بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تربیت معلم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

همبافتهای کوزین و توسیعهای یکدست از حلقه‌ها

استادراهنما:
جناب آقای دکتر حسین ذاکری

تدوین:
سید محمد ضیائی

شهریور ماه ۱۳۷۸

بسمه تعالی

تاریخ ____________

شماره ____________

پیوست ____________

واحد ____________

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

دانشگاه تربیت معلم

صورتجلسهٔ دفاع از پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان نامه خانم/آقای سیدمحمدضیا یی دانشجوی دورهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی شاخهٔ محض در روز شنبه مورخه ۷۸/۶/۲۷ در مؤسسه‌ی ریاضیات تشکیل گردید و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون نوزده تمام (۱۹/-) می‌باشد.

- ۱- عالی ☑
- ۲- بسیار خوب ☐
- ۳- خوب ☐
- ۴- قابل قبول ☐
- ۵- غیر قابل قبول ☐

استاد راهنما	ممتحنین خارجی	ممتحنین داخلی
دکترحسین ذاکری	۱- دکترسیامک یاسمی	۱- دکترمحمدتقی دیبایی
	۲-	۲-

اسماعیل بابلیان

رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و

مهندسی کامپیوتر

تقدیر و تشکر

اکنون که به فضل الهی موفق به فراهم آوردن پایان‌نامه‌ام گردیده‌ام برخود لازم می‌دانم که از استاد گرامی جناب آقای دکتر حسین ذاکری به خاطر زحمات و راهنماییهای بی‌شائبه‌اشان تشکر کنم. همچنین از اساتید محترم جناب آقای دکتر سیامک یاسمی و دکتر محمدتقی دیبایی که داوری پایان‌نامه به عهدهٔ ایشان بوده قدردانی می‌کنم.

از خانم صمدیان که زحمت تایپ این پایان‌نامه را تقبل نمودند کمال تشکر را داشته و از خانمها کارگر و گلزاری و همچنین آقای سبزواری بخاطر مساعدتهای بی‌دریغ در امور اداری و کتابخانه در دوران تحصیلم در مؤسسه‌ی ریاضیات سپاسگزارم.

سیدمحمد ضیایی

شهریور ماه ۱۳۷۸

مقدمه

همبافت کوزین اولین بار در سال ۱۹۶۹ توسط پروفسور شارپ در [9] معرفی شد. خواص این همبافت بسرعت توسط خود وی و دیگران مورد مطالعه، بررسی و تحقیق بیشتری قرار گرفت و مقالاتی از قبیل [3]، [10] و ... در این زمینه منتشر شد. یکی از مقالاتی که سالهای اخیر در این زمینه منتشر شده عبارت است از

Cousin complex and flat ring extensions

این مقاله که توسط انریکه پتزل در سال ۱۹۹۷ در Communications in algebra به چاپ رسیده در این پایان‌نامه به طور کامل مورد بررسی قرار گرفته است.

این پایان‌نامه مشتمل بر چهار فصل است. در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز آورده شده است. در فصل دوم ابتدا به معرفی همبافت کوزین و برخی از ویژگیهای مقدماتی آن می‌پردازیم که اکثر مطالب آن از [9] گرفته شده است. در انتهای فصل دوم قضیهٔ ۱۳.۲ را که یکی از نتایج مقالهٔ اصلی است ثابت می‌کنیم. در این قضیه فرض می‌کنیم A حلقه‌ای جابجایی، یکدار و نوتری بوده، L و K، Aـ مدول باشند، و بعلاوه فرض می‌کنیم $f : L \longrightarrow K$ یک Aـ ایزومورفیسم باشد، نشان می‌دهیم ایزومورفیسمی القایی میان همبافتهای کوزین آنها مانند $\theta_A(f) : C_A(L)^* \longrightarrow C_A(K)^*$ با ویژگیهای خاص خود موجود است. فصل سوم را به همبافتهای کوزین و توسیعهای یکدست از حلقه‌ها اختصاص داده‌ایم. در این فصل فرض کرده‌ایم $\varphi : A \longrightarrow B$ هومورفیسم حلقه‌ای یکدستی بین حلقه‌های جابجایی، یکدار و نوتری باشد و نشان داده‌ایم اگر M یک Aـ مدول ناصفر باشد (با توجه به اینکه $M \otimes_A B$ را می‌توان به عنوان Aـ مدول یا Bـ مدول در نظر گرفت)، همبافتهای کوزین $C_A(M \otimes_A B)^*$ و $C_B(M \otimes_A B)^*$ را می‌توان به عنوان همبافتهایی از Aـ مدولها یا Bـ مدولها در نظر گرفت. سپس آنها را به عنوان همبافتهایی از Bـمدولها و Bـ هومورفیسم‌ها

در نظر گرفته و به تعریف زنجیری از نگاشتها مانند $\Phi_A^B(M) : C_A(M \otimes_A B)^* \longrightarrow C_B(M \otimes B)^*$ پرداخته و به‌این نتیجه می‌رسیم که در شرایطی خاص می‌توانیم $C_A(M \otimes_A B)^*$ را به عنوان زیرهمبافتی از $C_B(M \otimes B)^*$ در نظر بگیریم. در واقع نشان داده‌ایم شرط کافی برای اینکه $\Phi_A^B(M)$ یک به یک باشد این است که تمامی فیبرهای وابستهٔ φ در اولین شرط S_1 صدق کنند. در این حالت یک همبافت خارج‌قسمتی که آن را با $Q_A^B(M)^*$ نمایش می‌دهیم بدست می‌آید. در فصل چهارم نشان داده‌ایم همبافت خارج‌قسمتی بدست آمده دقیق است اگر و فقط اگر فیبرهای معینی از φ، کوهن ـ مکالی باشند. برای اثبات مطلب فوق، بنابر قضیه‌ای از [14]، که در فصل سوم ثابت شده، جملات همبافت کوزین را به عنوان جمع مستقیمی از کوهمولوژی مدولهای موضعی مشخصی در نظر گرفتیم و با استفاده از ویژگیهای کوهمولوژی موضعی شرایط لازم و کافی برای دقیق بودن $Q_A^B(M)^*$ را بدست آورده‌ایم.

فهرست مطالب

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی مورد نیاز

در سراسر پایان‌نامه فرض می‌کنیم R و R' حلقه‌های جابجایی و یکدار بوده و A و B حلقه‌هایی جابجایی، یکدار و نوتری هستند و همواره عضو یکهٔ حلقه مخالف صفر فرض شده است.

۱.۱ **تعریف.** فرض می‌کنیم M یک Rـ مدول باشد. در این صورت

$$\mathrm{Supp}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}.$$

۲.۱ **قضیه.** فرض می‌کنیم M یک Rـ مدول باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(آ) $M = 0$؛

(ب) به ازای هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$، $M_{\mathfrak{p}} = 0$؛

(پ) به ازای هر $\mathfrak{m} \in \max(R)$، $M_{\mathfrak{m}} = 0$.

رجوع کنید به [1,3.8].

۳.۱ تعریف. فرض می‌کنیم M یک Rـ مدول باشد. فرض می‌کنیم $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ و بعلاوه $M \ni x \neq \circ$ یافت شود که

$$\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(x) = \{r \in R | rx = \circ\}.$$

در این صورت $\mathfrak{p}$ را یک **ایده‌آل وابسته به** M می‌نامیم. مجموعهٔ تمام ایده‌آلهای وابسته به M را با $\operatorname{Ass}_R(M)$ نمایش می‌دهیم.

۴.۱ قضیه. هرگاه M یک Aـ مدول باشد، آنگاه

$\operatorname{Ass}_A(M) = \phi$ اگر و فقط اگر $M = \circ$.

اثبات. فرض می‌کنیم $M \neq \circ$ و نشان می‌دهیم $\operatorname{Ass}_A(M) \neq \phi$. چون $M \neq \circ$ پس $\mathcal{A} = \{\operatorname{Ann}(x) | \circ \neq x \in M\}$ ناتهی است. چون A نوتری است پس $\mathcal{A}$ با نسبت $(\subseteq)$ دارای حداقل یک عضو ماکسیمال مانند $\mathfrak{p}$ است و بوضوح $\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول است. لذا $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_A(M)$. واضح است که اگر $M = \circ$، آنگاه $\operatorname{Ass}_A(M) = \phi$.

۵.۱ قضیه. فرض کنید M یک Aـ مدول با تولید متناهی باشد. در این صورت $\operatorname{Ass}_A(M)$ مجموعه‌ای متناهی است.

رجوع کنید به [5,5.6].

۶.۱ قضیه. فرض می‌کنیم M یک Aـ مدول با تولید متناهی باشد. در این صورت

(آ) $V(\operatorname{Ann}(M)) = \operatorname{Supp}(M)$؛

(ب) مجموعهٔ عناصر مینیمال $\operatorname{Ass}(M)$ برابر است با مجموعهٔ عناصر مینیمال $\operatorname{Supp}(M)$.

رجوع کنید به [1, CH3-Exe19] و [5, Theo 6.5 (iii)].

۷.۱ قضیه. فرض می‌کنیم N و P زیرمدولهایی از Rـ مدول M بوده، $x \in R$ و $\mathfrak{b}$ ایده‌آلی از R باشد. بعلاوه فرض می‌کنیم X یک Rـ مدول با تولید متناهی بوده و S یک زیرمجموعهٔ بستهٔ ضربی از R باشد. در این صورت

(آ) $S^{-1}(xM) = (\frac{x}{1})S^{-1}M$؛

(ب) $S^{-1}(\mathfrak{b}M) = (S^{-1}\mathfrak{b})(S^{-1}M)$؛

(پ) $S^{-1}(N+P) = S^{-1}N + S^{-1}P$؛

(ت) $S^{-1}(N \cap P) = S^{-1}N \cap S^{-1}P$؛

(ث) $S^{-1}(\frac{M}{N}) \simeq \frac{S^{-1}M}{S^{-1}N}$؛

(ج) $S^{-1}(\mathrm{Ann}_R(X)) = \mathrm{Ann}_{S^{-1}R}(S^{-1}X)$؛

(د) اگر P با تولید متناهی باشد، آنگاه $S^{-1}(N :_R \mathfrak{p}) = S^{-1}N :_{S^{-1}R} S^{-1}R$.

رجوع کنید به [1, 3.4, 3.14, 3.15].

۸.۱ قضیه. فرض می‌کنیم $\mathfrak{q}$ ایده‌آلی از A بوده و $\mathfrak{m}$ یک ایده‌آل ماکسیمال A باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند:

(آ) $n \in \mathbb{N}$ای هست به طوری که $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{m}$؛

(ب) $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل $\mathfrak{m}$ـ اولیه است؛

(پ) $r(\mathfrak{q}) = \mathfrak{m}$.

رجوع کنید به [1, 4.2].

۹.۱ قضیه. فرض می‌کنیم S یک زیرمجموعهٔ بستهٔ ضربی از R باشد و $\varphi : R \longrightarrow S^{-1}R$ هومورفیسم طبیعی باشد. در این صورت

(آ) به ازای هر ایده‌آل $\mathfrak{b}$ از R، $S^{-1}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}^e$. بعلاوه $\mathfrak{b}^e = S^{-1}R$ اگر و فقط اگر $\mathfrak{b} \cap S \neq \phi$؛

(ب) هر ایده‌آل از $S^{-1}R$ یک ایده‌آل انبساط یافته است؛

(پ) اگر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ و $\mathfrak{p} \cap S = \phi$ آنگاه $\mathfrak{p}^e = S^{-1}\mathfrak{p}$ یک ایده‌آل اول $S^{-1}R$ است و $\mathfrak{p}^{ec} = \mathfrak{p}$.
بعلاوه اگر $\frac{a}{s} \in S^{-1}\mathfrak{p}$ ، آنگاه $a \in \mathfrak{p}$؛

(ت) تناظر یک به یکی مانند $\psi : \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) | \mathfrak{p} \cap S = \phi\} \longrightarrow \mathrm{Spec}(S^{-1}R)$ موجود است که به ازای هر ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$ از R داریم $\psi(\mathfrak{p}) = S^{-1}\mathfrak{p}$. بعلاوه این تناظر حافظ جزئیت است.

رجوع کنید به [16, 5.32].

۱۰.۱ **قضیه.** فرض می‌کنیم S یک زیرمجموعهٔ بستهٔ ضربی از R بوده و $\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل $\mathfrak{p}$ـ اولیه از R باشد. در این صورت

(آ) اگر $S \cap \mathfrak{p} \neq \phi$، آنگاه $S^{-1}\mathfrak{q} = S^{-1}R$؛

(ب) اگر $S \cap \mathfrak{p} = \phi$، آنگاه $S^{-1}\mathfrak{q}$ یک ایده‌آل $S^{-1}\mathfrak{p}$ـ اولیه از $S^{-1}R$ است و بعلاوه از $\frac{a}{s} \in S^{-1}\mathfrak{q}$ نتیجه می‌شود که $a \in \mathfrak{q}$.

(پ) تناظر یک به یکی مانند

$$\psi : \{\mathfrak{q} | r(\mathfrak{q}) \cap S = \phi, \text{ و } \text{ایده‌آل اولیه } R \text{ است } \mathfrak{q}\} \longrightarrow \{\mathfrak{q}_\circ | \text{ایده‌آل اولیهٔ } S^{-1}R \text{ است } \mathfrak{q}_\circ\}$$

موجود است که $\psi(\mathfrak{q}) = S^{-1}\mathfrak{q}$.

رجوع کنید به [16, 5.37].

۱۱.۱ **قضیه.** هرگاه M و N، Rـ مدول بوده و $\mathfrak{a}$ و $\mathfrak{b}$ ایده‌آلهایی از R باشند، آنگاه

(آ) $R \otimes M \simeq M \otimes R \simeq M$؛

(ب) $M \otimes N \simeq N \otimes M$؛

(پ) $\frac{M}{\mathfrak{a}M} \simeq \frac{R}{\mathfrak{a}} \otimes M$؛

(ت) $\frac{R}{\mathfrak{a}} \otimes \frac{R}{\mathfrak{b}} \simeq \frac{R}{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$.

رجوع کنید به [1, 2.14, ch2, Exe2].

۱۲.۱ قضیه. هرگاه M یک Rـ مدول بوده و S یک زیرمجموعهٔ بستهٔ ضربی از R باشد، آنگاه

$$S^{-1}M \simeq M \otimes_R S^{-1}R.$$

رجوع کنید به [1,3.5].

۱۳.۱ قضیه. اگر $(R, \mathfrak{m})$ حلقه‌ای موضعی بوده و M یک Rـ مدول باشد، آنگاه $M \simeq M_{\mathfrak{m}}$.

۱۴.۱ قضیه. فرض کنید $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اولی از حلقه R باشد و M یک $R_{\mathfrak{p}}$ ـ مدول باشد. در این صورت $M \simeq M_{\mathfrak{p}}$.

۱۵.۱ قضیه. اگر M و N، Rـ مدول بوده و $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$، آنگاه

$$M_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \simeq (M \otimes_R N)_{\mathfrak{p}}.$$

رجوع کنید به [1, 3.7].

۱۶.۱ قضیه. فرض کنید S یک زیرمجموعهٔ بستهٔ ضربی از R بوده و $g : R \longrightarrow R'$ یک هomomorfیسم حلقه‌ای باشد به طوری که

(آ) به ازای هر $s \in S$، $g(s)$ در R' یکال باشد؛

(ب) به ازای هر $a \in \ker g$، $s \in S$ای موجود باشد به قسمی که $sa = 0$؛

(پ) هر عضو R' به شکل $g(a)g(s)^{-1}$ نوشته شود که در آن $a \in R$ و $s \in S$.

در این صورت Rـ ایزومورفیسم یکتایی مانند $h : S^{-1}R \longrightarrow R'$ موجود است که $h \circ f = g$، در اینجا $f : R \longrightarrow S^{-1}R$ هومورفیسم طبیعی است.

رجوع کنید به [16, 5.15].

۱۷.۱ تعریف. بعد حلقه R را با $\dim R$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از

$\dim R = \sup\{0 \leq n \in \mathbb{Z} |$ زنجیری از ایده‌آلهای اول R مانند $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$ موجود است$\}$

در صورتی که sup موجود نباشد تعریف می‌کنیم $\dim R = \infty$.

۱۸.۱ تعریف. بعد Rـ مدول M را با $\dim_R M$ نمایش می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم

$\dim_R M = \sup\{0 \leq n \in \mathbb{Z} |$ زنجیری از عناصر $\mathrm{Supp}(M)$ مانند $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n$ موجود باشد$\}$

در صورتی که sup موجود نباشد تعریف می‌کنیم $\dim_R M = \infty$.

۱۹.۱ تعریف. هرگاه M یک Aـ مدول بوده و $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$، آنگاه M ـ ارتفاع $\mathfrak{p}$ را با $\mathrm{ht}_M \mathfrak{p}$ نمایش می‌دهیم و بنابر تعریف

$\mathrm{ht}_M \mathfrak{p} = \sup\{0 \leq n \in \mathbb{Z} |$ زنجیری از عناصر $\mathrm{Supp}(M)$ مانند $\mathfrak{p}_0 \subset \mathfrak{p}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ موجود باشد$\}$

(چون $\mathrm{ht}_M \mathfrak{p} \leq \mathrm{ht}\, \mathfrak{p}$ و A نوتری است پس $\mathrm{ht}_M \mathfrak{p} \leq \mathrm{ht}\, \mathfrak{p} < \infty$. همچنین واضح است که $\dim_{A_\mathfrak{p}} M_\mathfrak{p} = \mathrm{ht}_M \mathfrak{p}$.)

۲۰.۱ قضیه و تعریف. فرض کنیم $\mathfrak{b}$ یک ایده‌آل تجزیه شدنی از A باشد. همچنین فرض کنیم $\mathfrak{b} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{q}_i$ یک تجزیهٔ اولیه ـ مینیمال برای $\mathfrak{b}$ باشد و به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $r(\mathfrak{q}_i) = \mathfrak{p}_i$. در

این صورت

$$\{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n\} = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A) | \quad \mathfrak{p} = r(\mathfrak{b}:x) \quad \text{موجود است و } x \in R\}$$

بنابراین $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n$ منحصر بفرد توسط $\mathfrak{b}$ تعیین می‌شود و به انتخاب تجزیهٔ اولیه ـ مینیمال $\mathfrak{b}$ بستگی ندارد. لذا هرکدام از $\mathfrak{p}_i$ها ($1 \leq i \leq n$) را یک **ایده‌آل اول وابسته به** $\mathfrak{b}$ می‌نامیم و تعریف می‌کنیم

$$\mathrm{ass}(\mathfrak{b}) = \{\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_n\}.$$

به وضوح داریم

$$\mathrm{ass}_A(\mathfrak{b}) = \mathrm{Ass}_A(\frac{A}{\mathfrak{b}}).$$

۲۱.۱ گزاره. فرض کنید M یک Aـ مدول باشد. در این صورت

$$\mathrm{Ass}(M) = \bigcup_{\substack{m\in M\\ m\neq 0}} \mathrm{ass}(0:m)$$

رجوع کنید به [16, Exe 9.44].

۲۲.۱ تعریف. هرگاه F یک دستگاه مجرد از نگاشت‌ها باشد و $\mathcal{A}$ گردایه‌ای از اشیاء باشد به طوری که بین $\mathcal{A}$ و عناصر همانی F تناظری یک به یک برقرار شود، آنگاه گردایهٔ F همراه با گردایهٔ $\mathcal{A}$ را یک **کاتگوری** می‌نامیم و با علامت $\mathscr{C}$ نمایش می‌دهیم.

۲۳.۱ تعریف. فرض می‌کنیم $\mathscr{C}$ و $\mathscr{C}'$ دوکاتگوری بوده و $T:\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}'$ نگاشتی باشد که به ازای هر شیی C از $\mathscr{C}$، $T(C)$ یک شیی از $\mathscr{C}'$ باشد، همچنین برای هر $f:C_1 \longrightarrow C_2$ مورفیسم $T(f):T(C_1) \longrightarrow T(C_2)$ نگاشتی مجرد از $\mathscr{C}'$ است. در این صورت T را یک **فانکتور هموردا** می‌گوییم اگر گزاره‌های زیر برقرار باشد:

(آ) برای هر همانی مانند i در $\mathscr{C}$، $T(i)$ همانی در $\mathscr{C}'$ باشد؛

(ب) برای هر f,g از $\mathscr{C}$ اگر ترکیب fg تعریف شده باشد، آنگاه $T(fg)=T(f)T(g)$.

۲۴.۱ تعریف. فرض می‌کنیم $\{X^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ خانواده‌ای از Rـ مدولها و $\{f^i|f^i : X^i \longrightarrow X^{i+1}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ یک خانواده از Rـ همومورفیسم‌ها باشد به طوری که $f^{i+1}f^i = 0$ به ازای هر $i \in \mathbb{Z}$. در این صورت

$$\ldots \longrightarrow X^{i-1} \xrightarrow{f^{i-1}} X^i \xrightarrow{f^i} X^{i+1} \longrightarrow \ldots$$

را یك همبافت از Rـ مدولها و Rـ همومورفیسم‌ها می‌نامیم و آنرا با X نمایش می‌دهیم. به ازای هر $i \in \mathbb{Z}$، iـامین همولوژی مدول همبافت X را با $H^i(X)$ نمایش می‌دهیم به عبارت دیگر

$$H^i(X) = \frac{\ker f^i}{\operatorname{im} f^{i-1}}.$$

۲۵.۱ تعریف. فرض می‌کنیم $T : \mathscr{C}(R) \longrightarrow \mathscr{C}(R')$ یک فانکتور هموردِ و جمعی باشد، و به ازای هر Rـ مدول M، P_M یک رزولوشن تصویری برای M باشد یعنی همبافت

$$\ldots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

یک همبافت دقیق باشد. حال همبافت زیر را در نظر می‌گیریم

$$\ldots \longrightarrow T(P_2) \longrightarrow T(P_1) \longrightarrow T(P_0) \longrightarrow 0;$$

و تعریف می‌کنیم $L_nT(M) = \frac{\ker T(d_n)}{\operatorname{im} T(d_{n+1})}$. در این صورت اگر $f : M \longrightarrow N$ یک Rـ همومورفیسم باشد، آنگاه تبدیلی از P_M به P_N موجود است که با تقریب هموتوپیک منحصربفرد است. لذا به ازای هر $n \geq 0$ همومورفیسم منحصربفردی مانند

$$L_nT(f) : L_nT(M) \longrightarrow L_nT(N)$$

موجود است. بوضوح L_nT فانکتوری هموردِ و جمعی از $\mathscr{C}(R)$ به $\mathscr{C}(R')$ است که آن را nـ امین فانکتور مشتق شده چپ فانکتور T می‌نامیم.

به گونه‌ای مشابه اگر با انژکتیو رزولوشن‌ها برای Rـ مدول‌ها کار کنیم nـ امین فانکتور مشتق شدهٔ راست T قابل تعریف است که آن را با R^nT نمایش می‌دهیم و فانکتوری هموردِ و جمعی است.