دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

رشته :

ریاضی کاربردی ، گرایش بهینه سازی

عنوان :

(V,ρ) اینوکسیتی و برنامه‌ریزی چند هدفه ناهموار

نگارنده :

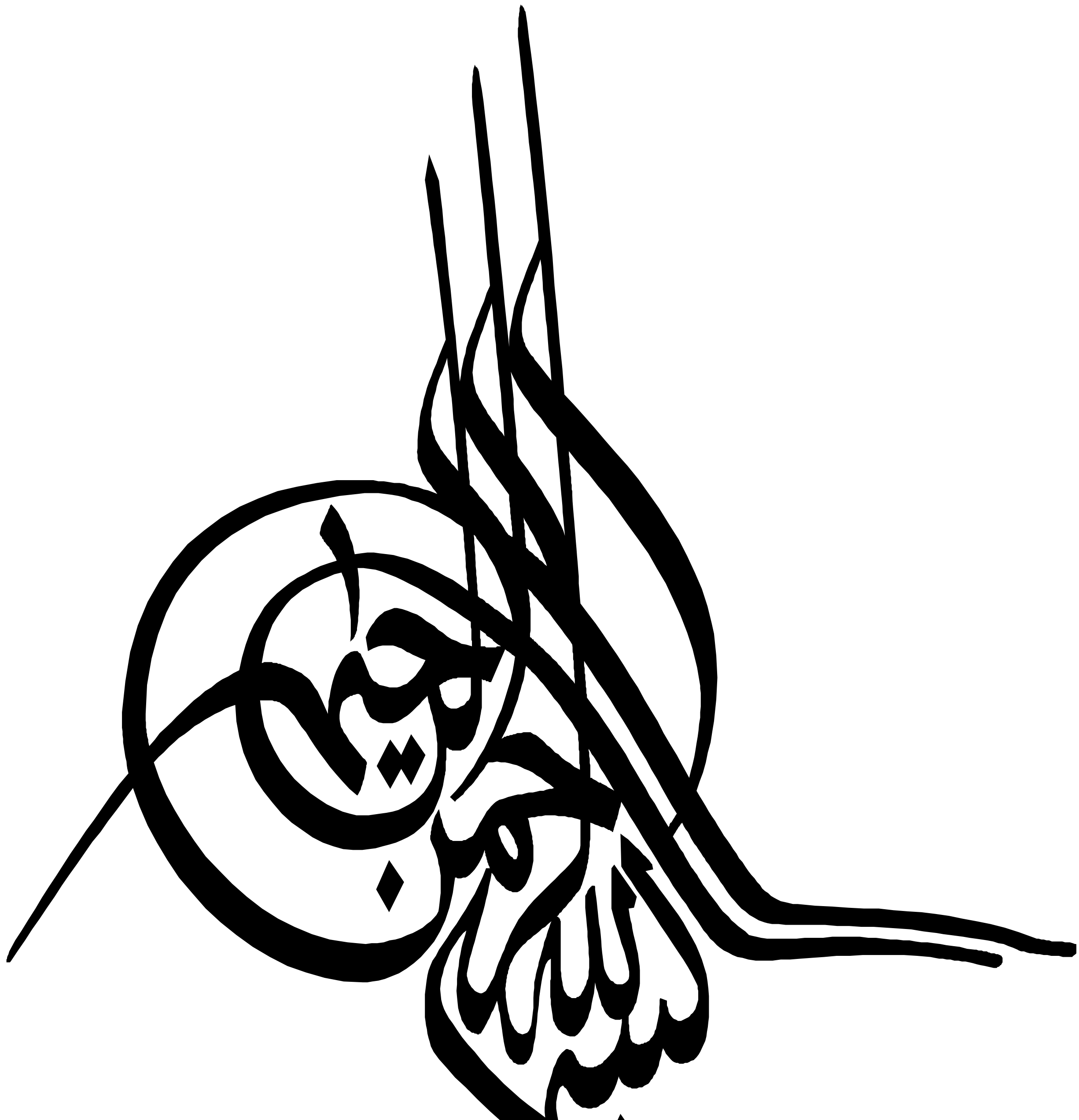
رضوان علی‌پور

اساتید راهنما :

دکتر منصور سراج

دکتر هادی بصیرزاده

بهمن ۱۳۸۷


بسم الله الرحمن الرحيم

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید

و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند

این مجموعه را به **پدر و مادر عزیزم** تقدیم می‌کنم

تقدیر و تشکر

اکنون که به لطف پروردگار به پایان مقطع دیگری از تحصیلات خود رسیده‌ام از همه عزیزانی که مرا در این راه یاری نموده‌اند تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از استاد راهنمای گرامی جناب آقای دکتر منصور سراج که با بردباری و شکیبایی فراوان و دقت بی‌نظیر خود، مرا از راهنمایی های ارزشمند خویش بهره‌مند نمودند کمال تشکر و قدردانی را دارم. از جناب آقای دکتر هادی بصیر زاده که با راهنمایی‌های موثرشان مرا مورد لطف خود قرار دادند سپاسگزارم.

وظیفه خود می‌دانم از سرکار خانم دکتر حبیبه صادقی و جناب آقای دکتر سینا هدایتیان که زحمت داوری این پایان نامه را به عهده داشتند تشکر و قدردانی کنم.

مراتب سپاس و قدرشناسی خود را نسبت به پروفسور کرم زاده ، چهره ماندگار و سرمایه معنوی ریاضی کشور ابراز می‌دارم.

از اساتید محترم گروه ریاضی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی که در طول دوران کارشناسی از محضر آنان بهره برده‌ام بی‌نهایت سپاسگذارم.

سپاس می‌گویم بودن‌ها و دل‌گرمی‌های پدر و مادر عزیزم و هم‌دلی های خواهران و برادرانم را، که وجود پرمهرشان تکیه گاه خود باوری هایم است.

از همه دوستان و هم‌کلاسی‌های صمیمی و گرامی که در طول دوران تحصیل مشوق و یاری‌گر بنده بوده‌اند نهایت تشکر و سپاسگذاری را دارم.

Faculty of Mathematical

Science and Computer

M.sc. Applied Mathematics

(Optimization)

Title:

(V,ρ) Invexity and Nonsmooth Multiobjective

By:

Rezvan Alipour

Advisors:

Dr.Mansour Saraj

Dr. Hadi BasirZadeh

Jan 2009

چکیده

نام خانوادگی: علی‌پور　　　　نام: رضوان

عنوان پایان‌نامه: (V, ρ)—**اینوکسیتی و برنامه‌ریزی چند هدفه‌ناهموار**

استاد راهنما: دکتر منصور سراج —دکتر هادی بصیرزاده

درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد　　رشته: ریاضی کاربردی　　گرایش: بهینه‌سازی

محل تحصیل: دانشگاه شهید چمران اهواز　　دانشکده: علوم ریاضی و کامپیوتر

تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۸۷/۱۱/۷　　تعداد صفحه: ۹۳

واژه‌های کلیدی:

محدب‌نما، شبه محدب، اینوکس، اینوکس نما، شبه اینوکس، (V, ρ)—اینوکسیتی، دوگان، لیپ شیتس موضعی، برنامه ریزی چند هدفه ناهموار

چکیده:

در این پایان‌نامه ابتدا توابع محدب تعمیم یافته را تعریف کرده و سپس به معرفی توابع اینوکس می‌پردازیم و توابع اینوکس تعمیم یافته و خواص آن ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در ادامه مفهوم (V, ρ)—اینوکسیتی را بیان کرده و توابع لیپ شیتس موضعی را که دارای این خاصیت باشند بررسی می‌کنیم.

برای یافتن جواب بهینه در مسائل برنامه ریزی چندهدفه ناهموار نمی‌توان از روش‌های معمول حل مسائل چندهدفه استفاده کرد. برای حل این گونه مسائل مطالعه شکل دوگان مسئله احتیاج است، بنابراین دوگان ولف و دوگان موند—ویر را مورد بررسی قرار داده و با استفاده از مفاهیم (V, ρ)—اینوکسیتی در مسائل برنامه ریزی چندهدفه ناهموار، نتایج دوگان ضعیف و قوی را بدست می آوریم.

پیش‌گفتار

توابع محدب تعمیم یافته پایه و اساس بسیاری از موضوعات مهم در زمینه‌های مختلف مانند اقتصاد، علوم مدیریت، مهندسی، آمار و دیگر علوم کاربردی می‌باشند. در سال(۱۹۴۹) ریاضیدان ایتالیایی بنام Bruno de Finetti دسته مهمی از توابع محدب تعمیم یافته را معرفی کرد که مجموعه‌های سطح پایینی آن‌ها محدب بود [۱۲]. این دسته توابع را اکنون با نام شبه محدب می‌شناسیم.

پس از آن، نویسندگان بسیاری به تعریف انواع دیگری از توابع محدب تعمیم یافته پرداختند و کاربردهای آن‌ها را در زمینه مسائل بهینه سازی برداری و اسکالر ، حساب تغییرات و نظریه کنترل بهینه و طراحی مدل‌های اقتصادی مورد مطالعه قرار دادند. در بسیاری موارد این‌گونه توابع، برخی از خواص ارزشمند توابع محدب را حفظ می‌کنند.

دسته مهمی از توابع محدب تعمیم یافته، توابع اینوکس می‌باشند. Hanson در سال (۱۹۸۱) مفهوم اینوکسیتی را به عنوان تعمیم وسیعی از محدب تعریف نمود [۱۳]. سپس Jeyakumar توابع $\rho-$اینوکس را معرفی کرد و نتایج مختلف را برای مسئله برنامه ریزی غیرخطی یک هدفه مورد مطالعه قرار داد [۱۵]. Mond و Jeyakumar مفهوم $V-$اینوکسیتی را برای تابع برداری f بیان کردند و کاربردهای آن را برای دسته مسائل برنامه ریزی چندهدفه بررسی نمودند [۱٦].

Jeyakumar هم ارزی میان نقاط زینی و بهینه را بیان کرد و قضایای دوگان را برای آن دسته از مسائل بهینه سازی غیرمحدب ناهموار که توابعشان لیپ شیتس موضعی باشد و در شرایط انواع

اینوکسیتی Hanson و Craven صدق کنند ، ارائه نمود [۱٦]. Bector شرایط بهینگی کافی را بسط داد و نتایج دوگان را تحت فرض های انواع V—اینوکسیتی به روی توابع هدف و قید، بنیان نهاد [۳].

در بسیاری از مراجع بالا نویسندگان فرض‌های دیفرانسیل‌پذیری را به‌کار برده‌اند. در این‌جا مفهوم (V, ρ)—اینوکسیتی را برای توابع ناهموار مورد مطالعه قرار می‌دهیم و بر اساس آن، نتایج دوگان برای برنامه های چند هدفه را بیان می‌کنیم.

در این پایان نامه ۴ فصل گنجانده شده است.

در فصل اول توابع محدب تعمیم یافته را بررسی می‌کنیم. در اولین بخش آن توابع محدب و خواص آن‌ها در مسائل برنامه ریزی بیان می‌شود. در دو بخش بعدی خواص توابع شبه‌محدب و محدب‌نما با ذکر مثال‌هایی آورده شده است.

در فصل دوم به معرفی توابع اینوکس می‌پردازیم. ابتدا توابع اینوکس هموار و قضایای مربوط به آن‌ها بیان می‌شود . در قسمت بعدی به تعریف توابع اینوکس تعمیم یافته می‌پردازیم و توابع شبه اینوکس و اینوکس نما را بیان می‌کنیم. سپس روابط میان تعاریف اینوکسیتی و توابع محدب تعمیم یافته را بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم اینوکسیتی در برنامه ریزی غیرخطی مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا به لزوم اینوکسیتی در شرایط بهینگی لازم و کافی می‌پردازیم. بررسی دوگان ولف و موند—ویر و قضایای ضعیف و قوی مربوط به آن ها را در بخش بعد آورده ایم. در ادامه توابع اینوکس را در برنامه‌ریزی چندهدفه بررسی می‌کنیم. نقطه کارا را تعریف نموده و مسئله وزن‌دار و شرایط بهینگی کان—تاکر را

مورد مطالعه قرار می‌دهیم. تعاریف مربوط به توابع V—اینوکسیتی در بخش آخر این فصل آورده شده است. توابع V—اینوکس نما و V—شبه اینوکس را تعریف کرده و از مفهوم توابع V—اینوکس در مسائل برنامه‌ریزی چند هدفه استفاده می‌کنیم.

در فصل چهارم از مفهوم V—اینوکسیتی در حل مسائل برنامه ریزی چندهدفه استفاده می‌کنیم. به این طریق که در ابتدا به مفهوم مشتق جهتی و زیرگرادیان می‌پردازیم. سپس توابع لیپ شیتس موضعی را تعریف کرده و مشتق جهتی تعمیم یافته را در این گونه توابع بیان می‌کنیم. در بخش بعد اینوکسیتی را در مورد توابع لیپ شیتس موضعی بررسی می‌کنیم. مفهوم (V,ρ)—اینوکسیتی درمورد توابع لیپ شیتس موضعی و روابط میان آن‌ها در بخش چهارم این فصل آورده شده است. در دو بخش آخر دوگان برداری ولف و موند—ویر و قضایای مربوط به دوگان ضعیف و قوی را در مورد توابع (V,ρ)—اینوکسیتی بیان می‌کنیم.

نتیجه‌گیری، پیشنهادات، واژه‌نامه فارسی— انگلیسی، واژه‌نامه انگلیسی— فارسی و مراجع در ادامه مطالب آورده شده است.

فهرست

فصل ۱. توابع محدب تعمیم یافته ۱

۱.۱ توابع محدب ۱

۲.۱ توابع شبه‌محدب ۸

۳.۱ توابع محدب‌نما ۱۵

فصل ۲. توابع اینوکس ۲۲

۱.۲ توابع اینوکس (هموار) ۲۲

۲.۲ تعمیم اینوکسیتی ۲۹

۳.۲ روابط میان تعاریف اینوکسیتی و محدب تعمیم‌یافته‌ها ۳۰

فصل ۳. اینوکسیتی در برنامه ریزی غیرخطی ۳۵

۱.۳ اینوکسیتی در شرایط بهینگی لازم و کافی ۳۵

۲.۳ دوگان ۳۷

۳.۳ توابع اینوکس در برنامه ریزی چندهدفه ۴۰

۴.۳ شرایط بهینگی کان—تاکر ۴۲

۵.۳ V—اینوکسیتی ۴۶

فصل ۴ V—اینوکسیتی و برنامه‌ریزی چندهدفه ناهموار ۴۹

۱.۴ زیرگرادیان و مشتق جهتی ۴۹

۲.۴ توابع لیپ شیتس ۵۳

۳.۴ اینوکسیتی توابع لیپ شیتس ۵۵

۴.۴ (V, ρ)—اینوکسیتی ۵۹

۵.۴ دوگان برداری ولف ۶۷

۶.۴ دوگان برداری موند—ویر ۷۲

نتیجه گیری ۷۸

پیشنهادات ۷۹

واژه نامه فارسی—انگلیسی ۸۰

واژه نامه انگلیسی— فارسی ۸۵

مراجع ۹۰

فصل ۱

توابع محدب تعمیم یافته

۱.۱ توابع محدب

تعریف ۱.۱.۱ مجموعه $C \subseteq R^n$ را محدب[۱] گوییم هرگاه برای هر $x, u \in C$ و $\lambda \in [۰, ۱]$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\lambda x + (۱ - \lambda)u \in C.$$

تعریف ۲.۱.۱ تابع f روی مجموعه محدب $C \subseteq R^n$ ، محدب است هر گاه $\forall x, u \in C$ و$\lambda \in [۰, ۱]$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$f(\lambda x + (۱ - \lambda)u) \leq \lambda f(x) + (۱ - \lambda)f(u).$$

[۱] convex

اگر نامساوی بالا برای $x \neq u$ و $\lambda \in (0,1)$ به طور اکید برقرار باشد، f اکیداً محدب است.

تعریف ۳.۱.۱ به تابع $f : C \to R$ که در آن $C \subseteq R^n$ محدب می‌باشد ، مقعر(اکیداً مقعر) گوییم اگر و فقط اگر $-f$ محدب (اکیداً محدب) باشد.

یک شرط معادل برای محدب بودن تابع $f : C \to R$ که اپی‌گراف [2] آن چنین تعریف می شود:

$$epif = \{(x, \alpha) \in C \times R : f(x) \leq \alpha\}$$

آن است که اپی‌گراف f در $R^{(n+1)}$ محدب باشد.

در مورد توابع مقعر هیپوگراف [3] آن در نظر گرفته می شود:

$$hypof = \{(x, \alpha) \in C \times R : f(x) \geq \alpha\}.$$

بنابراین هیپوگراف یک تابع مقعر در $R^{(n+1)}$ محدب می‌باشد.

در شکل بعد با توجه به نمودار اپی‌گراف و هیپوگراف چند تابع، به تشخیص محدب یا مقعر بودن آن توابع پرداخته‌ایم.

---

[2] epigraph
[3] hypograph

در شکل (a) اپی گراف و هیپوگراف f مجموعه های محدب نیستند. در شکل (b) اپی‌گراف f محدب است . در شکل (c) هیپوگراف f مجموعه‌ای محدب است.

قضیه ۴.۱.۱ تابع $f : C \to R$ که $C \subseteq R^n$ محدب می‌باشد را در نظر می گیریم . در این صورت f محدب است اگر و تنها اگر اپی گراف f یک مجموعه محدب باشد.

اثبات:

فرض می‌کنیم f محدب است و $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in epif$ می‌باشند. بنابراین $x_1, x_2 \in C$ و $y_2 \geq f(x_2)$, $y_1 \geq f(x_1)$. فرض می‌کنیم $\lambda \in (0, 1)$ باشد، در این صورت :

$$\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$$

که نامساوی آخر از محدب بودن f نتیجه می‌شود. توجه داریم که $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in C$ ، پس $[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2] \in epif$ است و بنابراین اپی‌گراف f محدب است.

برعکس:

فرض می‌کنیم اپی‌گراف f محدب است و $x_1, x_2 \in C$. در این صورت $[x_1, f(x_1)] \in epif$ و $[x_2, f(x_2)] \in epif$. بنا به محدب بودن اپی‌گراف f ، داریم :

$$[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)] \in epif \qquad \forall \lambda \in (0, 1)$$

به عبارت دیگر

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \geq f[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2] \qquad \forall \lambda \in (0, 1)$$

بنابراین f محدب است.

□

تعریف ۵.۱.۱ اگر f روی مجموعه محدب باز $C \subseteq R^n$ دیفرانسیل پذیر باشد در این صورت f روی C محدب است اگر و فقط اگر

$$f(x) - f(u) \geq (x-u)^T \nabla f(u), \qquad \forall x, u \in C.$$

که $\nabla f(u)$ گرادیان f در $u \in C$ است. [۱۸]

محدب بودن را در یک نقطه نیز می‌توان تعریف کرد :

f را در $u \in C$ محدب گوییم اگر و فقط اگر

$$f(\lambda x + (1-\lambda) u) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(u), \qquad \forall x \in C, \lambda \in [0, 1].$$

به علاوه، اگر f در u دیفرانسیل پذیر باشد ، در این‌صورت f در u محدب است اگر و فقط اگر

$$f(x) - f(u) \geq (x-u)^T \nabla f(u) \qquad \forall x \in C.$$

مشخصه دیگر توابع محدب دیفرانسیل پذیر، تعمیم خاصیت یکنوایی مشتق مرتبه اول یک تابع یک متغیره می‌باشد [۱۸] :

تعریف ۶.۱.۱ اگر f روی مجموعه محدب باز $C \subseteq R^n$ دیفرانسیل پذیر باشد در این صورت f روی C محدب است اگر و فقط اگر:

$$(x-u)^T [\nabla f(x) - \nabla f(u)] \geq 0. \qquad \forall x, u \in C$$

اگر تابع مورد نظر دو بار پیوسته دیفرانسیل پذیر باشد در این صورت برای تشخیص محدب بودن تابع ، روش مفید دیگری نیز وجود دارد که به وسیله مشتق مرتبه دوم در یک نقطه بیان می‌شود:

تعریف ۷.۱.۱ [۱۰] اگر f دو بار پیوسته دیفرانسیل پذیر روی مجموعه محدب باز $C \subseteq R^n$ باشد در این صورت f روی C محدب است اگر و فقط اگر ماتریس هسین [۴] $\nabla^2 f(x)$ برای هر $x \in C$ مثبت نیمه معین [۵] باشد.

این شیوه را نمی‌توانیم در مورد توابع اکیداً محدبی که ماتریس هسین $\nabla^2 f(x)$ برای $x \in C$ مثبت معین[۶] باشد، تعمیم دهیم. در واقع این شرط کافی اکیداً محدب بودن است نه شرط لازم.
به عنوان مثال تابع $f(x) = x^4$ را روی R در نظر می‌گیریم. به وضوح مشتق مرتبه دوم $f(x)$ در مبداء صفر است اما این تابع اکیداً محدب است.

تعریف ۸.۱.۱ مسئله مینیمم سازی $f(x)$ روی R^n را در نظر می گیریم و فرض می کنیم $\bar{x} \in R^n$ باشد. اگر برای همه $x \in R^n$ ، $f(\bar{x}) \leq f(x)$ باشد در این صورت $\bar{x}$ را مینیمم کلی[۷] می‌نامیم. اگر یک ϵ−همسایگی $N_\epsilon(\bar{x})$ در اطراف $\bar{x}$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in N_\epsilon(\bar{x})$ رابطه $f(\bar{x}) \leq f(x)$ برقرار باشد، در این صورت $\bar{x}$ را یک مینیمم نسبی [۸] می‌نامیم. به وضوح هر مینیمم کلی، مینیمم نسبی نیز می‌باشد.

در این جا بعضی از خواص توابع محدب را ذکر می‌کنیم .

فرض کنیم $f : C \to R$ روی مجموعه محدب $C \subseteq R^n$ محدب باشد. در این صورت:

۱) مجموعه‌های سطح پایینی [۹] $\forall \alpha \in R$ $L_f(\alpha) = \{x \in C : f(x) \leq \alpha\}$ مجموعه های محدب در R^n می‌باشند.

---

[۴] Hessian
[۵] positive semi-definite
[۶] positive definite
[۷] global
[۸] local
[۹] lower level sets

۲) ماکزیمم f در طول هر پاره خط در یک نقطه انتهایی رخ می‌دهد.

۳) هر مینیمم نسبی f یک مینیمم کلی است.

۴) اگر f دیفرانسیل پذیر باشد (روی مجموعه محدب بازC) هر نقطه ایستا[۱۰] یک مینیمم کلی است. یعنی:

$$\nabla f(\bar{x}) = 0 \Longrightarrow f(\bar{x}) \leq f(x). \qquad \forall x \in C$$

مساله بهینه سازی مقید(مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی) زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(P) \qquad\qquad Minimize\ f(x)$$

$$Subject\ to \quad g_i(x) \leq 0,\ i = 1, \ldots, m$$

که $f : C \to R$ و $g_i : C \to R, \forall i = 1, \ldots, m$ و $C \subseteq R^n$ می‌باشند. اگر همه توابع f و $g_i(i = 1, \ldots, m)$ روی مجموعه محدب C ، محدب باشند به این مسئله یک مسئله برنامه‌ریزی محدب می‌گوییم.

در این جا بعضی از خواص مسئله برنامه‌ریزی محدب را ذکر می‌کنیم .

فرض کنیم (P) یک مسئله برنامه‌ریزی محدب باشد. در این صورت:

۱) مجموعه جوابهای شدنی محدبند پس مجموعه جواب های بهینه هم محدبند.

۲) هر مینیمم نسبی یک مینیمم کلی است.

[۱۰] stationary

۳) شرایط بهینگی کروش—کان—تاکر [۱۱] برای یک مینیمم (کلی) کافی است.

شرایط بهینگی کروش—کان—تاکر بیان می‌کند با فرض این که توابع f و $g_i(i = ۱,\ldots,m)$ دیفرانسیل پذیر باشند و برنامه غیرخطی (P) جواب بهینه $x^* \in C$ داشته باشد، باید بردار $\lambda \in R^m$ موجود باشد به طوری که:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=۱}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x^*) = ۰$$

$$\lambda^T g(x^*) = ۰$$

$$\lambda \geq ۰.$$

(شرایط کروش—کان—تاکر)

۴) دوگان مسئله اولیه و روابط دوگان (D) و اولیه (P) قابل اثبات می‌باشند.

برای مثال می‌توان مسئله دوگان زیر از مسئله اولیه (P) که توسط Wolfe ارائه شده است ، را بیان کرد. [۳۱]

$$(D) \qquad Maximize\ f(u) + \lambda^T g(u)$$

$$Subject\ to \quad \nabla f(u) + \lambda^T \nabla g(u) = ۰$$

$$\lambda \geq ۰.$$

[۱۱] Karoush-Kuhn-Tucker

ولف نشان داد که اگر (P) یک برنامه محدب باشد، مقدار تابع هدف به ازای هر جواب شدنی دوگان کمتر یا مساوی مقدار تابع هدف به ازای هر جواب شدنی اولیه است. این نتیجه به دوگان ضعیف مشهور است. به علاوه با برقراری یکی از قیود، دوگان قوی برقرار است. بنابراین اگر x^* جواب بهین مسئله اولیه باشد در این‌صورت $\lambda^* \in R^m$ وجود دارد به طوری که (x^*, λ^*) جواب بهین مسئله دوگان است.[۳۰]

۵) اگر f اکیداً محدب باشد، مینیمم (P) یکتاست.

۲.۱ توابع شبه محدب

در بررسی‌ها مشاهده می‌شود که توابع نامحدبی وجود دارند که دارای بعضی ازخواص توابع محدب می‌باشند. به عنوان مثال اگر تبدیل یکنوای $h(f(x))$ از تابع محدب (مقعر)$f(x)$ که h صعودی است را در نظر بگیریم، می‌بینیم که $h(f(x))$ اغلب محدب (مقعر) نیست در صورتی که مجموعه‌های سطح پایینی (بالایی) آن محدبند.

در واقع اولین خاصیت توابع محدب، نتیجه مستقیم تحدب مجموعه‌های $L_f(\alpha)$ می‌باشد. این تحدب منحصر به توابع محدب نیست. مثلاً تابع $f(x) = x^۳$ محدب و مقعر نیست اما مجموعه‌های سطح پایینی آن محدبند. این واقعیت منجر به تعریف دسته توابع شبه محدب[۱۲] توسط Finetti [۱۲] شد. این دسته اکیداً شامل دسته توابع محدب است.

قضیه ۱.۲.۱ تابع تعریف شده روی مجموعه محدب $C \subseteq R^n$ ، روی C شبه محدب است اگر و فقط اگر مجموعه‌های سطح پایینی آن

$$L_f(\alpha) = \{x \in C : f(x) \leq \alpha\} \ \forall \alpha \in R$$

مجموعه‌هایی محدب باشند.

[۱۲] quasi-convex

اثبات:

فرض کنیم f روی C شبه محدب است و $x_1, x_2 \in L_f(\alpha)$ باشند، آنگاه :

$$f(x_1) \leq \alpha, f(x_2) \leq \alpha$$

بنابراین

$$max\{f(x_1), f(x_2)\} \leq \alpha$$

فرض می‌کنیم $\lambda \in (0, 1)$, $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$ باشد. پس $x \in C$ است و بنا بر شبه محدب بودن f خواهیم داشت $f(x) \leq max\{f(x_1), f(x_2)\}$ پس $x \in L_f(\alpha)$. بنابراین $L_f(\alpha)$ محدب است.

برعکس:

فرض کنیم $L_f(\alpha)$ برای هر مقدار حقیقی α محدب باشد و $x_1, x_2 \in C$. به‌علاوه فرض می‌کنیم $\lambda \in (0, 1)$ و $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2$.

با فرض این که $max\{f(x_1), f(x_2)\} = \alpha$ باشد، آن‌گاه $x_1, x_2 \in L_f(\alpha)$ خواهند بود . از آنجا که $L_f(\alpha)$ یک مجموعه محدب است ، پس : $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2 \in L_f(\alpha)$ و

$$f(x) = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \leq \alpha = max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

لذا f شبه محدب است .

□