بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه مراغه

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه:

برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد در رشته‌ی ریاضی، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان:

کلاس توابع مرومورفیک ستاره‌گون از مرتبه مختلط

استاد راهنما:

دکتر شهرام نجف زاده

پـژوهشگر:

سمیه خداشناس

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

چشمه های جوشان محبت جلوه های مهر و عطوفت الهی لبخندهای پر مهر زندگیم پدر و مادر عزیزم که در تمام مراحل زندگی، به من راه و رسم درست زیستن را آموختند.

تقدیم به برادرانم : که همواره در طول تحصیل، تکیه گاه من در مواجهه با مشکلات و وجودشان مایه دلگرمی من می باشند.

تقدیم به خواهرم : که وجودش شادی بخش و صفایش مایه آرامش من است

ستایش

الهی!

دلی ده، که در کار تو جان بازیم. جانی ده، که کار آن جهان سازیم. تقوایی ده، که دنیا را بسپریم. روحی ده، که از دین برخوریم. یقینی ده، که درِ آز بَر ما باز نشود. قناعتی، تا صعوهٔ حرص ما باز نشود. دانایی ده، که از راه نیفتیم. بینایی ده، که در چاه نیفتیم. دست گیر، که دست آویز نداریم، در گذار، که بد کرده ایم. آزرم دار، که آزرده ایم. طاعت مجوی، که آبِ آن نداریم. از هیبت مگوی، که تابِ آن نداریم. توفیقی ده، تا در دین استوار شویم. عقبی ده، تا از دنیا بیزار شویم. نگاهدار، تا پریشان نشویم. به راه دار تا پشیمان نشویم. بیاموز، تا شریعت بدانیم. برافروز، تا در تاریکی نمانیم. بنمای، تا در رویِ کس ننگریم. بگشای دری، که بگذریم. تو بساز، که دیگران ندانند. تو بنواز، که دیگران نتوانند. همه را از خود رهایی ده. همه را به خود آشنایی ده. همه را از مکر شیطان نگاهدار. همه را از فتنهٔ نفس آگاه دار. الهی! بساز کارِ من، و منگر به کردارِ من. دلی دهم که طاعت افزون کند. طاعتی ده، که به بهشت راهنمون کند. علمی ده، که در او آتش هوا نبود. علمی ده، که در او آبِ زرق و ریا نبود. دیده ای ده، که عزّ ربوبیت تو بیند. نفسی ده، که حلقهٔ بندگی تو در گوش کند.

یارب دل ما را تو به رحمت جان ده

درد همه را به صابری درمان ده

این بنده چه داند که چه می باید جست

داننده تویی هر آنچه دانی آن ده

سپاس گزاری

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد راهنمای خود، جناب اقای دکتر شهرام نجف‌زاده صمیمانه تشکر وقدردانی می‌نمایم که قطعا بدون راهنمایی های ارزنده ایشان، این پایان نامه به انجام نمی رسید.

از جناب آقای دکتر محمد مهدیزاده به دلیل یاریها و راهنماییهای بی چشمداشت ایشان که بسیاری از سختیها را برایم آسانتر نمودند، تشکر می‌نمایم.

از جناب آقای دکتر علی عبادیان که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را تقبل فرمودند، کمال تشکر را می‌نمایم.

در پایان بوسه می زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می کنم وجود مقدس‌شان را که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سمیه خداشناس

تابستان ۱۳۹۲

نام خانوادگی: خداشناس نام: سمیه

عنوان پایان‌نامه: **کلاس توابع مرومورفیک ستاره‌گون از مرتبه مختلط**

استاد راهنما: دکتر شهرام نجف زاده

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض

گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: مراغه دانشکده: علوم پایه

تاریخ فارغ‌التحصیلی:شهریور ۱۳۹۲ تعداد صفحه: ۹۰

کلیدواژه‌ها:توابع تحلیلی، توابع‌مرومورفیک، توابع ستاره‌گون، پیروی دیفرانسیل.

چکیده:

در این پایان‌نامه، بعضی نتایج از زیرکلاس‌های خاصی از توابع مرومورفیک ستاره‌گون f از مرتبه مختلط که روی دیسک واحد محذوف تعریف شده است را بدست می‌آوریم. و همچنین شرط لازم و کافی برای توابع متعلق به این کلاس را مورد بحث قرار می‌دهیم. بعلاوه پیروی دیفرانسیلی را بدست می‌آوریم.

فهرست مطالب

مقدمه

کارهای این پایان نامه بر اساس مقاله‌ها

A. Mohammad – M. Darus: On the class of starlike meromorphic function of complex order,Rendiconti di Matematica, Serie VII Volume 31, Roma (2011), $53-61$.

R. M. Ali – V. Ravichandran: Classes of Meromorphic Convex functions, Taiwan. J. Math. $14(4)(2010), 1479-1490$.

در ۴ فصل ارایه شده است .

در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی که در فصول بعدی به آنها نیاز است آورده می‌شود،که شامل یک بخش است.

فصل دوم شامل سه بخش است. در بخش اول به معرفی توابع تک‌ارز و ارایه برخی خواص آنها می‌پردازیم. در بخش دوم توابع ستاره‌گون و محدب وتوابع مرومورفیک را تعریف کرده و قضایا ولم‌هایی در رابطه با آنها بیان می‌کنیم. در بخش پایانی پیروی دیفرانسیلی را تعریف کرده و قضایای مرتبط با آن را بیان می‌کنیم.

فصل سوم شامل سه بخش است. که در بخش اول کلاس توابع مرومورفیک ستاره‌گون را تعریف کرده و در ادامه برخی از خواص آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش دوم شرایط لازم و کافی برای توابعی که متعلق به این کلاس هستند را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش سوم برای توابع تک‌ارز ثابت ϕ، کلاس توابع $\alpha-$ محدب تک‌ارز مرومورفیک نسبت به α

معرفی می‌شود و همچنین قضیه نمایش برای توابع در این کلاس، وهمچنین شرط لازم و کافی برای توابع متعلق به این کلاس را به دست می‌آوریم و ضرایب توابع $|a_1 - \mu a_0^2|$ برا ی توابع متعلق به $\sum^*(\phi)$ را بر آورد می‌کنیم.

فصل چهارم شامل دو بخش است که در بخش اول قضایا ونتایج اصلی مربوط به توابع مرومورفیک ستاره‌گون آورده شده و در بخش دوم قضایای مربوط به توابع α - محدب مرومورفیک را مورد بحث قرار دادیم

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل به تعاریف و قضایای اساسی که در فصول بعدی به آنها نیاز خواهیم داشت پرداخته‌ایم.

۱.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. اگر $r > ۰$ و a یک عدد مختلط باشد، در این صورت

$$D(a,r) = \{z : |z-a| < r\}$$

یک قرص مستدیر باز [۱] به مرکز a و شعاع r است و

$$\overline{D}(a,r) = \{z : |z-a| \leq r\}$$

بستار $D(a,r)$ می‌باشد و

$$D'(a,r) = \{z : ۰ < |z-a| < r\}$$

قرص سفته به مرکز a و شعاع r نامیده می‌شود.

در سراسر این پایان‌نامه

$$\mathbb{U} = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < ۱\}$$

[۱] Open Circular Disk

دیسک باز واحد در نظر گرفته می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. یک توپولوژی در مجموعه X گردایه‌ای مانند τ از زیرمجموعه‌های X است که در شرایط زیر صدق می‌کند:

۱) $\emptyset$ و X متعلق به τ باشند،

۲) اجتماع اعضای هر زیرگردایه τ متعلق به τ است،

۳) مقطع اعضای هر زیرگردایه متناهی τ متعلق به τ است.

مجموعه X را که برای آن توپولوژی مانند τ مشخص شده است، فضای توپولوژیک [۱] می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. مجموعه E را در فضای توپولوژیک X ناهمبند [۲] گوئیم اگر E اجتماع دو مجموعه ناتهی مانند A و B باشد که،

$$\overline{A} \cap B = \emptyset = A \cap \overline{B}.$$

تعریف ۴.۱.۱. اگر E ناهمبند نباشد، همبند [۳] نامیده می‌شود.

مثال ۵.۱.۱. *هر مجموعه مرکب از فقط یک نقطه همبند است.*

تعریف ۶.۱.۱. مجموعه S، باز نامیده می‌شود اگر به ازای هر $z \in S$ عدد مثبتی مانند δ بتوان یافت که $D(z;\delta) \subset S$.

از حالا به بعد نماد Ω یعنی یک مجموعه باز در صفحه مختلط.

تعریف ۷.۱.۱. هر زیر مجموعه باز همبند ناتهی از صفحه مختلط را یک ناحیه [۴] می‌نامیم.

[۱] Topolpgical space
[۲] Not connected
[۳] Connected
[۴] Region

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم Ω یک مجموعه باز و $f:\Omega\to\mathbb{C}$ یک تابع مختلط باشد. گوییم f در نقطه $z_\circ\in\Omega$ مشتق‌پذیر است هرگاه

$$\lim_{z\to z_\circ}\frac{f(z)-f(z_\circ)}{z-z_\circ}$$

موجود باشد و آن را با $f'(z_\circ)$ نشان می‌دهیم. هرگاه f در هر نقطه $z_\circ\in\Omega$ مشتق‌پذیر باشد، گوییم f در Ω تحلیلی [۱] است.

تعریف ۹.۱.۱. مجموعه‌ی توابع تحلیلی بر $\mathbb{U}$ را با $H(\mathbb{U})$ نمایش داده و قرار می‌دهیم:

$$A_n=\{f\in H(\mathbb{U}):f(z)=z+\sum_{k=n+۱}^{\infty}a_kz^k\}.$$

در ضمن،

$$A_۱=A=\{f\in H(\mathbb{U}),\quad f(\circ)=f'(\circ)-۱=\circ,\quad f(z)=z+\sum_{k=۲}^{\infty}a_kz^k\}.$$

نشان دهنده‌ی مجموعه توابع تحلیلی نرمالیزه شده بر دیسک واحد $\mathbb{U}$ است.

تعریف ۱۰.۱.۱. یک سری برحسب توان‌های $z-z_\circ$ یعنی $\sum_{n=\circ}^{\infty}c_n(z-z_\circ)^n$ که در آن $z_\circ$ یک عدد مختلط، و دنباله c_n یک دنباله مختلط است سری توانی نامیده می‌شود. به هر سری توانی

$$\sum_{n=\circ}^{\infty}c_n(z-z_\circ)^n$$

عددی مانند $R\in[\circ,\infty]$ چنان نظیر است که سری به ازای هر $r<R$ در $\overline{D}(a,r)$ به طور مطلق و به طور یکنواخت همگراست، و اگر $z\notin\overline{D}(a,R)$ واگرا می‌باشد. شعاع همگرایی [۲] R از آزمون ریشه به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{R}=\lim_{n\to\infty}\sup|c_n|^{\frac{۱}{n}}.$$

[۱] Analytic
[۲] Radius of convergence

تعریف ۱۱.۱.۱. تابع تعریف شده‌ی f در Ω بوسیله سری توانی در Ω قابل نمایش است هرگاه برای هر قرص $D(a,r) \subset \Omega$ یک سری مانند

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$$

نظیر شود که به ازای هر $z \in D(a,r)$ همگرا به $f(z)$ باشد.

گزاره ۱۲.۱.۱. *هرگاه f بوسیله سری توانی در Ω قابل نمایش باشد، آنگاه $f \in H(\Omega)$ و f' باسری توانی در Ω قابل نمایش است. در واقع به ازای هر $z \in D(a,r)$ اگر*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

آنگاه به ازای این z ها داریم:

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} nc_n(z-a)^{n-1}.$$

برهان. به مرجع [۲۶] مراجعه شود. □

قضیه ۱۳.۱.۱. *(قضیه نگاشت باز [۱]) فرض کنیم $\varphi \in H(\Omega)$، $z_0 \in \Omega$ و $\varphi'(z_0) \neq 0$. در این صورت Ω یک همسایگی از z_0 مانند V را شامل می‌شود به طوری که:*

۱) *φ در V یک‌به‌یک است،*

۲) *$W = \varphi(V)$ یک مجموعه باز است،*

۳) *$\psi : W \to V$ با ضابطه $\psi(\varphi(z)) = z$ تعریف شده باشد، آنگاه $\psi \in H(W)$.*

[۱] Open mapping Theorem

برهان. به مرجع [۵] مراجعه شود. □

قضیه ۱۴.۱.۱. (قضیه مدول ماکزیمم [۱]) *فرض کنیم Ω یک ناحیه بوده، $f \in H(\Omega)$ و $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. در این صورت*

$$|f(a)| \leq Max \left|f(a+re^{i\theta})\right|, \qquad -\pi < \theta \leq \pi.$$

تساوی در عبارت فوق برقرار است اگر و فقط اگر f در Ω ثابت باشد.در نتیجه $|f|$ در هیچ نقطه از Ω ماکزیمم موضعی ندارد مگر اینکه f تابع ثابت باشد.

برهان. به مرجع [۲۶] مراجعه شود. □

لم ۱۵.۱.۱. (لم شوارتز [۲]). *فرض کنیم $\omega \in H(\mathbb{U})$ به طوری که:*

۱) *برای هر $z \in \mathbb{U}$، $|\omega(z)| \leq 1$،*

۲) $\omega(0) = 0$.

در این صورت برای هر $z \in \mathbb{U}$، $|w(z)| \leq |z|$ و $|w'(0)| \leq 1$. به علاوه اگر $|w'(0)| = 1$ یا برای $z \neq 0$ای واقع در $\mathbb{U}$ داشته باشیم $|w(z)| = |z|$، آنگاه عدد ثابت cای موجود است به طوری که $|c| = 1$ و برای هر $z \in \mathbb{U}$، $w(z) = cz$.

برهان. به مرجع [۲۶] مراجعه شود. □

تابع $w(z)$ در لم فوق به تابع شوارتز معروف است.

لم ۱۶.۱.۱. (لم پیک شوارتز [۳]). *فرض کنیم f تابع تحلیلی در دیسک واحد باشد به طوریکه*

---
[۱] Maximum Modulus Theorem
[۲] Schwarz's Lemma
[۳] Pick Schwarz's Lemma

$1 \leq |f'(\circ)|$. همچنین فرض کنیم به ازای zهای متعلق به $\mathbb{U}$ داشته باشیم $|f(z)| \leq |z|$. در این صورت،

$$|f'(\circ)| \leq \frac{1-|f(z)|^2}{1-|z|^2}, \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

برهان. به مرجع [۲۶] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۱.۱.۱۷. (*قضیه‌ی مساحت* [۱]) *هرگاه* $F \in H(\mathbb{U}-\{\circ\})$، F *در* $\mathbb{U}$ *یک به یک باشد و*

$$F(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n z^n, \qquad (z \in \mathbb{U}),$$

آن‌گاه

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|^2 \leq 1.$$

برهان. به مرجع [۲۹] مراجعه شود. $\square$

تعریف ۱.۱.۱۸. (نگاشت همدیس [۲]). نگاشت پیوسته‌ای که اندازه زاویه بین خم‌های مار بر یک نقطه مفروض $z_\circ$ را حفظ نماید، حافظ زاویه در نقطه $z_\circ$ گوئیم. اگر $f(z)$ در $z_\circ$ حافظ زاویه باشد و به علاوه، جهت زوایای بین خم‌های مار بر نقطه $z_\circ$ را نیز حفظ نماید، گوئیم $f(z)$ در $z_\circ$ همدیس است.

قضیه ۱.۱.۱۹. *اگر* G *یک ناحیه بوده و* $f : G \to \mathbb{C}$ *تابع تحلیلی باشد، آنگاه* f *در هر نقطه* $z_\circ \in G$ *که* $f'(z_\circ) \neq \circ$ *همدیس است.*

برهان. به مرجع [۲۶] مراجعه شود. $\square$

[۱] Area Theorem
[۲] Conformal map

مثال ۲۰.۱.۱. *نگاشت $f(z)=z^{۲}$ در هر نقطه $z_{۰}\neq ۰$ همدیس است. زیرا مشتق آن $f'(z)=۲z$ در $z_{۰}$ مخالف صفر است، اما $f(z)=z^{۲}$ در نقطه $z=۰$ که f' صفر می‌شود همدیس نیست. زیرا*

$$\arg f(z)=\arg z^{۲}=۲\arg z.$$

این نگاشت هر زاویه به رأس مبدأ مختصات را دو برابر می‌کند.

تعریف ۲۱.۱.۱. ناحیه Ω همبند ساده است هرگاه متمم آن نسبت به صفحه مختلط توسیع یافته $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ همبند باشد.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژیک باشند و تابع $f:X\to Y$ تناظر دوسویی باشد. اگر f و تابع معکوس آن $f^{-۱}:Y\to X$ هر دو پیوسته باشند، آن گاه تابع f را هومئورفیسم [۱] یا همسانریختی می‌نامیم.

قضیه ۲۳.۱.۱. *فرض کنیم Ω یک ناحیه همبند ساده در صفحه باشد. در این صورت شرایط زیر معادل‌اند:*

۱) Ω با دیسک واحد $\mathbb{U}$ همسانریخت است،

۲) Ω همبند ساده است،

۳) به هر تابع تحلیلی f در Ω، یک تابع تحلیلی F در Ω چنان نظیر است که $F'=f$،

۴) اگر $f\in H(\Omega)$ و $\frac{۱}{f}\in H(\Omega)$، آنگاه $g\in H(\Omega)$ موجود است به طوری که $f=e^{g}$،

۵) اگر $f\in H(\Omega)$ و $\frac{۱}{f}\in H(\Omega)$، آنگاه $\varphi\in H(\Omega)$ وجود دارد که $f=\varphi^{۲}$.

برهان. به مرجع [۲۶] مراجعه شود. □

نتیجه ۲۴.۱.۱. *فرض کنیم Ω یک ناحیه همبند ساده باشد، $f\in H(\Omega)$ ، f بر Ω دارای صفر نباشد و n یک عدد صحیح*

[۱] Homeomorphism

مثبت باشد. در این صورت تابعی مانند $g \in H(\Omega)$ موجود است به طوری که $g^n = f$.

برهان. با توجه به اینکه Ω یک ناحیه همبند ساده است و $\frac{1}{f} \in H(\Omega)$ لذا طبق قضیه ۱.۱.۲۳، تابع $g_1 \in H(\Omega)$ موجود است به طوری که $f = e^{g_1}$. قرار می‌دهیم $g = e^{\frac{1}{n}g_1}$. در این صورت $g \in H(\Omega)$ و به علاوه داریم،

$$g^n = e^{\frac{g_1}{n} \cdot n} = e^{g_1} = f,$$

لذا حکم برقرار است. $\square$

فصل ۲

توابع تک‌ارز

فصل دوم در سه بخش ارائه شده است.در بخش اول و دوم به تعاریف و قضایایی از توابع تک‌ارز [۱]، ستاره‌گون [۲] و محدب [۳] ومرومورفیک [۴] می‌پردازیم و برخی خواص اساسی آنها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش سوم مفهوم پیروی دیفرانسیلی و خواص آن را بیان می‌کنیم.

۱.۲ معرفی توابع تک‌ارز و خواص آن

تعریف ۱.۱.۲. تابع $f(z)$ را روی $\mathbb{U}$ تک‌ارز گوییم هر گاه برا ی هر z_1 و z_2 در $\mathbb{U}$ که $z_2 \neq z_1$ داشته باشیم $f(z_1) \neq f(z_2)$.

تعریف ۲.۱.۲. تابع $f(z)$ را در نقطه $z_0 \in \Omega$ موضعا تک‌ارز [۵] گو ییم هرگاه در یک همسایگی z_0 تک‌ارز باشد.

یک تابع تحلیلی روی یک دامنه ممکن است موضعا تک‌ارز باشد، اما تک‌ارز نباشد.

مثال ۳.۱.۲. *تابع $f(z) = z^2$ در دامنه‌ی $D = \{z : 1 < |z| < 2 \,,\ 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2}\}$ به طور موضعی تک‌ارز است، اما تک‌ارز نیست.*

[۱] Univalent
[۲] Starlike
[۳] Convex
[۴] Meromorphic
[۵] Locally univalent

تعریف ۴.۱.۲. مجموعه تمام توابع تحلیلی و تک‌ارز f که در دیسک

$$\mathbb{U} = \{z : z \in \mathbb{C}, |z| < ۱\},$$

تعر یف شده و در شرایط نرمالیزه $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$ صدق می‌کنند را با $\mathcal{S}$ نمایش می‌دهیم.

می توان ملاحظه کرد که هر $f \in \mathcal{S}$ دارای بسط ماکلورن به فرم زیر می‌باشد:

$$f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n, \quad (|z| < ۱).$$

در نتیجه کلاس $\mathcal{S}$ تحت جمع یا ضرب بسته نیست و لذا فضای برداری نمی‌باشد.

مثال ۵.۱.۲. *تابع کوبه* [۱]

$$\begin{aligned} k(z) = \frac{z}{(۱-z)^۲} &= z + ۲z^۲ + ۳z^۳ + \dots \\ &= \frac{۱}{۴}(\frac{۱+z}{۱-z})^۲ - \frac{۱}{۴} \end{aligned}$$

مشهورترین تابع تحلیلی در کلاس $\mathcal{S}$ است. $\mathbb{U}$ را به کل $\mathbb{C}$ به استثنا بخشی از محور حقیقی که از $-\frac{۱}{۴}$ تا $-\infty$ قرار دارد تصویر می‌کند.

حال به معرفی تبدیلا ت اولیه می‌پردازیم که تحت آن تبدیلات، خانواده $\mathcal{S}$ حفظ می‌شود:

الف) تزویج[۲]: اگر $f \in \mathcal{S}$ و $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a_۲}z^۲ + \overline{a_۳}z^۳ + ...$. آ نگاه $g \in \mathcal{S}$،

ب) دوران[۳]: اگر $f \in \mathcal{S}$ و $g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$. آنگاه $g \in \mathcal{S}$،

[۱] Koebe function
[۲] Conjugation
[۳] Rotation