛

۱) برای هر $a, b \in A$ و هر $x \in X$،

$$(ab)x = a(bx)$$

۲) برای هر $a \in A$ و هر $x, y \in X$،

$$a(x+y) = ax + ay$$

۳) برای هر $a, b \in A$ و هر $x \in X$،

$$(a+b)x = ax + bx$$

۴) برای هر $a \in A$ و هر $x \in X$، عنصری مانند k بزرگتر یا مساوی ۱ موجود باشد به قسمی که برای هر $a \in A$ و $x \in X$ داشته باشیم:

$$\|ax\| \leq k\|a\|.\|x\|$$

۲

پایداری معادلهٔ تابعی درجه سوم با استفاده از روش نقطهٔ ثابت تناوبی

در این فصل به بررسی نتایج به دست آمده در مورد پایداری هایرز ـ اولام ـ راسیاس تعمیم یافته، برای معادلهٔ تابعی درجه سوم نوع اول

$$\begin{aligned} & f(x+y+۲z)+f(x+y-۲z)+f(۲x)+f(۲y) \\ & =۲[f(x+y)+۲f(x+z)+۲f(x-z)+۲f(y+z)+۲f(y-z)] \qquad (۱) \end{aligned}$$

می‌پردازیم و معادله تابعی زیر را معادله تابعی نوع دوم می‌نامیم.

$$f(۲x+y)+f(۲x-y)=۲f(x+y)+۲f(x-y)+۱۲f(x) \qquad (۲)$$

نتیجهٔ پایداری معادلهٔ (۲) توسط کیم[۱] و یان[۲] به دست آمده است. به عنوان مثال می‌توان به مراجع [۱۸] و [۲۸] رجوع کرد.

---

[۱] H.M. Kim
[۲] K.W. Yun