بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه دکتری
رشته علوم کامپیوتر

تعمیم دیاگرام ورونوی در برخی فضاهای نااقلیدسی

نگارش
زهرا نیلفروشان

استاد راهنما: دکتر علی محدث خراسانی
استاد مشاور: دکتر مرتضی میر محمد رضایی

اسفند ماه ۱۳۸۷

بسمه تعالی

تاریخ:
شماره:

دانشگاه صنعتي امیرکبیر
(پلی‌تکنیک تهران)

فرم اطلاعات پایان‌نامه کارشناسي- ارشد و دکترا

معاونت پژوهشي
فرم پروژه تحصیلات تکمیلي ۷

مشخصات دانشجو:

نام و نام خانوادگي: زهرا نیلفروشان دانشجوي آزاد ● بورسیه ○ معادل ○

شماره دانشجوئي: ۸۱۲۱۳۹۵۵ دانشکده: ریاضي و علوم کامپیوتر

رشته تحصیلي: هندسه محاسباتي گروه: علوم کامپیوتر

مشخصات استاد راهنما:

نام و نام خانوادگي: دکتر علي محدث خراساني درجه و رتبه: استادیار

نام و نام خانوادگي: درجه و رتبه:

مشخصات استاد مشاور:

نام و نام خانوادگي: دکتر مرتضي میر محمد رضایي درجه و رتبه: دانشیار

نام و نام خانوادگي: درجه و رتبه:

عنوان پایان‌نامه به فارسي: تعمیم دیاگرام ورونوي در برخي فضاهاي نااقلیدسي

عنوان پایان‌نامه به انگلیسي: Generalization of Voronoi diagram in some non-Euclidean spaces

نوع پروژه: کارشناسي ○ ارشد ○ دکترا ●

سال تحصیلي: ۱۳۸۷

کاربردي ○ بنیادي ● توسعه‌اي ● نظري ○

تاریخ شروع: ۱۳۸۱ تاریخ خاتمه: ۱۳۸۷ تعداد واحد: ۱۹

سازمان تأمین کننده اعتبار: دانشگاه صنعتي امیرکبیر

واژه‌هاي کلیدي به فارسي: دایره انعکاسي، دیاگرام ورونوي، فضاي فینسلري، فضاي هذلولوي، هندسه محاسباتي.

واژه‌هاي کلیدي به انگلیسي:

Computational geometry, Finsler space, Hyperbolic space, Inversion circle, Voronoi diagram.

مشخصات ظاهري	تعداد صفحات			تعداد مراجع ۱۰۰	تعداد صفحات ضمائم
		تصویر ● نقشه ○	جدول ○ واژه‌نامه ● نمودار ○		
زبان متن	فارسي ●	انگلیسي ○	چکیده	فارسي ●	انگلیسي ○
یادداشت					

نظرها و پیشنهادها به منظور بهبود فعالیت‌هاي پژوهشي دانشگاه

استاد:

دانشجو:

امضاء استاد راهنما:

تاریخ:

۱: ارائه به معاونت پژوهشي به همراه یك نسخه الكترونیكي از پایان‌نامه و فرم اطلاعات پایان‌نامه بصورت PDF همراه چاپ چكیده (فارسي انگلیسي) و فرم اطلاعات پایان‌نامه

۲: ارائه به كتابخانه دانشكده (شامل دو جلد پایان نامه به همراه نسخه الكترونیکی فرم در لوح فشرده طبق نمونه اعلام شده در صفحه خانگي كتابخانه مركزي) مركزي)

قدر دانی:

اکنون که به لطف خداوند متعال این پایان نامه به اتمام رسیده است، بر خود لازم می دانم که از جناب آقای دکتر علی محدث، استاد راهنمای ارجمندم که همواره مشوق و پشتیبان من بوده اند، قدر دانی نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر مرتضی میرمحمد رضایی استاد مشاور دلسوزم و جناب آقای دکتر ابوالقاسم لاله که افتخار شاگردی ایشان از دوره لیسانس تا به حال را داشته ام، به خاطر نظرات ارزشمندشان کمال تشکر را دارم و نیز بر خود لازم میدانم که از جناب آقای دکتر فرهاد رحمتی که همواره مصاحبت با ایشان مایه دلگرمی اینجانب بوده است قدر دانی نمایم. همچنین افتخار آن را دارم که از جناب آقای پروفسور رُلف کلاین[1] ، جناب آقای دکتر اِلمار لَنگِتِپ[2] و جناب آقای دکتر اَنسگار گرونه[3] که با حوصله و بیان نظرات مفید خود قسمتی از کار را برای اینجانب آسان نمودند تشکری ویژه داشته باشم و از دوستان گرامیم خانمها مریم طهماسبی و مرضیه اسکندری و آقایان فِلورین بِرگِر[4]، اَلِکس گیلبِرت[5] و دکتر بهرام صادقی به خاطر راهنماییهای سودمندشان و از آقایان منصور داودی منفرد، امین غیبی، سینا خاک آبی که در برنامه نویسی مرا یاری نمودند قدردانی نموده و نیز از هیأت داوران خارجی جناب آقای دکتر حمید رضا فنایی و جناب آقای دکتر محمد قدسی، و داوران داخلی جناب آقای دکتر محمد رضا رزازی و جناب آقای دکتر مهدی هاشمی تشکری به علت پیشنهادات ارزشمندشان سپاسگزاری می نمایم.

از پدر و مادر عزیزم که در طول دوران تحصیلاتم مشوق من بوده اند و همواره با پشتیبانی بی نظیر و دعای خیر خود باعث موفقیت من شده اند، و از برادر خوبم که مرا در امر تایپ این پایان نامه یاری نمود کمال تشکر و قدردانی را دارم. در خاتمه از همسر مهربانم که با حمایت و یاری خود نقش ارزنده ای در تدوین این پایان نامه داشته است، سپاسگزاری می نمایم.

---

[1] Prof. Dr. Rolf Klein
[2] Dr. Elmar Langetepe
[3] Dr. Ansgar Grüne
[4] Florian Berger
[5] Alex Gilbert

چکیده:

دیاگرام ورونوی یکی از ابزارهای مفید در هندسه محاسباتی است که کاربردهای بسیار وسیعی در علوم مختلف دارد. در مورد دیاگرام ورونوی مطالعات زیادی تا بحال انجام شده است که اکثر آنها مربوط به زمانی است که متریک، متریک اقلیدسی باشد یعنی فضایی که انحنای آن صفر باشد. حال اگر فضا یک فضا با انحنای ناصفر باشد چه اتفاقی می افتد ؟

در این زمینه تحقیقات اندکی وجود دارد که در این پایان نامه با اشاره به آنها به بررسی بیشتر مطلب در برخی فضاهای نا اقلیدسی مختلف می پردازیم که از جمله آنها فضاهایی با انحنای منفی است و یا در حالت کلی تر فضاهایی که برای آنها متریک مشخصی تعریف نشده است.

کلمات کلیدی: دایره انعکاسی[٦]، دیاگرام ورونوی[٧]، فضای فینسلری[٨]، فضای هذلولوی[٩]، هندسه محاسباتی[١٠].

[٦] Inversion circle
[٧] Voronoi diagram
[٨] Finsler space
[٩] Hyperbolic space
[١٠] Computational geometry

پیشگفتار:

در این پایان نامه سعی شده است تا به بحث و بررسی دیاگرامهای ورونوی در برخی فضاهایی که تاکنون مورد مطالعه قرار نگرفته‌اند پرداخته شود. در این بین فضاهایی که بیشتر مورد توجه واقع شد، فضاهای نااقلیدسی با انحنای منفی و یا به تعبیری فضاهای هذلولوی است. طبیعی است که به دلیل ماهیت این گونه فضاها، تحقیق در این زمینه کار چندان آسانی نبوده و نیاز به محاسباتی پیچیده داشت.

برنامه ریزی تهیه این پایان نامه به ترتیب زیر است:

در فصل ۱ بطور اجمالی به معرفی دیاگرام ورونوی و مفاهیم آن پرداخته و الگوریتمهای موجود برای رسم این دیاگرامها را نام برده و در پایان چند نمونه از کاربردهای مفید دیاگرامهای ورونوی را متذکر شده ایم.

در فصل ۲ به بررسی دیاگرامهای ورونوی در یکی از مدلهای فضای ۲- بعدی هذلولوی، مدل دیسک پوآنکاره، پرداخته و دو الگوریتم برای رسم این دیاگرامها در مدل ذکر شده ارائه نموده و یکی از الگوریتمها را پیاده سازی کرده ایم. حاصل کار این فصل منجر به مقاله [۷۳] با همکاری دکتر علی محدث و مقاله [۷٤] با همکاری دکتر علی محدث و آقایان امین غیبی، سینا خاک آبی و امید مقاریان شد.

در فصل ۳ به بررسی دیاگرامهای ورونوی در یکی از مدلهای فضای ۳- بعدی هذلولوی، نیم فضای بالایی هذلولوی، پرداخته و آنرا پیاده سازی نموده ایم. حاصل کار این فصل منجر به دو مقاله [۷٦] و [۷۷] با همکاری دکتر علی محدث، دکتر مرتضی میر محمد رضایی و دکتر ابوالقاسم لاله و آقای منصور داودی منفرد شد.

در فصل ٤ به بررسی دیاگرامهای ورونوی در دایره انعکاسی پرداخته ایم. لازم به توضیح است که انعکاس نسبت به دایره یکی از ایزومتریهای مهم فضاهای ۲- بعدی هذلولوی است و با توجه به خواص جالبی که در انعکاس نسبت به دایره ها وجود دارد ما را بر آن داشت تا به تحقیق در این مورد بپردازیم و حاصل کار منجر به مقاله [۷۵] با همکاری دکتر علی محدث و دکتر ابوالقاسم لاله شد.

در فصل ۵ به بررسی دیاگرامهای ورونوی دایره ها در یکی از مدلهای فضای ۲- بعدی هذلولوی، نیم صفحه بالایی پوآنکاره پرداخته و الگوریتمی ارائه نموده ایم که بطور موضعی رئوس و یالهای دیاگرام را بدست می آورد. حاصل کار این فصل منجر به دو مقاله [۷۸] و [۷۹] با همکاری دکتر علی محدث، دکتر مرتضی میر محمد رضایی شد.

در فصل ٦ به بررسی دیاگرامهای ورونوی مجرد بدون استفاده از شرط تقاطع به تعداد متناهی پرداخته ایم. در بحث دیاگرام ورونوی مجرد، دیاگرام ورونوی بطور کلی بدون در نظر گرفتن شکل سایتها و نوع فضا و متریک استفاده شده، مورد مطالعه قرار می گیرند و در واقع هر یک از دیاگرامهای ورونوی مطرح شده می

تواند مثالی از دیاگرامهای ورونوی مجرد باشد. مطالب عنوان شده در این فصل نتیجه تحقیق اینجانب در دوره فرصت مطالعاتی در دانشگاه بُن کشور آلمان است و حاصل کار منجر به مقاله [۵۷] با همکاری و کمک پروفسور رُلف کلاین و دکتر اِلمار لَنگِتپ شد.

در فصل ۷ به بررسی دیاگرامهای ورونوی در فضاهای فینسلری خاص پرداخته ایم. در این رابطه با استفاده از یک متریک فینسلری خاص به یکی از مدلهای فضای ۲- بعدی هذلولوی، مدل دیسک کلاین رسیدیم و دیاگرام ورونوی را در این مدل بررسی نمودیم. حاصل کار این فصل منجر به دو مقاله [۶۲] و [۶۳] با کمک دکتر ابوالقاسم لاله، دکتر علی محدث و دکتر مرتضی میر محمد رضایی شد.

در فصل ۸ به بیان خلاصه ای از این پایان نامه و پیشنهاداتی برای زمینه های تحقیقاتی آینده پرداخته ایم.

فهرست

فصل ۱ : معرفی دیاگرام ورونوی

۱-۱ دیاگرام ورونوی[1] – مفاهیم مورد نیاز

دیاگرام ورونوی همانند مفهوم پوسته محدب[2] از مهمترین ابزارها در هندسه محاسباتی است. توسط این دیاگرام می توان اطلاعاتی در مورد اینکه " چه چیز نزدیک چیست " را بدست آورد. فرض کنید $P=\{p_1,p_2,...,p_n\}$ مجموعه ای از نقاط در صفحه (یا هر فضای دیگر) باشند که سایت[3] نامیده می شوند. مجموعه نقاط q در صفحه که به سایت p_i از P نزدیکتر هستند را با $V(p_i)$ نمایش داده و ناحیه ورونوی[4] p_i می نامیم. یعنی

$$V(p_i)=\{q \mid d(p_i,q)\prec d(p_j,q) \quad ,\forall\; j\neq i\}$$

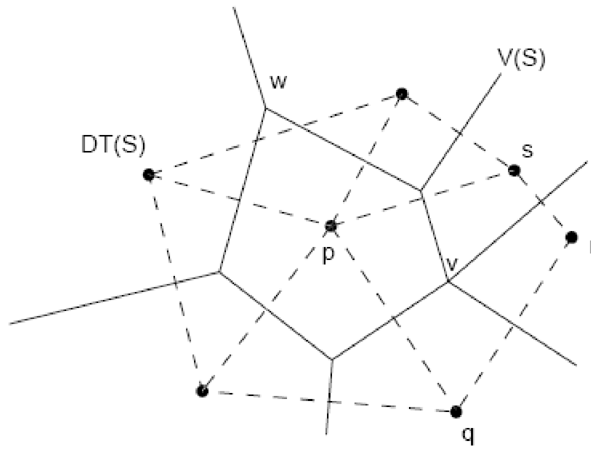
که d متر فضای تعریف شده است.

راه دیگر برای تعریف $V(p_i)$ استفاده از اشتراک نیم صفحه هاست. برای دو سایت داده شده p_i و p_j از مجموعه P، مجموعه نقاطی که بطور اکید به p_i نزدیکترند تا به p_j ، نیم صفحه بازی است که مرز آن عمود منصف دو نقطه p_i و p_j می باشد. این نیم صفحه با $h(p_i,p_j)$ نمایش داده می شود. براحتی دیده می شود که نقطه q درون $V(p_i)$ قرار دارد اگر و تنها اگر q درون همه $h(p_i,p_j)$ ها قرار داشته باشد که $j\neq i$. به عبارت دیگر

$$V(p_i)=\bigcap_{j\neq i} h(p_i,p_j)$$

[1] Voronoi diagram
[2] Convex hull
[3] Site
[4] Voronoi region

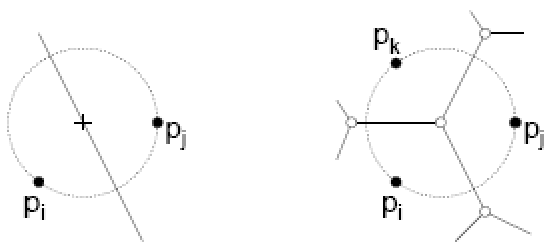
به دلیل اینکه اشتراک نیم صفحه ها یک چندضلعی محدب (احتمالاً بی کران) است، $V(p_i)$ یک چندضلعی محدب (احتمالاً بی کران) می باشد. در پایان، دیاگرام ورونوی P که با $V(P)$ نمایش داده می شود، از اجتماع مرز تمام ناحیه های ورونوی بدست می آید. در واقع این دیاگرام مجموعه ای از پاره خطها است که ممکن است از یک یا دو طرف بی کران باشند. (شکل ۱. ۱ را ملاحظه نمائید، خطوط پر رنگ دیاگرام ورونوی سایتهای نقطه ای شکل می باشند.)



شکل ۱. ۱ : دیاگرام ورونوی و مثلث بندی دلونی.

۱-۱-۱ یالهای ورونوی[۵]

هر یال دیاگرام ورونوی متناظر به دو سایت مثل p_i و p_j است که هر نقطه روی یال مذکور از p_i و p_j به یک فاصله است. بنابراین یک دایره به مرکز نقطه مذکور و گذرنده از p_i و p_j وجود دارد که هیچ سایت دیگری داخلش نیست. (شکل ۱. ۲ را ملاحظه نمائید.)



شکل ۱. ۲ : خواص دیاگرام ورونوی.

۵ Voronoi edges

۱-۱-۲ رئوس ورونوی[٦]

هر رأس ورونوی که از اشتراک سه ناحیه ورونوی $V(p_i)$ ، $V(p_j)$ و $V(p_k)$ بدست می آید از هر سه سایت متناظر به این سلولها به یک فاصله است. بنابراین مرکز دایره ای گذرنده از p_i ، p_j و p_k است که این دایره شامل هیچ سایت دیگری نیست. (شکل ۱. ۲)

۱-۱-۳ درجه[٧]

با فرض حالت کلی[٨] که هیچ چهار سایتی روی یک دایره قرار نداشته باشند، رئوس دیاگرام ورونوی از درجه سه هستند.

۱-۱-٤ پوسته محدب

هر سلول از دیاگرام ورونوی بی کران است اگر و تنها اگر سایت متناظرش روی پوسته محدب مجموعه سایتها باشد (به عبارتی یعنی سایت متناظرش نزدیکترین نقطه به نقطه ای در بینهایت باشد.) بنابراین با داشتن دیاگرام ورونوی، می توان پوسته محدب را در زمان خطی ساخت.

در ادامه به تعریف نوعی دایره می پردازیم که این دایره ارتباط نزدیکی با دیاگرام ورونوی نقاط دارد. برای یک نقطه q از نقاط مجموعه P ، بزرگترین دایره تهی متناظر با q را با $C_P(q)$ نشان می دهیم. این دایره بزرگترین دایره به مرکز q است که شامل هیچ سایت دیگری از P نباشد.

۱-۲ خواص دیاگرام ورونوی

۱) هر ناحیه ورونوی $V(p_i)$ محدب است.
۲) ناحیه ورونوی $V(p_i)$ بیکران است اگر و تنها اگر p_i روی پوسته محدب مجموعه نقاط P قرار گرفته باشد.
۳) اگر v یک رأس ورونوی واقع بر تقاطع نواحی ورونوی $V(p_i)$، $V(p_j)$ و $V(p_k)$ باشد و $C(v)$ بزرگترین دایره تهی متناظر با v باشد، در اینصورت دایره $C(v)$ از سه نقطه p_i، p_j و p_k می گذرد.
٤) درون $C(v)$ شامل هیچ سایتی بجز v نیست.

[٦] Voronoi vertices
[٧] Degree
[٨] General position

۳-۱ مثلث بندی دلونی

فرض کنید مجموعه نقاط P در صفحه داده شده است. هرگاه تمام پاره خط های ممکن بین این نقاط را طوری رسم کنیم که هیچ دو پاره خطی همدیگر را بجز در نقاط انتهایی پاره خط ها قطع نکنند، شکلی حاصل می شود که مثلث بندی[۹] نام دارد. همانطور که مشخص است برای مجموعه نقاط P، تعداد مثلث بندی های ممکن منحصر به فرد نیست. از بین تمام مثلث بندی های ممکن، آن مثلث بندی که در آن هر دایره گذرنده از هر سه رأس مثلث شامل هیچ نقطه دیگری از P نباشد، مثلث بندی دلونی[۱۰] نام دارد.

مثلث بندی ورونوی از نظر چاق بودن مثلث ها یک مثلث بندی بهینه است. این خصوصیت مهم باعث شده است که کاربردهای فراوان این نوع مثلث بندی مورد توجه قرار گیرد. در این بخش به رابطه نزدیک بین مثلث بندی دلونی و دیاگرام ورونوی خواهیم پرداخت. به این ترتیب اهمیت دیاگرام ورونوی و کاربردهای فراوان آن مشخص تر خواهد شد. مثلث بندی دلونی مربوط به مجموعه نقاط P در صفحه را با $DT(P)$ نمایش می دهیم.

اگر پس از رسم دیاگرام ورونوی تمام سایت هایی را که ناحیه آنها با هم مجاورند به هم وصل کنیم در این صورت برای مجموعه P یک مثلث بندی بدست می آید که می توان اثبات کرد که از نظر چاق بودن بهینه است و به این ترتیب همان مثلث بندی دلونی بدست می آید. (شکل ۱. ۱ را ملاحظه نمایید، خطوط خط چین مثلث بندی دلونی سایت های نقطه ای شکل می باشند)

در ادامه این بخش به ارائه خلاصه ای از خواص مثلث بندی دلونی و رابطه اش با دیاگرام ورونوی می پردازیم. در نکات زیر $DT(P)$ مثلث بندی دلونی و $V(P)$ دیاگرام ورونوی متناظر با مجموعه نقاط P را نشان می دهد :

۱) $DT(P)$ دوگان $V(P)$ است.

۲) اگر هیچ چهار نقطه ای از P روی یک دایره نباشند در این صورت $DT(P)$ یک مثلث بندی است و هر وجه آن یک مثلث خواهد بود. هر وجه $DT(P)$ یک مثلث دلونی نامیده می شود.

۳) هر وجه (مثلث) از $DT(P)$ متناظر با یک رأس از $V(P)$ است.

٤) هر یال $DT(P)$ متناظر با یک یال $V(P)$ است.

٥) هر رأس $DT(P)$ متناظر با یک ناحیه $V(P)$ است.

٦) کران بیرونی $DT(P)$ همان پوسته محدب P است.

۷) درون هر مثلث از $DT(P)$ هیچ سایت دیگری قرار ندارد.

۸) اگر v یک رأس $V(P)$ باشد، $C(v)$ کوچکترین دایره محیطی برای مثلث دلونی متناظر یا رأس ۷ است.

---
[۹] Triangulation
[۱۰] Delaunay triangulation

۹) اگر p_j نزدیک ترین سایت به p_i باشد در این صورت یال $p_i p_j$ یک یال از $DT(P)$ است.

۱۰) اگر چند دایره مختلف گذرنده از p_i و p_j موجود باشند که شامل هیچ سایت دیگری نباشند آنگاه $p_i p_j$ یک یال $DT(P)$ خواهد بود. عکس این موضوع نیز صحیح است یعنی برای هر یال دلونی چندین دایره تهی وجود دارد که از دو سر یال عبور می کنند.

۱-٤ ترسیم دیاگرام ورونوی

الگوریتمهای متفاوتی برای ترسیم این دیاگرام وجود دارد که هر کدام از آنها جالب توجه و مفید است و بسته به چگونگی فضا هر کدام در جایی کارآیی بیشتری دارند. در زیر به طور مختصر به آنها اشاره می نمائیم.

۱-٤-۱ اشتراک نیم صفحه ها

از جمله الگوریتمهای ساده برای ترسیم دیاگرام ورونوی این الگوریتم است که در آن هر $V(p_i)$ از اشتراک n-۱ نیم صفحه $h(p_i, p_j)$ که $j \neq i$، بدست می آید و نهایتاً اجتماع آنها یک افراز بندی از فضا را می دهد که همان دیاگرام مورد نظر است. زمان اجرای این الگوریتم در حالتی که تعداد سایتها n باشد $O(n^2 \log n)$ است.

۱-٤-۲ افزایشی

یک روش برای یافتن دیاگرام ورونوی توسط گرین[۱۱] و سیبسون[۱۲] ارائه شده که به روش افزایشی[۱۳] معروف است. در این روش همانطور که از اسمش پیداست در هر مرحله یک سایت به دیاگرام ورونوی قبلی اضافه شده و دیاگرام جدید را رسم می گردد.

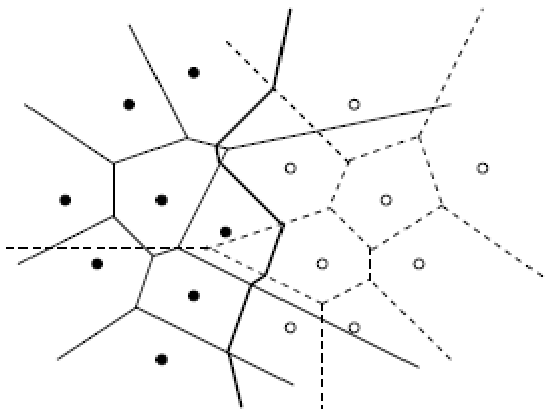
فرآیند افزودن یک سایت جدید را می توان با استفاده از دوگان دیاگرام ورونوی (مثلث بندی دلونی) توصیف کرد. مثلث بندی دلونی $DT_i = DT(\{p_1, p_2, ... p_i\})$ با افزودن سایت p_i به مثلث بندی دلونی DT_{i-1} و بروز کردن مثلث بندی دلونی بدست می آید.

---
[۱۱] Green
[۱۲] Sibson
[۱۳] Incremental

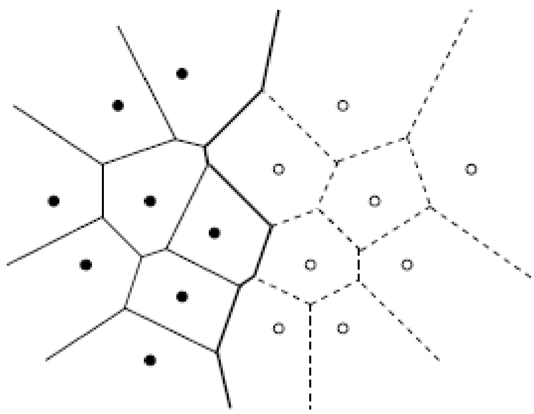
۳-٤-۱ تقسیم و غلبه[١٤]

با ظهور هندسه محاسباتی الگوریتمی پیچیده تر ولی بهتر با زمان $O(n\log n)$ توسط شاموس[١٥] و هوی[١٦] ارائه شد که بر اساس روش تقسیم و حل است. در این روش ابتدا مجموعه سایتهای P را به دو زیرمجموعه P_L و P_R افراز کرده که تقریباً دارای یک اندازه هستند و برای هر زیرمجموعه بطور جداگانه به روش بازگشتی دیاگرام ورونوی را رسم می نمائیم و در نهایت با ادغام دو دیاگرام ورونوی $V(P_L)$ و $V(P_R)$، دیاگرام ورونوی P را بدست می آوریم.

در شکل ۳.۱ نحوه ادغام دو دیاگرام ورونوی چپ و راست را می بینیم.



Left/Right Diagrams and Contour



Final Voronoi Diagram

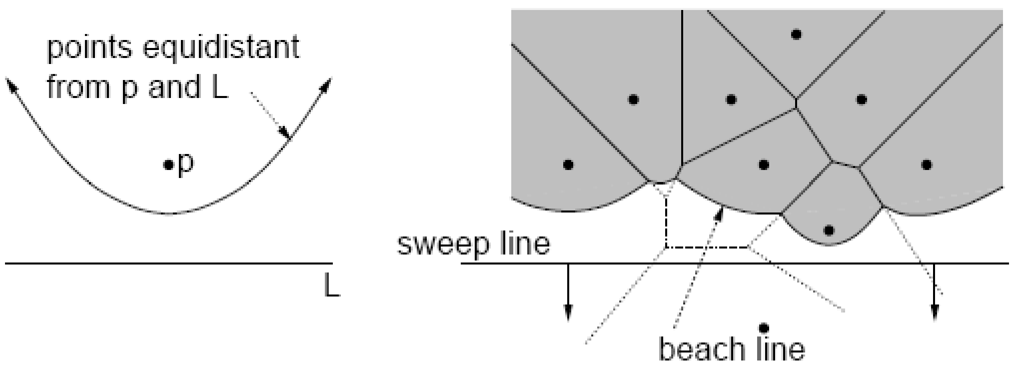
شکل ۳.۱ : روش تقسیم و حل برای رسم دیاگرام ورونوی.

---

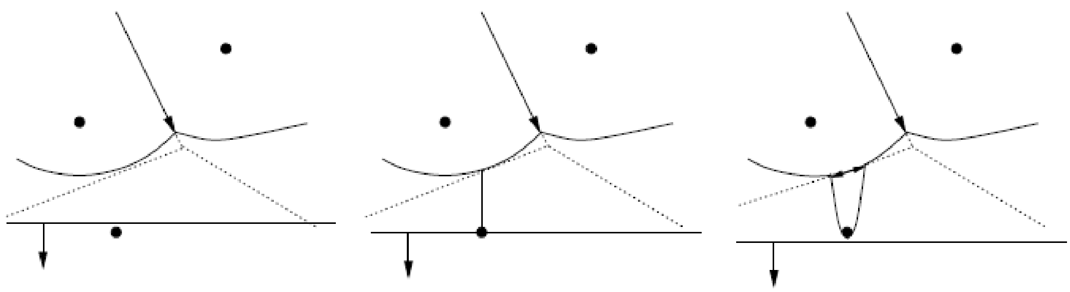
[١٤] Divide-and-Conquer
[١٥] Shamos
[١٦] Hoey

۱-٤-٤ روش فرچون (جارو کردن صفحه)[۱۷]

این روش که یکی از سریعترین روشهای رسم دیاگرام ورونوی است، توسط فرچون[۱۸] ارائه شد و در زمان $O(n\log n)$ اجرا می شود (شکل ۱. ٤ را ملاحظه نمائید). در این روش از یک طرف فضا که در اینجا فرض بر این است که صفحه باشد، شروع کرده و با خطی که خط جاروب[۱۹] نام دارد صفحه را جاروب می کنیم و پس از گذشتن از هر سایت یک خم که مکان هندسی نقاطی است که از سایت مذکور و خط جاروب به یک فاصله است، رسم می نمائیم و آن چیزی نیست جز سهمی که هر چه خط جاروب به سایت مذکور نزدیکتر باشد سهمی لاغرتر است. برای هر سایتی که خط جاروب از آن رد می شود یک چنین سهمیی تشکیل می شود و اجتماع سهمی ها خط ساحلی[۲۰] نام دارد (شکل ۱. ٥ را ملاحظه نمائید). در واقع طی روندی با حرکت خط جاروب در صفحه، خط ساحلی سبب رسم دیاگرام ورونوی می شود.



شکل ۱. ٤: تنها آن قسمتی از دیاگرام که بالای خط جاروب است رسم شده است.



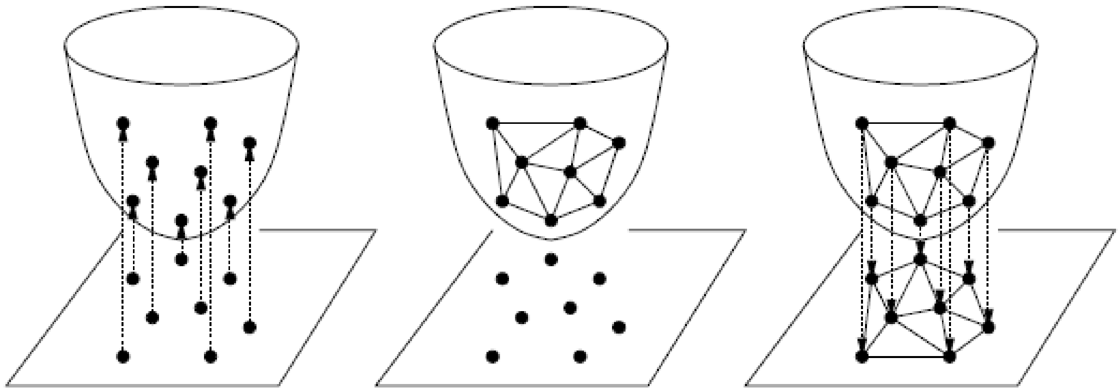
شکل ۱. ٥: مراحل حرکت خط جاروب در صفحه.

---

[۱۷] Fortune's Plane Sweep
[۱۸] Fortune
[۱۹] Sweep line
[۲۰] Beach line

۱-٤-٥ تقلیل به پوسته محدب[۲۱]

روش دیگری نیز وجود دارد که در آن ابتدا مثلث بندی دلونی محاسبه می شود و بعد در زمان خطی دوگان آن که همان دیاگرام ورونوی است بدست می آید. این روش بنام تقلیل به پوسته محدب نامگذاری شده که به این نحو است که برای محاسبه مثلث بندی دلونی n نقطه در فضای d – بعدی، پوسته محدب n نقطه را در فضای $d+1$ – بعدی بدست می آوریم وپس از تصویر نمودن آن در فضای d – بعدی اولیه و دوگان سازی به دیاگرام ورونوی می رسیم . (شکل ۱. ٦ را ملاحظه نمائید.)



شکل ۱. ٦: پوسته محدب و مثلث بندی دلونی

۱-٥ برخی از کاربردهای دیاگرام ورونوی

دیاگرام ورونوی کاربردهای مهمی در زمینه های مختلف علوم دارد که از جمله آنها موارد معروف زیر است:

۱-٥-۱ برجهای مشاهده آتش[۲۲]

یک جنگل بزرگ شامل تعدادی از این برجها را در نظر بگیرید. هر جنگلبان مسئول خاموش کردن نزدیکترین برج است. مجموعه تمام درختهایی که یک جنگلبان مسئول آنهاست یک چندضلعی ورونوی وابسته به برج جنگلبان مذکور را تشکیل می دهند. پس هر جنگلبان مسئول یک ناحیه خاصی است و دیاگرام ورونوی مرز این نواحی را مشخص می نماید.

[۲۱] Reduction to Convex hull
[۲۲] Fire Observation Towers

۱-۵-۲ برجهای آتشین[۲۳]

حالت عکس مسئله قبل را در نظر بگیرید یعنی حالتی که تمام جنگلبانان برجهایشان را روشن کرده اند و جنگل بطور یکنواخت می سوزد. در اینصورت به مرکز هر برج، آتش بصورت دایره ای منتشر میگردد و در نقاط خاصی (نقاطی که درختانی در آن قبلاً سوخته اند یا در حال سوختن هستند) آتش خاموش میگردد. این نقاط، نقاطی هستند که از دو یا تعداد بیشتری از برجها به یک فاصله اند و دقیقاً همان نقاط دیاگرام ورونوی هستند.

۱-۵-۳ جستجوی نزدیکترین همسایه[۲٤]

یکی از مهمترین مسئله ها در هندسه محاسباتی حل این مسئله است و به این ترتیب است که برای مجموعه نقاط داده شده P و نقطه جستجوی q ، نزدیکترین نقطه P به q را بیابیم. نوع دیگر بیان این مسئله پیدا کردن نزدیکترین همسایه به هر نقطه در یک مجموعه داده شده است. این مسئله کاربردهایی در زمینه های متعددی از جمله بیولوژی، بوم شناسی[۲۵] ، جغرافی و فیزیک دارد.

۱-۵-٤ مثلث بندی چاق[۲٦]

یک مثلث بندی از مجموعه نقاط P ، مجموعه ای از پاره خطهاست که نقاط انتهائی آنها از اعضای P اند و هر دو پاره خط همدیگر را تنها در نقاط انتهائی قطع می کنند، و به این ترتیب پوسته محدب مجموعه P به مثلثهایی تقسیم می گردد. معمولاً در مثلث بندی سعی بر آن است که زاویه های کوچک تا جایی که امکان دارد ماکزیمم شوند ویا اصطلاحاً مثلثها تا حد ممکن چاق باشند و این دقیقاً همان مثلث بندی دلونی مجموعه P است که چیزی نیست جز دوگان دیاگرام ورونوی P.

۱-۵-۵ قابلیت مکان یابی[۲۷]

می خواهیم یک ویدئو کلوپ جدید باز کنیم. بایستی این کار در مکانی که تا حد ممکن از تمام ویدئو کلوپهای موجود دور است انجام شود. پس کجا بایستی قرار بگیرد؟ رئوس دیاگرام ورونوی نقاطی هستند که بطور موضعی بیشترین فاصله را تا نقاط دیگر مجموعه دارند.

---
[۲۳] Towers on Fire
[۲٤] Nearest neighbor queries
[۲۵] Ecology
[۲٦] Fat Triangulation
[۲۷] Facility Location

۱-۵-۶ درون یابی و همسایه ها[۲۸]

یک مجموعه مقادیر برای ارتفاع برخی نواحی هندسی داده شده است. هر نقطه دارای مختصات (x, y) و یک مقداری که معرف ارتفاع است می باشد. می خواهیم ارتفاع برخی از نقاط جستجو که جزء نقاط مذکور نیستند را درون یابی نمائیم. برای این کار از مقادیر ارتفاع نقاط همسایه استفاده مینمائیم. منظور از همسایه، همسایه های ورونوی نقطه جستجو است.

۱-۵-۷ طراحی مسیر (Path Planning)

ناحیه ای را در نظر بگیرید که قرار است رباتی در آن حرکت نماید و می خواهیم ربات با موانع موجود در ناحیه کمترین برخورد را داشته باشد. بنابراین بهتر است ربات تا حد ممکن در حرکتش از موانع فاصله بگیرد. اگر مسئله را به فضای دو بعدی محدود کرده و ربات را دایره فرض کنیم، در اینصورت مسیر حرکت ربات روی دیاگرام ورونوی موانع خواهد بود. اگر موانع نقطه ای شکل باشند، دیاگرام ورونوی معمولی است و اگر موانع چندضلعی یا اشکال دیگر باشند، آنگاه دیاگرام ورونوی تعمیم یافته داریم.

۱-۵-۸ کریستال شناسی[۲۹]

فرض کنید تعدادی دانه کریستال بطور یکنواخت و با سرعت ثابت در حال رشد هستند. نهایتاً چه اتفاقی می افتد؟ واضح است که هر دانه آنقدر رشد می کند تا تبدیل به چندضلعی ورونویی شود که چندضلعی های ورونویی که در همسایگی اش قرار دارند را در طول دیاگرام ورونوی قطع نماید. دیاگرام ورونوی در رشد همزمان کریستالها از قدیم کاربردهای فراوانی داشته است.

برای اطلاعات بیشتر در این زمینه به مرجع [۲۰] مراجعه نمائید.

---

۲۸ Neighbors and Interpolation

۲۹ Crystallography