دانشگاه سمنان

دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر

« گروه ریاضی »

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

مشخص سازی تکواره های حذف پذیر راست با استفاده از خواص یکدستی و منظمی عمل ها

نگارش

اشکان پاسبان روزبهانی

استاد راهنما

دکتر علی معدنشکاف

استاد مشاور

دکتر راضیه محجوب

بهمن ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

قدردانی

صمیمانه سپاسگزارم از بهترین های بی بدیل زندگی ام، پدر بزرگوار و مادر مهربان و خواهر و برادر عزیزم و همه آن هایی که لایق واژه زیبای دوست هستند. همچنین از جاودانه ترین غزل خداوند استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر علی معدنشکاف سپاسگزارم.

تقدیم به :

ساحت مقدس خورشید فروزان طوس حضرت

علی بن موسی الرضا (ع)

و

صاحبان برترین مقام

پدر عزیز و مادر مهربانم

چکیده

فرض کنید S یک تکواره باشد. یک $S-$ عمل راست مجموعه ناتهی A به همراه یک نگاشت $A \times S \longrightarrow A$ است، که در آن تصویر (a,s) به‌صورت as نمایش داده می‌شود، به گونه‌ای که برای هر $s,t \in S$ و $a \in A$، $a(st) = (as)t$ و $a1 = a$. به طور مشابه $S-$ عمل چپ تعریف می‌شود.

$S-$ عمل راست A_S عقب بر یکدست است، هرگاه تابعگون $A_S \otimes {}_S-$ (از رسته‌ی $S-$ عمل های چپ به رسته‌ی مجموعه‌ها) عقب برها را حفظ کند. در این پایان نامه، تعمیم های این مفهوم را بررسی می کنیم. بعلاوه با استفاده از شرط های (P) و (PWP) و خواص یکدستی و منظمی عمل ها، به مشخص سازی تکواره های حذف پذیر راست می پردازیم.

واژه‌های کلیدی: $S-$ عمل، یکدست، $S-$ عمل های به طور(اصلی) ضعیف یکدست، هم حاصلضرب ملقمه ای، تکواره حذف پذیر راست، $S-$ عمل منظم

مقدمه

بررسی خواص عمل های ساخته شده روی تکواره ها به حدود سال ۱۹۷۰ بر می گردد. ضرب تانسوری عمل ها و رابطه آن با خواص یکدستی (یکدستی، به طور ضعیف یکدستی و ...) اولین بار توسط کیلپ و استنستروم مورد توجه قرار گرفت. خاصیت به طور قوی یکدستی عمل ها در سال ۱۹۷۰ توسط استنستروم و شرط (P) از عمل ها در سال ۱۹۸۷ توسط نرماک مورد بررسی قرار گرفتند. در سال ۱۹۹۱ بولمن ـفلمینگ در مقاله ای نشان داد، که به طور قوی یکدستی، عقب بر یکدستی، شرط (BF) و شرط های (P) و (E) معادل هستند. در سال ۱۹۹۸ لان و کیلپ خاصیتی از عمل ها که تعمیمی از خاصیت به طور قوی یکدستی است، معرفی و نشان دادند که این خاصیت، شرط (PF') و شرط (P) و (E') معادل هستند. شرط های (PF') و (E') شرط هایی بودند که برای اولین بار معرفی شدند. پس از آن بر اساس تحقیقات وسیعی توسط بولمن ـفلمینگ، لان و کیلپ نشان داده شد که بسیاری از خواص شناخته شده یکدستی به همراه شرط های (P) و (PF') و (BF) بر پایه رفتاری از عمل های عقب بر خاص، تعریف پذیر و بر این اساس خواص جدید دیگری از عمل ها معرفی گردید. در فصل اول از این پایان نامه، به بیان تعاریف و قضایای مقدماتی که در فصل های دوم و سوم مورد استفاده قرار می گیرند، پرداخته ایم. در فصل دوم ضرب تانسوری عمل ها و انواع یکدستی را با استفاده از منابع [۴] و [۱۰] مورد بررسی قرار داده ایم و در فصل آخر، با استفاده از منابع [۱۶] و [۱۷] سه نوع دیگر از انواع یکدستی، یعنی به طور ضعیف هسته یکدست، به طور اصلی ضعیف هسته یکدست، انتقال هسته یکدست و همچنین شرط های (WP) و (PWP) را معرفی کرده و با در نظر گرفتن نتایجی که از فصل دوم بدست آورده ایم، به مشخص سازی تکواره های حذف پذیر راست پرداخته ایم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در بخش اول این فصل به تعریف نیم‌گروه و تکواره می‌پردازیم. بخش دوم را با تعریف رسته آغاز می‌کنیم. در ادامه این بخش مثال‌هایی از رسته‌ها می‌آوریم که تا کنون با آن‌ها آشنابوده‌ایم و حال آن‌ها را به عنوان رسته معرفی می‌کنیم. در بخش سوم رسته $S-$ عمل‌ها را تعریف کرده و با توجه به اهمیت این رسته در این پایان‌نامه به بیان چند قضیه و گزاره مهم از جمله قضیه همریختی‌ها در $S-$ عمل‌ها می‌پردازیم.
بخش کامل از این موضوعات ریاضی را می‌توان در کتاب تکواره‌ها، عمل‌ها و رسته‌ها اثر ماتی کیلپ و همکارانش که در سال ۲۰۰۰ میلادی منتشر شده است، یافت.

۱.۱ نیم‌گروه‌ها و تکواره‌ها

در این بخش به تعریف نیم گروه و تکواره می پردازیم، به ویژه تکواره حذف پذیر را تعریف می کنیم، که در این پایان نامه بسیار مورد استفاده قرار می گیرد.

تعریف ۱.۱.۱ یک نیم‌گروه[۱] عبارت است از مجموعه‌ای ناتهی مانند G همراه با عملی دوتایی بر G با خاصیت زیر:

(شرکت پذیری) به ازای هر $a, b, c \in G$ $\quad a(bc) = (ab)c$

[۱] semigroup

تعریف ۲.۱.۱ یک تکواره[۲]، نیم‌گروهی است مانند G که شامل یک عنصر همانی دو طرفه مانند $1 \in G$ است، یعنی به ازای هر $a \in G$، $a1 = 1a = a$.

تعریف ۳.۱.۱ عنصر $z \in S$ صفر چپ (صفر راست) تکواره S نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $t \in S$ داشته باشیم، $zt = z$ $(tz = z)$ و یک صفر S است، اگر صفر چپ و راست باشد.
تکواره S یک تکواره صفر چپ (صفر راست) است، اگر همه اعضای $S\backslash\{1\}$ صفر چپ (صفر راست) باشند. S یک تکواره صفر است هرگاه همه اعضای $S\backslash\{1\}$ صفر باشند.

مثال ۴.۱.۱ مجموعه $S = \{1, s, t\}$ همراه با ضربی که در جدول زیر آمده است، یک تکواره صفر چپ می‌باشد.

$.$	1	s	t
1	1	s	t
s	s	s	s
t	t	t	t

تعریف ۵.۱.۱ عضو $e \in S$، خودتوان نامیده می‌شود، اگر $e.e = e$. مجموعه تمام عضوهای خودتوان S را با $E(S)$ نمایش می‌دهیم. حال اگر در تکواره S، $E(S) = S$ باشد، به S تکواره خودتوان گوییم.

مثال ۶.۱.۱ مجموعه اعداد طبیعی همراه با عمل کوچکترین مضرب مشترک دو عدد، یک تکواره خودتوان است.

تعریف ۷.۱.۱ عضو c از تکواره S حذف شدنی [۳] راست (حذف شدنی چپ) نامیده می‌شود، هرگاه برای هر $r, t \in S$ تساوی $rc = tc$ $(cr = ct)$، تساوی $r = t$ را نتیجه دهد. همچنین تکواره S را حذف‌پذیر راست (حذف‌پذیر چپ) گوییم، هرگاه همه عناصر آن حذف شدنی راست (حذف شدنی چپ) باشد.

---
[۲] monoid
[۳] cancellable

مثال ۸.۱.۱ مجموعه اعداد طبیعی همراه با ضرب معمولی یک تکواره حذف‌پذیر راست و حذف‌پذیر چپ است.

تعریف ۹.۱.۱ اگر S یک تکواره باشد، گوییم $I \subseteq S$ یک ایدآل راست از S است، هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

۱) I ناتهی باشد،

۲) برای هر $s \in S$ و $a \in I$، داشته باشیم $as \in I$.

به طور مشابه می‌توان ایدآل چپ را نیز تعریف کرد.

تعریف ۱۰.۱.۱ اگر S یک تکواره باشد و $s \in S$، کوچکترین ایدآل راست S که شامل s است، به این صورت تعریف می‌شود:

$$sS = \{st \mid t \in S\}$$

که ایدآل اصلی راست تولید شده توسط s نامیده می‌شود.
به طور مشابه می‌توان ایدآل اصلی چپ تولید شده توسط s را نیز تعریف کرد.

تعریف ۱۱.۱.۱ S یک تکواره ایدآل اصلی راست (ایدآل اصلی چپ) نامیده می‌شود، هرگاه هر ایدآل راست (ایدآل چپ) آن ایدآل اصلی راست (ایدآل اصلی چپ) باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱ تکواره S را برگشت‌پذیر چپ[۴] (راست) نامیم، هرگاه اشتراک هر دو ایدآل چپ (راست) در آن ناتهی باشد.

---
[۴] left reversible

تعریف ۱۳.۱.۱ تکواره S را منظم گوییم هرگاه برای هر عضو $s \in S$، عضو $x \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $s = sxs$.

مثال ۱۴.۱.۱ بوضوح هر گروه یک تکواره منظم می باشد.

در تعریف زیر رابطه هایی را روی تکواره S معرفی می کنیم که در فصل دوم مورد استفاده قرار می گیرند.

تعریف ۱۵.۱.۱ روی تکواره S، رابطه‌ی $\mathcal{R}$ و $\mathcal{L}$ را برای هر $s, t \in S$ به این صورت تعریف می کنیم، که $s\mathcal{R}t$ اگر و تنها اگر $sS = tS$ و $s\mathcal{L}t$ اگر و تنها اگر $Ss = St$.

۲.۱ رسته‌ها

تعریف ۱.۲.۱ هر رسته $\mathcal{C}$[۵] خانواده‌ای از اشیا است که معمولاً آن‌ها را با $A, B, C, \ldots$ نشان می‌دهیم، با این ویژگی که

۱) هر دو شی A و B، مجموعه‌ای متناظر می‌شود که با $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ نشان داده می‌شود و دارای این خاصیت است که به ازای هر چهار شی مثل A، B، C و D که $(A, B) \neq (C, D)$، $Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \cap Mor_{\mathcal{C}}(C, D) = \emptyset$،

۲) به ازای هر سه شی A، B و C، تابع

$$\cdot : Mor_{\mathcal{C}}(B, C) \times Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \longrightarrow Mor_{\mathcal{C}}(A, C)$$
$$(g, f) \longmapsto gf$$

موجود است که

---
[۵] category

- به ازای هر چهار شی مثل A، B، C و D، اگر $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$، $g \in Mor_{\mathcal{C}}(B,C)$ و $h \in Mor_{\mathcal{C}}(C,D)$، آن‌گاه $h(gf) = (hg)f$،
- به ازای هر شی مثل A، عضوی از $Mor_{\mathcal{C}}(A,A)$ مثل 1_A موجود است که به ازای هر عضو از $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ مثل f و هر عضو از $Mor_{\mathcal{C}}(C,A)$ مثل g، $1_A g = g$ و $f 1_A = f$.

در رسته‌ای مثل $\mathcal{C}$، به ازای هر دو شی مثل A و B، هر عضو از $Mor_{\mathcal{C}}(A,B)$ را ریختار از A به B می‌نامند. نماد $f : A \longrightarrow B$ هم یعنی این که f ریختاری از A به B است.

مثال ۲.۲.۱ فرض کنیم $\mathcal{S}$ رده تمام مجموعه‌ها باشد. به ازای $A, B \in \mathcal{S}$، $Mor(A,B)$ مجموعه تمام توابع $f : A \longrightarrow B$ است. به آسانی دیده می‌شود که $\mathcal{S}$ یک رسته است. این رسته را با نماد $\mathbb{S}et$ نمایش می دهیم.

مثال ۳.۲.۱ فرض کنیم $\mathcal{S}$ رده تمام گروه‌ها باشد. $Mor(A,B)$ مجموعه‌ی تمام همریختی‌های گروهی بین A و B می‌باشد. می‌بینیم که $\mathcal{S}$ یک رسته می‌باشد.

مثال ۴.۲.۱ گروه ضربی G را می‌توان رسته‌ای با یک شی، یعنی G در نظر گرفت. فرض کنیم $Mor(G,G)$ مجموعه همه عناصر G باشد. به ازای هر دو عضو $a, b \in G$، ترکیب همریختی‌های a و b چیزی جز ab با عمل دوتایی در G نیست و 1_G، عنصر همانی e از G است.

تعریف ۵.۲.۱ شی I در رسته $\mathcal{C}$ را شی آغازی[۶] یا ابتدایی گوییم اگر به ازای هر شی C، از $\mathcal{C}$ یک و فقط یک ریخت $I \longrightarrow C$ وجود داشته باشد.

مثال ۶.۲.۱ در رسته مجموعه‌ها، $\emptyset$ شی آغازی است.

---

[۶] initial object

مثال ۷.۲.۱ در رسته گروه‌ها، هر گروه بدیهی شی آغازی است.

تعریف ۸.۲.۱ شی T در رسته $\mathcal{C}$ را شی نهایی [۷] یا پایانی گویند اگر به ازای هر شی C از $\mathcal{C}$ یک و فقط یک ریخت $C \longrightarrow T$ وجود داشته باشد.

مثال ۹.۲.۱ در رسته مجموعه‌ها، مجموعه‌های تک‌عضوی شی نهایی هستند.

مثال ۱۰.۲.۱ در رسته گروه‌ها، هر گروه بدیهی شی نهایی است.

تعریف ۱۱.۲.۱ فرض می‌کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته و $\{A_i \mid i \in I\}$ خانواده‌ای از اشیا $\mathcal{C}$ باشد. یک حاصلضرب برای خانواده $\{A_i \mid i \in I\}$، شیئی است مانند P از $\mathcal{C}$ همراه با خانواده‌ای از ریخت‌ها مانند $\{p_i : P \longrightarrow A_i \mid i \in I\}$ به طوری که به ازای هر شی B و هر خانواده $\{\varphi_i : B \longrightarrow A_i \mid i \in I\}$ از ریخت‌های $\mathcal{C}$، ریخت منحصربه‌فردی مانند $\varphi : B \longrightarrow P$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $i \in I$، $p_i\varphi = \varphi_i$. یعنی به ازای هر $i \in I$، نمودار زیر جابه‌جایی است.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\ P \arrow[r, "p_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

شی حاصلضرب P برای $\{A_i \mid i \in I\}$، معمولاً با $\prod_{i\in I} A_i$ نشان داده می‌شود.

مثال ۱۲.۲.۱ در رسته مجموعه‌ها، حاصلضرب دکارتی $\prod_{i\in I} A_i$ شی حاصلضرب برای خانواده $\{A_i \mid i \in I\}$ از مجموعه‌ها است.

---
[۷] terminal object

در رسته گروه‌ها حاصلضرب مستقیم، $\prod_{i\in I} G_i$ شی حاصلضرب برای خانواده $\{G_i \mid i\in I\}$ از گروه‌ها است.

قضیه ۱۳.۲.۱ هرگاه $(P,\{p_i\})$ و $(Q,\{q_i\})$ هر دو شی حاصلضرب برای خانواده $\{A_i \mid i\in I\}$ از اشیا رسته $\mathcal{C}$ باشند، آن‌گاه P و Q معادلند.

برهان . قضیه ۳.۷.۱ از مرجع [۲۱] را ببینید. ■

تعریف ۱۴.۲.۱ یک هم‌حاصلضرب برای خانواده‌ی $\{A_i \mid i\in I\}$ از اشیا در رسته $\mathcal{C}$ شیئی است مانند S از $\mathcal{C}$ همراه با خانواده‌ای از ریخت‌ها مانند $\{\iota_i : A_i \longrightarrow S \mid i\in I\}$ به طوری که به ازای هر شی B و خانواده $\{\psi_i : A_i \longrightarrow B \mid i\in I\}$ از ریخت‌های دلخواه، ریخت منحصربه‌فردی مانند $\psi : S \longrightarrow B$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $i\in I$، $\psi\circ\iota_i = \psi_i$. یعنی، برای هر $i\in I$، نمودار زیر جابه‌جایی است.

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, "\iota_i"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & S \arrow[d, "\psi"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

شی هم‌حاصلضرب S برای $\{A_i \mid i\in I\}$ معمولاً با $\coprod_{i\in I} A_i$ نشان داده می‌شود.
اگر برای هر $i\in I$، $A_i \cong A$. آنگاه از نماد $\coprod_{I} A$ برای $\coprod_{i\in I} A_i$ استفاده می کنیم. و این شی را، یک شی هم توان[۸] از A می نامیم.

مثال ۱۵.۲.۱ در رسته مجموعه‌ها، برای خانواده $\{A_i \mid i\in I\}$، اجتماع مجزای آن‌ها، یعنی $\dot{\bigcup} A_i$، شی هم‌حاصلضرب این خانواده است.

قضیه ۱۶.۲.۱ هرگاه $(S,\{\iota_i\})$ و $(S',\{\lambda_i\})$ هر دو شی هم‌حاصلضرب برای خانواده $\{A_i \mid i\in I\}$ از اشیا رسته $\mathcal{C}$ باشند، آن‌گاه S و S' معادلند.

[۸] copower

برهان . قضیه ۵.۷.۱ از مرجع [۲۱] را ببینید. ■

تعریف ۱۷.۲.۱ رسته ملموس[۹] رسته‌ای است مانند $\mathcal{C}$ همراه با تابعی چون σ که به هر شی A از $\mathcal{C}$ مجموعه $\sigma(A)$ (به نام مجموعه زمینه A) را نسبت می‌دهد به طوری که

۱) هر ریخت $A \longrightarrow B$ از $\mathcal{C}$ تابعی بر مجموعه‌های زمینه $\sigma(A) \longrightarrow \sigma(B)$ است.

۲) ریخت همانی هر شی A از $\mathcal{C}$، تابع همانی بر مجموعه زمینه $\sigma(A)$ است.

۳) ترکیب ریخت‌ها در $\mathcal{C}$ با ترکیب توابع بر مجموعه‌های زمینه یکی است.

در ادامه شی و مجموعه زمینه را با یک علامت نشان داده و از ذکر صریح σ خودداری می‌کنیم.

مثال ۱۸.۲.۱ رسته گروه‌ها همراه با تابعی که به هر گروه مجموعه زمینه‌اش در معنی عادی را نسبت می‌دهد یک رسته ملموس است. ولی در مثال ۴.۲.۱، هرگاه تابع σ به گروه G مجموعه زمینه معمولی G را نسبت دهد، آن‌گاه رسته مورد نظر ملموس نیست. (زیرا ریخت‌ها بر مجموعه G تابع نیستند.)

تعریف ۱۹.۲.۱ فرض می‌کنیم F شیئی در رسته ملموس $\mathcal{C}$، X مجموعه‌ای ناتهی و $i : X \longrightarrow F$ یک نگاشت (از مجموعه‌ها) باشد. گوییم F بر مجموعه X آزاد است اگر به ازای هر شی A از $\mathcal{C}$ و نگاشت $f : X \longrightarrow A$ (از مجموعه‌ها)، ریخت منحصر به فردی از $\mathcal{C}$ مانند $\bar{f} : F \longrightarrow A$ وجود داشته باشد به طوری که $\bar{f}i = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & F \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ A & \end{tikzcd}$$

---
[۹] concrete

مثال ۲۰.۲.۱ فرض کنیم G یک گروه و $g \in G$. به آسانی دیده می‌شود که نگاشت $\bar{f} : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ تعریف شده با $\bar{f}(n) = g^n$، همریختی منحصر به فردی است که $۱ \longmapsto g$. در نتیجه هرگاه $X = \{۱\}$ و $i : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ نگاشت شمول باشد آن‌گاه $\mathbb{Z}$ بر X در رسته گروه‌ها، آزاد است. (اگر $f : X \longrightarrow G$، فرض می‌کنیم $g = f(۱)$ و $\bar{f}$ را مانند بالا تعریف می‌کنیم.)

قضیه ۲۱.۲.۱ هرگاه $\mathcal{C}$ یک رسته ملموس، F و F' اشیایی از $\mathcal{C}$ باشند به طوری که F بر مجموعه X و F' بر مجموعه X' آزاد باشد و نیز $|X| = |X'|$، آن‌گاه F با F' معادلند.

برهان . قضیه ۸.۷.۱ از مرجع [۲۱] را ببینید. ■

تعریف ۲۲.۲.۱ فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو رسته باشند. یک تابعگون از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$، زوجی متشکل از دو تابع است، یکی تابع شی، که به هر شی از $\mathcal{C}$ مثل A، شی $F(A)$ از $\mathcal{D}$ را نسبت می دهد، و دیگری تابع ریخت، که آن را هم با F نشان می دهیم و به هر ریخت از $\mathcal{C}$ مثل $f : A \longrightarrow A'$، ریخت $F(f)$ از $\mathcal{D}$ نسبت می دهد، با این ویژگی که

۱) به ازای هر شی از $\mathcal{C}$ مثل A، $F(۱_A) = ۱_{F(A)}$،

۲) به ازای هر دو ریخت از $\mathcal{C}$ مثل $f_۱ \in Mor_{\mathcal{C}}(A_۱, A_۲)$ و $f_۲ \in Mor_{\mathcal{C}}(A_۲, A_۳)$، که $A_۱, A_۲, A_۳ \in \mathcal{C}$، $F(f_۲ f_۱) = F(f_۲)F(f_۱)$.

*۲) به ازای هر دو ریخت از $\mathcal{C}$ مثل $f_۱ \in Mor_{\mathcal{C}}(A_۱, A_۲)$ و $f_۲ \in Mor_{\mathcal{C}}(A_۲, A_۳)$، که $A_۱, A_۲, A_۳ \in \mathcal{C}$، $F(f_۲ f_۱) = F(f_۱)F(f_۲)$.

اگر F در (۱) و (۲) صدق کند، آن را تابعگون همورد گوییم. در این حالت

$$F(Mor_{\mathcal{C}}(A_۱, A_۲)) \subseteq Mor_{\mathcal{D}}(F(A_۱), F(A_۲))$$

اگر F در (۱) و (*۲) صدق کند، آن را تابعگون پادورد گوییم. در این حالت

$$F(Mor_{\mathcal{C}}(A_۱, A_۲)) \subseteq Mor_{\mathcal{D}}(F(A_۲), F(A_۱))$$

تذکر ۲۳.۲.۱ گیریم $\mathcal{C}$ یک رسته و $A, B \in \mathcal{C}$. آنگاه

$$Mor_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{S}et$$

یک تابعگون همورد است، که به هر شی $C \in \mathcal{C}$، شی $Mor(A, C) \in \mathbb{S}et$ را نظیر می کند و اگر $C' \in \mathcal{C}$، آنگاه به ریخت $g : C \longrightarrow C'$،

$$Mor(A, g) : Mor(A, C) \longrightarrow Mor(A, C')$$

$$\alpha \longmapsto g\alpha$$

نظیر می شود. واضح است که $Mor_{\mathcal{C}}(A, -)$ حافظ همانی است و ترکیب را نیز حفظ می کند، چون برای هر $f \in Mor(C, C')$ و $f' \in Mor(C', C'')$ و $\alpha \in Mor(A, C)$ داریم

$$Mor(A, f'f)(\alpha) = (f'f)(\alpha) = f'(f\alpha) = (Mor(A, f')Mor(A, f))(\alpha)$$

لذا $Mor_{\mathcal{C}}(A, -)$ یک تابعگون همورد است. همچنین

$$Mor_{\mathcal{C}}(-, B) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{S}et$$

تابعگون پادورد است، که به هر شی $D \in \mathcal{C}$، شی $Mor(D, B) \in \mathbb{S}et$ را نظیر می کند و اگر $D' \in \mathcal{C}$، آنگاه به ریخت $h : D \longrightarrow D'$،

$$Mor(h, B) : Mor(D', B) \longrightarrow Mor(D, B)$$

$$\beta \longmapsto \beta h$$

نظیر می شود. به راحتی می توان بررسی کرد که $Mor_{\mathcal{C}}(-, B)$ یک تابعگون پادورد است.

تعریف ۲۴.۲.۱ موقعیت زیر را در رسته $\mathcal{C}$ ملاحظه کنید

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[d, "f_1"] \\ C_2 \arrow[r, "f_2"'] & D \end{tikzcd}$$

دوتایی $(B,(g_1,g_2))$ که برای $i=1,2$، $g_i : B \longrightarrow C_i$، در رسته $\mathcal{C}$ یک عقب‌بر[10] برای f_1 و f_2 نام دارد، اگر

۱) $f_1 g_1 = f_2 g_2$

۲) به ازای هر جفت ریخت $h_1 : B' \longrightarrow C_1$ و $h_2 : B' \longrightarrow C_2$ که $f_1 h_1 = f_2 h_2$، ریخت منحصربه‌فردی مانند $t : B' \longrightarrow B$ وجود داشته باشد که $h_1 = g_1 t$ و $h_2 = g_2 t$.

$$\begin{tikzcd} B' \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, "h_1"] \arrow[ddr, "h_2"'] & & \\ & B \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "g_2"'] & C_1 \arrow[d, "f_1"] \\ & C_2 \arrow[r, "f_2"'] & D \end{tikzcd}$$

در صورتی که در تعریف بالا $f_1 = f_2 = f$، آنگاه عقب بر $(K,(p_1,p_2))$ از دوتایی (f_1,f_2) را برای ریخت $f : X \longrightarrow Y$ یک دوتایی هسته از f نامند.

---

[10] pullback

مثال ۲۵.۲.۱ شی عقب‌بر در رسته مجموعه‌ها.

موقعیت عقب‌بر در رسته مجموعه‌ها را ملاحظه کنید

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "f"] \\ N \arrow[r, "g"'] & Q \end{tikzcd}$$

دوتایی $(P,(p_1,p_2))$ که در آن $p_1 : P \longrightarrow M$ و $p_2 : P \longrightarrow N$، تصویرگرها هستند، در رسته مجموعه‌ها یک عقب‌بر برای f و g است، زیرا با در نظر گرفتن مجموعه‌ی $P = \{(m,n) \in M \times N ; f(m) = g(n)\}$ شرط (۱) و (۲) در تعریف ۲۴.۲.۱، را می توانیم مورد بررسی قرار دهیم. برای هر $(m,n) \in P$ داریم

$$fp_1(m,n) = f(m) = g(n) \qquad (۳)$$

$$gp_2(m,n) = g(n) = f(m) \qquad (۴)$$

با توجه به تساوی‌های (۳) و (۴)، داریم $fp_1 = gp_2$.

حال اگر فرض شرط (۲) برقرار باشد، باید همریختی منحصر به فرد $t : P' \longrightarrow P$ را بیابیم. ابتدا وجود آن را نشان می‌دهیم. برای هر $a \in P'$، $h_1(a) \in M$ و $h_2(a) \in N$ و با توجه به این‌که برای هر جفت تابع h_1 و h_2، $fh_1 = gh_2$ است پس

$$f(h_1(a)) = g(h_2(a))$$

که به این ترتیب با توجه به تعریف مجموعه P، $(h_1(a), h_2(a)) \in P$ است. بنابراین t را این گونه تعریف می‌کنیم که برای هر $a \in P'$،

$$t(a) = (h_1(a), h_2(a))$$

از آن جایی که h_1 و h_2 تابع هستند، پس t نیز تابع است.

حال ثابت می‌کنیم که t تابع منحصربه‌فردی است که $h_1 = p_1 t$ و $h_2 = p_2 t$. اگر φ تابع دیگری باشد