علوم ریاضی
ریاضی کاربردی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش ماتریسی بسل برای حل عددی رده‌ای از معادلات دیفرانسیل_ انتگرال خطی از مرتبه بالا

اساتید راهنما

دکتر جعفر صابری نجفی و دکتر فائزه توتونیان

نگارنده

زهره دولت آبادی

بهمن ۱۳۹۱

بسمه تعالی

دانشگاه فردوسی مشهد

صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان نامه خانم زهره دولت آبادی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی در ساعت ۸ صبح روز ۹۱/۱۱/۱۲ در محل اتاق سمینار دانشکده علوم ریاضی با حضور امضا کنندگان ذیل تشکیل گردید. پس از بررسی های لازم، هیأت داوران پایان نامه نامبرده را با نمره به عدد ۱۸/۷۵ به حروف هجده و هفتاد و پنج صدم و با درجه بسیار خوب مورد تأیید قرار داد / نداد.

عنوان پایان نامه

روش ماتریسی بسل برای حل عددی رده ای از معادلات دیفرانسیل - انتگرال خطی از مرتبه بالا

هیئت داوران | امضا

- **داور رساله: دکتر اصغر کرایه چیان**

  استاد گروه ریاضی کاربردی دانشگاه فردوسی مشهد
- **داور و نماینده تحصیلات تکمیلی: دکتر مرتضی گچ پزان**

  استادیار گروه ریاضی کاربردی دانشگاه فردوسی مشهد
- **استاد راهنما: دکتر جعفر صابری نجفی**

  استاد گروه ریاضی کاربردی دانشگاه فردوسی مشهد
- **استاد راهنما: دکتر فائزه توتونیان**

  استاد گروه ریاضی کاربردی دانشگاه فردوسی مشهد
- **مدیر گروه ریاضی کاربردی: دکتر مرتضی گچ پزان**

  استادیار گروه ریاضی کاربردی دانشگاه فردوسی مشهد

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

می‌گردد. از نقطه نظر تاریخی در سال ۱۹۸۹ یک روش بسط به سری تیلور توسط کانوال[1] و لیو[2] [۱۲]، برای حل معادلات انتگرالی ولترا ارائه گردید. در مرجع [۲] برانر[3] روش‌های عددی را برای معادلات دیفرانسیل تاخیری، معادلات انتگرالی ولترا و معادلات دیفرانسیل_انتگرال مطالعه کرده است. بعلاوه فنون عددی [۱۳] برای حل معادلات خطی دیفرانسیل_انتگرال تفاضلی فردهولم و معادلات دیفرانسیل_انتگرال ولترا نیز به کار برده شده‌اند.

روش ماتریسی ارائه شده توسط کانوال و لیو از آغاز سال ۱۹۹۴ میلادی به وسیله سزر[4] تغییر و توسعه داده شده است. ابتدا سزر روش ماتریسی را به کمک چند جمله‌ای‌های تیلور در سال ۱۹۹۴ برای حل معادلات انتگرالی ولترا [۲۲] و در سال ۱۹۹۶ روش مذکور را برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم [۲۱] به کاربرد. سزر در سال ۲۰۰۰ طی انتشار مقاله‌ای روش هم‌محلی تیلور را برای حل معادلات دیفرانسیل_انتگرال فردهولم خطی مرتبه بالا [۱۶] شرح داد و نتایج حاصل از حل معادلات دیفرانسیل تفاضلی خطی مرتبه بالا را در مقاله [۷]، حل معادلات دیفرانسیل_انتگرال تفاضلی خطی فردهولم در [۲۴] و حل معادلات تفاضلی در [۲۵] در سال ۲۰۰۵ منتشر کرد. در ادامه توسعه کاربرد این روش، سزر همین روش ماتریسی تیلور را برای حل معادلات دیفرانسیلی تفاضلی در سال ۲۰۰۶ [۸] و معادله پانتوگراف[5] با آرگومان‌های خطی در حالت کلی در سال ۲۰۰۷ [۲۳] نیز ارائه داد.

انواع مختلف معادله پانتوگراف با شرایط مختلف [۲۷]، [۲۶] و معادلات دیفرانسیل_انتگرال خطی مرتبه بالا با ضرایب ثابت [۱۴]، نیز از جمله معادلاتی بودند که در سال ۲۰۰۸ با این روش حل شده‌اند. از حسن‌های این روش به روند آسانی که در حل مسأله در پیش می‌گیرد می‌توان اشاره کرد که به همین دلیل روش قابلیت استفاده از انواع چندجمله‌ای‌ها و توابع را دارد. از آن جمله می‌توان کاربرد چندجمله‌ای‌های لژاندر، چبیشف، هرمیت، برنشتاین، لژاندر ترکیبی و غیره را نام برد.

سزر چندجمله‌ای‌های چبیشف را برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه بالا با ضرایب متغیر [۱]، چندجمله‌ای‌های لژاندر را برای حل معادلات دیفرانسیل_انتگرال فردهولم خطی [۳۰]، سری برنشتاین را در حل رده‌ای از معادلات دیفرانسیل_انتگرال خطی با هسته منفرد ضعیف [۱۰] استفاده کرده است. از سال ۲۰۰۹ تا کنون یوزباشی، چندجمله‌ای‌های بسل نوع اوّل را برای حل معادلاتی که در بالا به آنها اشاره شد به کار برده است که به منظور کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه می‌توان به مراجع [۳۳] تا [۳۶] رجوع کرد. چند جمله‌ای‌های بسل که کمتر در روش‌های عددی سراغی از آنها داریم اخیراً توسط یوزباشی برای حل انواع معادلات اثر بخشی و دقت خود را نشان داده‌اند. طبیعت روش بدین‌گونه است که معادلات دیفرانسیل_انتگرال را به یک دستگاه معادلات خطی تبدیل می‌کند که به آسانی قابل حل هستند.

---

[1] Kanwal

[2] Liu

[3] Brunner

[4] Sezer

[5] Pantograph

در این پایان‌نامه یک روش عددی موسوم به **روش ماتریسی بسل** که توسط یوزباشی[1] در مرجع [۳۳] ارائه شده است برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال خطی مرتبه بالا مورد بررسی قرار می‌دهیم. بعلاوه این روش را برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل-انتگرال نیز توسعه خواهیم داد.

این پایان‌نامه مشتمل بر پنج فصل است که به صورت زیر تنظیم شده‌اند.

در فصل اول به بیان مفاهیم اولیه مورد نیاز می‌پردازیم. در فصل دوم روش ماتریسی بسل را برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال ولترا خطی مرتبه بالا و دستگاه معادلات ولترای خطی معرفی می‌کنیم. در فصل سوم حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال فردهولم-ولترا و دستگاه معادلات فردهولم خطی مرتبه بالا را با روش ماتریسی بسل بیان می‌نماییم. در فصل چهارم روش ماتریسی بسل را برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال منفرد به طور ضعیف به کار می‌بریم و در پایان نتیجه‌گیری نموده و پیشنهاداتی برای تحقیقات آینده ارائه می‌دهیم.

[1] Yuzbasi

فصل ۱

تعاریف و پیشنیازها

۱.۱ مقدمه

قبل از این‌که به معرفی روش ماتریسی بسل بپردازیم، مفاهیم و تعاریفی را که در این پایان‌نامه به آنها نیاز داریم، ذکر می‌کنیم.

۲.۱ معادلات انتگرالی

یک معادله انتگرالی، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول زیر یک یا چند علامت انتگرال قرار می‌گیرد. معادلات انتگرالی به طور طبیعی در بسیاری از شاخه‌های مکانیک، ریاضیات و فیزیک ظاهر می‌شوند. یک نمونه از یک معادله انتگرالی که در آن $y(x)$ تابع مجهولی است که باید معلوم گردد، به صورت زیر است

$$y(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)y(t)dt, \tag{۱.۱}$$

و در حالت کلی تر معادله انتگرالی را به شکل زیر در نظر می‌گیرند

$$\phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)y(t)dt, \tag{۲.۱}$$

که در آن $f(x)$ یک تابع معلوم، $K(x,t)$ هسته[1]معادله انتگرالی، $y(x)$ تابع مجهول، $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند و λ یک ضریب معلوم است. اگر $\phi(x) \neq ۰$ باشد با تقسیم طرفین معادله (۲.۱) بر $\phi(x) \neq ۰$ به معادله (۱.۱) می‌رسیم. هدف تعیین تابع مجهول $y(x)$ است، به طوری که در معادله (۱.۱) صدق کند.

تعریف ۱.۲.۱. معادله انتگرالی خطی

یک معادله انتگرالی را خطی گویند در صورتی که تابع مجهول $y(x)$ و مشتقاتش به صورت توان یک در معادله ظاهر شوند و هیچ ضربی میان تابع $y(x)$ و مشتقاتش رخ ندهد. در غیر این صورت معادله انتگرالی را غیر خطی گویند، مثلاً اگر تابع زیر علامت انتگرال با توابع غیرخطی یعنی $F(y(x))$ نظیر $cos(y(x))$ یا $e^{y(x)}$ تعویض گردد، آنگاه معادله انتگرالی را غیرخطی می‌گویند.

متداول‌ترین معادلات انتگرالی خطی را می‌توان به دو نوع معادلات انتگرالی فردهولم و معادلات انتگرالی ولترا دسته‌بندی کرد.

تعریف ۲.۲.۱. معادله انتگرالی فردهولم خطی

شکل استاندارد معادله انتگرالی فردهولم خطی که در آن حد پایین و بالای انتگرال‌گیری اعداد ثابت a و b هستند، به صورت زیر است

$$\phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \quad a \leq x,t \leq b \tag{۳.۱}$$

بر حسب این که $\phi(x)$ کدام یک از مقادیر زیر را اختیار کند معادلات انتگرالی فردهولم خطی به دو دسته عمده تقسیم می‌شوند :

(۱). اگر $\phi(x) = ۰$ معادله (۳.۱) به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt = ۰, \tag{۴.۱}$$

این معادله را معادله انتگرالی فردهولم خطی نوع اول می‌نامند.

(۲). اگر $\phi(x) = ۱$ معادله (۳.۱) به شکل زیر تبدیل می‌شود

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)y(t)dt, \tag{۵.۱}$$

این معادله را معادله انتگرالی فردهولم خطی نوع دوم می‌نامند.

[1] Kernel

تعریف ۳.۲.۱. معادله انتگرالی ولترا خطی

شکل استاندارد معادلات انتگرالی ولترا خطی مانند معادلات فردهولم می‌باشد با این تفاوت که در آنها حد بالای انتگرال‌گیری به جای عدد ثابت b به صورت یک مقدار مجهول بر حسب x به صورت زیر ظاهر می‌شود

$$\phi(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt, \qquad (۶.۱)$$

که در آن تابع مجهول $y(x)$ زیر علامت انتگرال به صورت خطی می‌باشد. باید توجه کرد که معادلات انتگرالی ولترا (۶.۱) را می‌توان به عنوان یک حالت خاص از معادله انتگرالی فردهولم (۳.۱) در نظر گرفت به طوری که هسته $K(x,t)$ برای $x < t$ صفر فرض شود. معادلات انتگرالی ولترا را با توجه به مقدار $\phi(x)$ می‌توان به دو گروه دسته‌بندی کرد :

(۱). اگر $\phi(x) = ۰$ باشد در این صورت معادله (۶.۱) به شکل زیر تبدیل خواهد شد

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt = ۰,$$

که به آن معادله انتگرالی ولترا خطی نوع اول می‌گویند.

(۲). زمانی که $\phi(x) = ۱$ باشد آنگاه معادله (۶.۱) به شکل زیر در خواهد آمد

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)y(t)dt,$$

که آنرا معادله انتگرالی ولترا خطی نوع دوم می‌نامند.

تعریف ۴.۲.۱. معادلات انتگرالی منفرد

اگر در معادله انتگرالی (۱.۱) حداقل یکی از حدود انتگرال‌گیری نامتناهی باشد یا هسته معادله انتگرالی یعنی $K(x,t)$ یا یکی از مشتقات آن در یک یا چند نقطه از بازه انتگرال‌گیری نامتناهی باشند، در این صورت معادله انتگرالی را معادله انتگرالی منفرد می‌نامند.

معادلات انتگرالی منفرد با هسته بیکران به دو دسته تقسیم می‌شوند:

۱. معادلات انتگرالی منفرد با هسته به صورت

$$K(x,t) = \frac{f(x,t)}{|x-t|^{\alpha}}, \quad ۰ < \alpha < ۱$$

که در آن $f(x,t)$ کراندار است را معادلات انتگرالی منفرد به طور ضعیف گویند.

۲. معادلات انتگرالی با هسته به صورت

$$K(x,t) = \frac{f(x,t)}{|x-t|}$$

که در آن $\alpha = ۱$ می‌باشد را معادلات انتگرالی منفرد به طور قوی یا معادلات با هسته کوشی گویند.

تعریف ۵.۲.۱. معادلات دیفرانسیل_انتگرال

معادلات دیفرانسیل_انتگرال، ترکیبی از معادلات دیفرانسیل و انتگرالی هستند. این نوع معادلات ابتدا در اوائل سال ۱۹۰۰ توسط ولترا معرفی شدند. ولترا در حال مطالعه پدیده رشد جمعیت و به خصوص تأثیر وراثت بود که در تحقیق خود با این نوع معادلات مواجه شد و نام مذکور را برای آنها برگزید. در این گونه معادلات یکی از مشتقات تابع مجهول می‌تواند در زیر علامت انتگرال یا خارج از انتگرال، در طرف دیگر معادله ظاهر گردد.

تعریف ۶.۲.۱. روش هم‌محلی[1]

روش هم‌محلی مبتنی بر تقریب جواب معادله (۵.۱) یعنی $y(x)$ توسط جمع جزئی زیر است

$$s_M(x) = \sum_{k=۱}^{M} c_k \phi_k(x) \tag{۷.۱}$$

که در آن توابع $\phi_۱$، $\phi_۲$، ... و ϕ_M توابع مستقل خطی در بازه (a,b) هستند. بدیهی است که اگر به جای $y(x)$ در (۵.۱)، معادله (۷.۱) راقرار دهیم خطا تولید می‌شود، این خطا با توجه به انتخاب ϕ_kها به $c_۱$، $c_۲$، ...، c_M و متغیر x وابسته است. فرض کنید این خطا را با $\epsilon(x, c_۱, c_۲, \ldots, c_M)$ نمایش دهیم. در این صورت داریم:

$$s_M(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t) s_M(t)dt + \epsilon(x, c_۱, c_۲, \ldots, c_M) \tag{۸.۱}$$

ضرایب $c_۱$، $c_۲$، ... و c_M مجهول هستند. در روش هم‌محلی برای تعیین c_kها، M شرط در نظر می‌گیریم. این M شرط به صورتی تعیین می‌شوند که خطا در معادله (۸.۱) در نقاط گرهی $x_۱$، $x_۲$، ... و x_M صفر شود که، این نقاط به صورت دلخواه از بازه $[a,b]$ اختیار می‌گردند. لذا معادله (۸.۱) به M معادله زیر تبدیل می‌گردد

$$s_M(x_i) = f(x_i) + \int_a^b k(x_i,t) s_M(t)dt, \qquad i = ۱, ۲, \ldots, M. \tag{۹.۱}$$

لذا از دستگاه (۹.۱) ضرایب نامعین $c_۱$، $c_۲$، ... و c_M محاسبه می‌شوند. در نهایت به کمک رابطه (۷.۱) تقریب جواب معادله انتگرالی حاصل می‌شود.

در تعریف معادله انتگرالی ولترا بیان کردیم که هر معادله انتگرالی ولترا را به صورت یک معادله انتگرالی

[1] Collocation method

فردهولم با شرایطی که ذکر شد می‌توان در نظر گرفت. از اینرو روش هم‌محلی را برای این دسته از معادلات نیز می‌توانیم به کار ببریم.

۳.۱ توابع بسل نوع اوّل

توابع بسل به افتخار فردریچ ویلهلم بسل[1] (۱۸۴۶ – ۱۷۸۴) نام‌گذاری شده‌اند. گرچه دانیل برنولی[2] نخستین فردی است که معرفی مفهوم توابع بسل در سال ۱۷۳۲ به وی نسبت داده می‌شود. او تابع بسل مرتبه صفر را به عنوان جواب مسأله نوسان زنجیر یک سر آویزان به کار برد. در سال ۱۷۶۴ لئونارد اویلر[3] توابع مرتبه صفر و صحیح را در تحلیل نوسانات غشای منبسط شده استفاده نمود. توابع بسل، نتیجه مطالعه بسل در مورد مسأله کپلر برای تعیین حرکت سه جسم متحرک تحت گرانش دو طرفه است. در سال ۱۸۲۴ میلادی، وی توابع بسل را درمطالعه‌ایی از اختلالات نجومی ثبت کرده است. معادله

$$x^{۲}\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}+x\frac{dy}{dx}+(x^{۲}-\nu^{۲})y=۰ \tag{۱۰.۱}$$

که در آن $\nu \geq ۰$ معادله بسل مرتبه ν نامیده می‌شود. معادله بسل از جمله معادلاتی است که به روش سری قابل حل هستند و نقطه $x=۰$ تنها نقطه تکین منظم این معادله است. جواب‌های این معادله به **توابع بسل** معروفند.

توابع بسل نوع اوّل مرتبه ν را با $J_\nu(x)$ نشان می‌دهیم که به صورت سری

$$J_\nu(x)=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^k(\frac{x}{۲})^{۲k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+۱)},\quad x>۰ \tag{۱۱.۱}$$

تعریف می‌شوند. زمانی‌که $\nu=n$، $n=۰,۱,۲,\ldots$، رابطه (۱۱.۱)، توابع بسل نوع اوّل با مرتبه صحیح

$$J_n(x)=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^k(\frac{x}{۲})^{۲k+n}}{k!(k+n)!},\quad n=۰,۱,۲,\ldots,\quad x>۰ \tag{۱۲.۱}$$

را تعریف می‌کند، که ساده‌ترین آنها

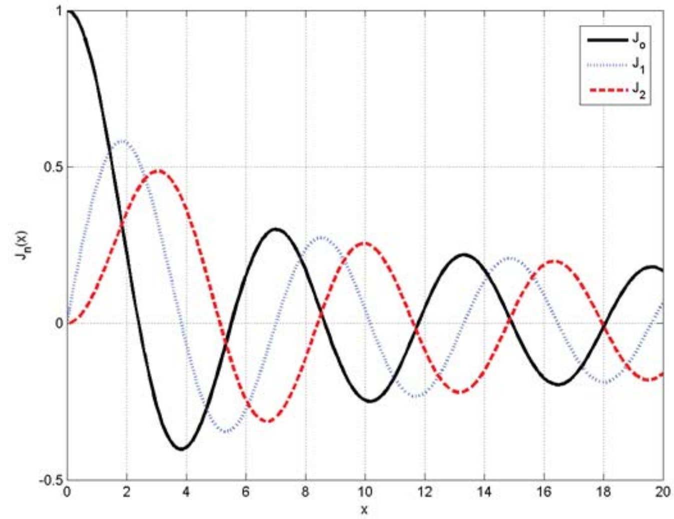
$$J_{۰}(x)=\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{(-۱)^k(\frac{x}{۲})^{۲k}}{k!^{۲}},\quad x>۰ \tag{۱۳.۱}$$

[1] Friedrich Willhelm Bessel

[2] Daniel Bernoulli

[3] Leonard Euler

است. شکل ۱.۱ تابع $J_n(x)$ را برای مقادیر $n = ۰, ۱, ۲$ و xهای حقیقی نامنفی نشان می‌دهد.



شکل ۱.۱: نمودار $J_n(x)$ برای $n = ۰, ۱, ۲$.

۱.۳.۱ چندجمله‌ای‌های بسل نوع اوّل

چندجمله‌ای بسل نوع اوّل مرتبه n به صورت زیر تعریف می‌گردد

$$J_n(x) = \sum_{k=۰}^{[\frac{(N-n)}{۲}]} \frac{(-۱)^k}{k!(k+n)!}(\frac{x}{۲})^{۲k+n}, \qquad ۰ \leq n \leq N, \quad ۰ \leq x < \infty, \tag{۱۴.۱}$$

که در آن $N \in \mathbb{N}$ است.

مثال ۱.۳.۱. *با توجه به تعریف تابع گاما داریم*

$$\int_۰^x \frac{t^n}{\sqrt{x-t}}dt = \frac{\sqrt{\pi}x^{(\frac{۱}{۲}+n)}\Gamma(n+۱)}{\Gamma(n+\frac{۳}{۲})}. \tag{۱۵.۱}$$

حل. ابتدا انتگرال را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\int_۰^x \frac{t^n}{\sqrt{x-t}}dt = \int_۰^x (x-t)^{-\frac{۱}{۲}}t^n dt$$

به روش انتگرال‌گیری جزبه‌جزء انتگرال را حل می‌کنیم. بدین منظور در نظر می‌گیریم

$$du = (x-t)^{-\frac{1}{2}} dt, \quad v = t^n$$

پس داریم

$$u = -2(x-t)^{\frac{1}{2}}, \quad dv = nt^{n-1} dt$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^n dt &= -2(x-t)^{\frac{1}{2}} t^n \Big|_0^x + 2n \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}} t^{n-1} dt \\ &= 2n \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}} t^{n-1} dt \end{aligned}$$

برای انتگرال اخیر نیز قاعده انتگرال‌گیری جزبه‌جزء را به کار می‌بریم، داریم

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)^{\frac{1}{2}} t^{n-1} dt &= -\frac{2}{3}(x-t)^{\frac{3}{2}} t^{n-1} \Big|_0^x + \frac{2}{3}(n-1) \int_0^x (x-t)^{\frac{3}{2}} t^{n-2} dt \\ &= \frac{2}{3}(n-1) \int_0^x (x-t)^{\frac{3}{2}} t^{n-2} dt \end{aligned}$$

توجه داریم که عبارت uv در انتگرال‌گیری جزبه‌جزء در هر مرحله به دلیل وجود فاکتور $(x-t)$ و t که به ترتیب در $t=x$ و $t=0$ صفر می‌شوند، حذف می‌گردد. با ادامه این روند عبارت زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}} t^n dt &= (2n)\big(\frac{2}{3}(n-1)\big)\big(\frac{2}{5}(n-2)\big)\dots\big(\frac{2}{2n-3}(2)\big)\big(\frac{2}{2n-1}(1)\big) \int_0^x (x-t)^{\frac{2n-1}{2}} t^0 dt \\ &= (2n)\big(\frac{2}{3}(n-1)\big)\big(\frac{2}{5}(n-2)\big)\dots\big(\frac{2}{2n-1}(1)\big)\big(\frac{2}{2n+1}\big) x^{\frac{2n+1}{2}} \\ &= \big(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} \times \dots \times \frac{2}{2n-1} \times \frac{2}{2n+1}\big)\big(n(n-1)(n-2)\dots(2)(1)\big) x^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{1.16}$$

از طرفی می‌دانیم که تابع گاما به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

با توجه به خواص تابع گاما

$$n(n-۱)(n-۲)\dots(۲)(۱) = n! = \Gamma(n+۱) \qquad (۱۷.۱)$$

و

$$\Gamma(k) = \frac{\Gamma(k+۱)}{k}, \qquad k > ۰$$

می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}\Gamma(\frac{۲n+۳}{۲}) =& \frac{۲n+۱}{۲}\Gamma(\frac{۲n+۱}{۲}) = \frac{۲n+۱}{۲} \times \frac{۲n-۱}{۲}\Gamma(\frac{۲n-۱}{۲})\\ &\vdots\\ =& \frac{۲n+۱}{۲} \times \frac{۲n-۱}{۲} \times \frac{۲n-۳}{۲} \times \dots \times \frac{۵}{۲} \times \frac{۳}{۲} \times \frac{۱}{۲}\Gamma(\frac{۱}{۲}) \qquad (۱۸.۱)\end{aligned}$$

رابطه (۱۶.۱) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\int_۰^x (x-t)^{-\frac{۱}{۲}} t^n dt = \frac{۱}{(\frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۲} \times \frac{۵}{۲} \times \dots \times \frac{۲n-۱}{۲} \times \frac{۲n+۱}{۲})}\Gamma(n+۱)x^{n+\frac{۱}{۲}} \qquad (۱۹.۱)$$

از روابط (۱۹.۱) و (۱۸.۱) و $\Gamma(\frac{۱}{۲}) = \sqrt{\pi}$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}\int_۰^x (x-t)^{-\frac{۱}{۲}} t^n dt &= \frac{\Gamma(\frac{۱}{۲})}{\Gamma(\frac{۲n+۳}{۲})}\Gamma(n+۱)x^{n+\frac{۱}{۲}}\\ &= \frac{\sqrt{\pi}x^{(n+\frac{۱}{۲})}\Gamma(n+۱)}{\Gamma(n+\frac{۳}{۲})}\end{aligned}$$

برهان تمام است. □

لم ۱.۳.۱. *انتگرال زیر را در نظر بگیرید*

$$\int_a^x BA(t)C^T dt, \qquad (۲۰.۱)$$

که در آن B و C دو ماتریس به صورت

$$B = \begin{bmatrix} b_۰ & b_۱ & \dots & b_N \end{bmatrix}, \qquad (۲۱.۱)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_N \end{bmatrix}, \tag{۲۲.۱}$$

باشند که b_i و c_i، $i = 0, 1, \dots, N$ مستقل از t *(متغیر انتگرال‌گیری)* می‌باشند و

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{00}(x) & a_{01}(x) & \dots & a_{0N}(x) \\ a_{10}(x) & a_{11}(x) & \dots & a_{1N}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N0}(x) & a_{N1}(x) & \dots & a_{NN}(x) \end{bmatrix}, \tag{۲۳.۱}$$

که یک ماتریس مربعی $(N+1) \times (N+1)$ می‌باشد. انتگرال (۲۰.۱) به صورت زیر محاسبه می‌گردد

$$\int_a^x BA(t)C^T dt = BHC^T, \tag{۲۴.۱}$$

که در آن

$$H = \begin{bmatrix} \int_a^x a_{00}(t)dt & \int_a^x a_{01}(t)dt & \dots & \int_a^x a_{0N}(t)dt \\ \int_a^x a_{10}(t)dt & \int_a^x a_{11}(t)dt & \dots & \int_a^x a_{1N}(t)dt \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_a^x a_{N0}(t)dt & \int_a^x a_{N1}(t)dt & \dots & \int_a^x a_{NN}(t)dt \end{bmatrix}. \tag{۲۵.۱}$$

برهان. با توجه به روابط (۲۱.۱)، (۲۲.۱) و (۲۳.۱) می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} BA(x)C^T &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{00}(x) & a_{01}(x) & \dots & a_{0N}(x) \\ a_{10}(x) & a_{11}(x) & \dots & a_{1N}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N0}(x) & a_{N1}(x) & \dots & a_{NN}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} \\ &= c_0\big(b_0 a_{00}(x) + b_1 a_{10}(x) + \dots + b_N a_{N0}(x)\big) \\ &+ c_1\big(b_0 a_{01}(x) + b_1 a_{11}(x) + \dots + b_N a_{N1}(x)\big) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$+ c_N\big(b_0 a_{0N}(x) + b_1 a_{1N}(x) + \ldots + b_N a_{NN}(x)\big), \tag{۲۶.۱}$$

اکنون با استفاده از رابطه (۲۶.۱) داریم

$$\begin{aligned}
\int_a^x BA(t)C^T dt &= c_0\big(b_0 \int_a^x a_{00}(t)dt + b_1 \int_a^x a_{10}(t)dt + \ldots + b_N \int_a^x a_{N0}(t)dt\big) \\
&\quad + c_1\big(b_0 \int_a^x a_{01}(t)dt + b_1 \int_a^x a_{11}(t)dt + \ldots + b_N \int_a^x a_{N1}(t)dt\big) \\
&\quad \vdots \\
&\quad + c_N\big(b_0 \int_a^x a_{0N}(t)dt + b_1 \int_a^x a_{1N}(t)dt + \ldots + b_N \int_a^x a_{NN}(t)dt\big) \\
&= BHC^T,
\end{aligned}$$

که در آن ماتریس H به صورت زیر می‌باشد

$$H = \begin{bmatrix}
\int_a^x a_{00}(t)dt & \int_a^x a_{01}(t)dt & \ldots & \int_a^x a_{0N}(t)dt \\
\int_a^x a_{10}(t)dt & \int_a^x a_{11}(t)dt & \ldots & \int_a^x a_{1N}(t)dt \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\int_a^x a_{N0}(t)dt & \int_a^x a_{N1}(t)dt & \ldots & \int_a^x a_{NN}(t)dt
\end{bmatrix}.$$

فصل ۲

حل عددی معادلات دیفرانسیل_انتگرال ولترا خطی مرتبه بالا

۱.۲ مقدمه

در این فصل با استفاده از اصول روش ماتریسی تیلور و بهره‌گیری از رابطه ماتریسی میان چندجمله‌ای‌های بسل و مشتقاتشان روش ماتریسی بسل که توسط یوزباشی در مرجع [۳۳] معرفی شده است را برای حل معادلات دیفرانسیل_انتگرال ولترا بیان می‌کنیم. سپس روش را برای حل دستگاه معادلات انتگرالی ولترا توسعه می‌دهیم.

۲.۲ حل معادلات دیفرانسیل_انتگرال ولترا خطی مرتبه بالا

در این بخش با استفاده از اصول روش ماتریسی تیلور و بهره‌گیری از رابطه ماتریسی میان چندجمله‌ای‌های بسل و مشتقاتشان روش جدیدی موسوم به روش ماتریسی بسل که توسط یوزباشی در مرجع [۳۳] معرفی شده است، را بیان می‌کنیم. معادلات دیفرانسیل_انتگرال ولترا خطی مرتبه m

$$\sum_{k=\circ}^{m} P_k(x)y^{(k)}(x) = g(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)y(t)dt, \qquad \circ \leq a \leq x, t \leq b \tag{۱.۲}$$

تحت شرایط مخلوط[۱] زیر را در نظر می‌گیریم

$$\sum_{k=0}^{m-1}(a_{jk}y^{(k)}(a)+b_{jk}y^{(k)}(b))=\lambda_j, \qquad j=0,1,\dots,m-1. \tag{۲.۲}$$

که در آن $y^{(0)}(x)=y(x)$ تابع مجهول است و توابع معلوم $P_k(x)$، $g(x)$ و $k(x,t)$ بر بازه $a\leq x,t\leq b$ تعریف شده‌اند، فرض کنید که تابع $k(x,t)$ دارای بسط تیلور باشد و a_{jk}، b_{jk}، λ_j و λ ثابت‌های حقیقی یا مختلط هستند.

هدف ما یافتن یک جواب تقریبی برای معادله (۱.۲) به صورت سری بسل قطع شده زیر

$$y(x)=\sum_{n=0}^{N}a_nJ_n(x) \tag{۳.۲}$$

می‌باشد، به قسمی‌که a_n، $n=0,1,\dots,N$، ضرایب مجهول بسل هستند. در اینجا N هر عدد صحیح مثبت $N\geq m$ می‌تواند انتخاب گردد و $J_n(x)$، $n=0,1,\dots,N$، چندجمله‌ای‌های بسل نوع اوّل مرتبه n هستند که به صورت زیر تعریف می‌گردند

$$J_n(x)=\sum_{k=0}^{[\frac{N-n}{2}]}\frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}, \qquad 0\leq n\leq N, \quad 0\leq x<\infty. \tag{۴.۲}$$

۱.۲.۲ روابط ماتریسی بنیادی

حال به معرفی روابط ماتریسی بنیادی[۲] مورد نیاز می‌پردازیم. ابتدا $J_n(x)$ را به صورت ماتریسی زیر در نظر می‌گیریم

$$\mathbf{J}^{\mathrm{T}}(x)=\mathbf{D}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{J}(x)=\mathbf{X}(x)\mathbf{D}^{\mathrm{T}} \tag{۵.۲}$$

که در آن

---

[1] Mixed conditions

[2] Fundamental matrix relations