دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم پایه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی- گرایش جبر

بررسی خواص متناهی و موضعاً متناهی ضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا ریسمانچیان

استاد مشاور:

دکتر حمید محمدزاده

پژوهشگر:

سمیه حیدری سورشجانی

مهر ماه ۱۳۸۹

تقدیم به:

مادرم ضرب آهنگ احساس در پس پنجره تنهائی ام، شب زنده دار شب های اضطرابم، به آنکه هر آنچه مهربانی است بر من ارزانی داشت.

پدرم تنها حامی ایام کودکی... جوانی ام، به آنکه زیر بار سنگین زندگی چون چتری گسترده شد تا به تنهائی تحمل بار نماید و تنها فراغت خاطر مرا می طلبید.

تشکر و قدردانی

حمد بی‌پایان خداوند منان را که ما را لایق معلمانی دانسته که عظمت آن‌ها بی منتها، هدایتشان بی نظیر و همنوایی با آنان سعادت است.

در ابتدا از اولین و بزرگترین معلمان زندگیم، **پدر و مادر بزرگوارم** که مرا به جان پروردند و امید رسیدن به افق‌های روشن را در دلم شکوفا ساختند، از صمیم قلب تشکر می‌کنم.

بر خود لازم می‌دانم به پاس زحمات استاد راهنمای گرامی‌ام، **جناب آقای دکتر محمدرضا ریسمانچیان** که با سعه ی صدر و دقت نظرشان باعث هرچه پربار شدن این پایان نامه شدند، نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم.

همچنین از استاد مشاور گرامی‌ام، **جناب آقای دکتر حمید محمدزاده** که با نظرات و رهنمودهای ارزشمند خود مرا یاری نمودند، سپاسگذارم.

از **جناب آقای دکتر غلامرضا رضایی زاده** و **سرکار خانم دکتر ندا آهنجیده** که قبول زحمت کرده، داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند و با دقت و حوصله فراوان در بازخوانی و تصحیح این پایان نامه مرا یاری دادند تشکر می‌کنم.

هم چنین، از اساتید ارجمندم، **جناب آقای دکتر خدابخش حسامی**، **جناب آقای دکتر علیرضا نقی پور**، **سرکار خانم دکتر تاتیانا حسامی** و **جناب آقای دکتر علی حاجی زمانی** که در دوران تحصیل افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان از تمام دوستان خوبم برای همه همراهی‌ها و خاطرات خوب با هم بودن سپاسگذارم.

چکیده

ما در این پایان‌نامه توصیفی از سری مشتق و سری مرکزی پایینی حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها ارائه می‌دهیم. همچنین ثابت می‌کنیم که حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروه‌های موضعاً متناهی، موضعاً متناهی است و نمای این حاصلضرب برحسب نمای گروه‌های داده شده محدود می‌شود. در ادامه ثابت می‌کنیم که اگر G گروهی پوچتوان از کلاس حداکثر ۳ و نمای متناهی باشد، نمای $G \otimes G$، نمای G را عاد می‌کند. در پایان حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروه‌های چنددوری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: *حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها، مربع تانسوری ناآبلی گروه‌ها، جفت متقاطع و مدول متقاطع.*

فهرست مطالب

فهرست نمادها

مجموعه اعداد صحیح	$\mathbb{Z}$
مرکز گروه G	$Z(G)$
نمای گروه G	$\exp(G)$
هسته	$\ker$
تصویر	im
i-امین جمله از سری مرکزی پایینی گروه G	$\gamma_i(G)$
i-امین جمله از سری مشتق گروه G	$G^{(i)}$
کلاس پوچتوانی گروه G	$\operatorname{cl}(G)$
حاصلضرب آزاد خانواده گروه‌های $\{G_i\}_{i\in I}$	$\prod^*_{i\in I} G_i$
مجموع مستقیم R-مدول‌های، M و N	$M \oplus N$
حاصلضرب مستقیم خانواده R-مدول‌های، $\{M_i\}_{i\in I}$	$\prod_{i\in I} M_i$
زیرمجموعه‌ای از $\prod_{i\in I} M_i$ شامل رشته‌هایی به‌صورت $(x_i)_{i\in I}$ که به‌جز تعداد متناهی $i \in I$، $x_i = 0$	$\coprod_{i\in I} M_i$
حاصلضرب دکارتی مجموعه‌های A و B	$A \times B$
R-مدول چپ A	${}_RA$
R-مدول راست A	B_R
حاصلضرب نیم‌مستقیم گروه G بوسیله H	$G \rtimes H$
حاصلضرب تانسوری $\mathbb{Z}$-مدول‌های M و N	$M \otimes_{\mathbb{Z}} N$
حاصلضرب تانسوری R-مدول‌های ${}_RN$ و M_R	$M \otimes_R N$
حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروه‌های ناآبلی M و N	$M \otimes N$
حاصلضرب خارجی گروه‌های M و N	$M \wedge N$
مجموعه همه همریختی‌های گروهی از G به A	$\operatorname{Hom}(G, A)$
i-امین همولوژی گروه G با ضرایب در G-مدول A	$H_i(G, A)$

i- امین کوهمولوژی گروه G با ضرایب در G- مدول A	$H^i(G,A)$
نگاشت هم‌تحدید $H^۲(H,A) \to H^۲(G,A)$	$\mathrm{Cor}_{H,G}$
ضربگر شور گروه G	$M(G)$
ضربگر شور جفت (G,N)	$M(G,N)$
c- ضرب‌گر پوچتوان	$M^{(C)}(G)$
حد مستقیم خانواده R- مدول‌های، $\{M_i\}_{i\in I}$	$\lim_{\to}\{M_i\}$

مقدمه

حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها ریشه در K-نظریه جبری و توپولوژی دارد. حالت‌های خاصی از حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها سال ۱۹۷۶ در کارهای دنیس [1] [۱۱] و لو [2] [۲۱] مشاهده می‌شود ولی حالت کلی آن در سال ۱۹۸۴ برای اولین بار در کارهای براون [3] و لودی[4] [۸،۷] مورد بررسی قرار گرفت. مفهوم مربع تانسوری ناآبلی نیز حالت خاصی از حاصلضرب تانسوری ناآبلی است.
براون، جانسون[5] و ربرتسون[6] [۹] در سال ۱۹۸۷ در مقاله‌ای قضایا و مباحث جالبی را در مورد حاصلضرب تانسوری ناآبلی ارائه دادند که باعث معرفی هر چه بیشتر این موضوع به ریاضی‌دانان شد، هم‌چنین این مقاله به‌عنوان یک منبع اولیه برای حاصلضرب تانسوری ناآبلی محسوب می‌شود.
یکی از مهمترین بخش‌های نظریه گروه‌ها، از حاصلضرب تانسوری ناآبلی این است که کدام خصوصیت گروهی نسبت به حاصلضرب تانسوری ناآبلی بسته می‌ماند. الیس [7] [۱۴] ثابت کرد حاصلضرب تانسوری ناآبلی از گروه‌های متناهی(p-گروه)، متناهی(p-گروه) است. بلیت[8] و مرس[9] [۵] نشان دادند که گروه‌های چنددوری نسبت به مربع تانسوری ناآبلی بسته هستند. هم‌چنین ویشر [10] [۳۱] پوچتوانی و حل‌پذیری حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها را در حالت‌های خاصی بررسی کرده است.
ما در این پایان‌نامه ابتدا مطالبی از جبر پیشرفته و نظریه گروه‌ها از جمله عمل گروه‌ها بر هم، ضربگر شور و ... را یادآوری می‌کنیم، سپس مفهوم حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها را به‌طور دقیق بیان می‌کنیم و به مطالعه خواص و قضایای مقدماتی آن می‌پردازیم. سپس پوچتوانی و حل‌پذیری حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها را در شرایطی خاص از گروه‌ها مورد بررسی قرار می‌دهیم، هم‌چنین ثابت می‌کنیم حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروه‌های موضعا متناهی، موضعاً متناهی است. در ادامه ساختاری را معرفی می‌کنیم که به ما کمک می‌کند

[1] Dennis
[2] Lue
[3] Brown
[4] Loday
[5] Johnson
[6] Robertson
[7] Ellis
[8] Blyth
[9] Morse
[10] Visscher

رابطه‌ای بین نمای یک گروه G با نمای مربع تانسوری ناآبلی آن در شرایط خاصی از گروه G بدست آوریم. در نهایت حاصلضرب تانسوری ناآبلی گروه‌های چنددوری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی و پیش‌نیازها

این فصل را به مرور برخی مفاهیم پایه و مقدماتی که در فصل‌های بعدی استفاده می‌شوند، اختصاص می‌دهیم. در این بخش مفاهیم پایه‌ای عمل گروه‌ها را بیان می‌کنیم.

۱.۱ عمل گروه‌ها

تمامی مباحث این بخش از منبع [۴ و ۲۹] آورده شده است.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید H و G دو گروه باشند. گوییم G بر H از چپ عمل می‌کند، هرگاه به ازای هر $g \in G$ و هر $h \in H$ عضو یکتای $^{g}h \in H$ موجود باشد به‌قسمی که به ازای هر $g, g_۱, g_۲ \in G$ و $h, h_۱, h_۲ \in H$ شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) $^{۱_G}h = h$؛

(۲) $^{g_۱}(^{g_۲}h) = {}^{g_۱g_۲}h$؛

(۳) $^{g}(h_۱h_۲) = {}^{g}h_۱{}^{g}h_۲$.

اگر به ازای هر $g \in G$ و هر $h \in H$، $^{g}h = h$ باشد، آنگاه گوییم G بر H به‌صورت بدیهی عمل می‌کند. هم‌چنین اگر $G = H$ و به ازای هر $g, g' \in G$، $^{g}g' = gg'g^{-۱}$، آنگاه گوییم G بر خودش به‌صورت مزدوج عمل می‌کند. به‌طور مشابه می‌توانیم عمل از راست یک گروه بر گروهی دیگر را تعریف کنیم.

قرارداد. ما در این پایان‌نامه تمام اعمال را از چپ فرض می‌کنیم و به‌جای واژه عمل از چپ فقط از واژه عمل استفاده می‌کنیم. هم‌چنین همواره فرض می‌کنیم که هر گروه بر خودش به‌صورت مزدوج عمل می‌کند.

تعریف ۲.۱.۱. اگر G یک گروه باشد و $x, y \in G$، در این صورت $[x, y]$ را جابه‌جاگر ساده y, x از وزن ۲ نامیم و به‌صورت $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$ تعریف می‌کنیم. هم‌چنین اگر $x_1, \cdots, x_n \in G$ باشند، آنگاه $[x_1, \cdots, x_n]$ را جابه‌جاگر ساده از وزن n نامیم که به‌صورت استقرایی زیر تولید می‌شود:

$$[x_1, x_2] = x_1x_2{x_1}^{-1}{x_2}^{-1}\ ,\ [x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3]\ ,\ \cdots$$
$$,\ [x_1, \cdots, x_n] = [[x_1, \cdots, x_{n-1}], x_n].$$

لم ۳.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه باشد و $x, y, z \in G$، آنگاه گزاره‌های زیر برقرار هستند:*

(۱) ${}^{x}y = [x, y].y$؛

(۲) $[xy, z] = {}^{x}[y, z][x, z]$؛

(۳) $[x, yz] = [x, y]^{y}[x, z]$؛

(۴) $[y, x]^{-1} = [x, y] = {}^{xy}[x^{-1}, y^{-1}]$؛

(۵) $[x^{-1}, y] = {}^{x^{-1}}[x, y]^{-1} = [x^{-1}, [x, y]^{-1}].[x, y]^{-1}$؛

(۶) $[x, y^{-1}] = {}^{y^{-1}}[x, y]^{-1} = [y^{-1}, [x, y]^{-1}].[x, y]^{-1}$؛

(۷) $[x^{-1}, y^{-1}] = [x^{-1}, [y^{-1}, [x, y]]].[y^{-1}, [x, y]].[x^{-1}, [x, y]].[x, y]$.

برهان. تمام این گزاره‌ها با محاسبه به سادگی به‌دست می‌آیند.

□

گزاره ۴.۱.۱. *فرض کنید G و H دو گروه باشند که بر یکدیگر عمل می‌کنند. در این صورت به ازای هر $g, g_2, g_1 \in G$ و $h, h_2, h_1 \in H$ روابط زیر برقرار هستند:*

(۱) ${}^{g_2g_1}g = {}^{g_2}({}^{g_1}({}^{{g_2}^{-1}}g))$؛

(۲) ${}^{h_2h_1}h = {}^{h_2}({}^{h_1}({}^{{h_2}^{-1}}h))$؛

(۳) ${}^{h_2h_1}g = {}^{h_2}({}^{h_1}({}^{{h_2}^{-1}}g))$؛

(۴) ${}^{g_2g_1}h = {}^{g_2}({}^{g_1}({}^{{g_2}^{-1}}h))$؛

(۵) ${}^{hg_1}g = {}^{h}({}^{g_1}({}^{h^{-1}}g))$؛

(۶) ${}^{gh_1}h = {}^{g}({}^{h_1}({}^{g^{-1}}h))$.

برهان. با استفاده از تعریف عمل گروه‌ها این تساوی‌ها ثابت می‌شوند.

□

۲.۱ گروه‌های پوچتوان، حل‌پذیر و چنددوری

تمامی مباحث این بخش از منبع [۲۷ و ۳۲] آورده شده است.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. $Z(G)$ مرکز گروه G، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z(G) = \{z \in G | gz = zg\ ,\ \forall g \in G\}.$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد و $G_0 = G$ و $\cdots$ و G_n زیرگروه‌هایی از آن باشند. در این صورت دنباله‌ای متناهی از زیرگروه‌های G مانند

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_n = \{1\}$$

را سری زیرنرمال گروه G می‌نامیم، اگر به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $G_i \trianglelefteq G_{i-1}$. هم‌چنین سری فوق را نرمال نامیم، هرگاه به ازای هر $1 \leq i \leq n$، $G_i \trianglelefteq G$.

تعریف ۳.۲.۱. سری نرمال $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_n$ را یک سری مرکزی برای G نامیم، هرگاه به ازای هر $0 \leq i \leq n-1$، G_i/G_{i+1} در مرکز G/G_{i+1} قرار داشته باشد.

تعریف ۴.۲.۱. گروه G را پوچتوان نامیم، هرگاه دارای یک سری مرکزی به‌صورت

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_n = \{1\}$$

باشد. طول کوتاهترین سری مرکزی برای G را کلاس پوچتوانی G نامیم و با $\mathrm{cl}(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. یک سری از زیرگروه‌های G را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$\gamma_1(G) = G$ و $\gamma_2(G) = [G, G] = G'$ و به همین نحو برای هر عدد طبیعی i، $\gamma_{i+1}(G) = [\gamma_i(G), G]$.
بنابراین یک سری از زیرگروه‌های نرمال G به‌صورت

$$G = \gamma_1(G) \supseteq \gamma_2(G) \supseteq \cdots \supseteq \cdots$$

به‌دست می‌آوریم که آن را سری مرکزی پایینی G نامیم.

گزاره ۶.۲.۱. *گروه G پوچتوان از کلاس حداکثر n است اگر و فقط اگر به ازای عدد طبیعی n، سری مرکزی پایینی پس از n مرحله به $\{1\}$ ختم شود.*

برهان. به منبع [۳۲] مراجعه کنید.

□

لم ۷.۲.۱. *گروه متناهی G پوچتوان است اگر و فقط اگر حاصلضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلوی خود باشد.*

برهان. به منبع [۳۲] مراجعه کنید.

□

تعریف ۸.۲.۱. گروه G حل‌پذیر نامیده می‌شود، اگر یک سری متناهی از زیرگروه‌های G مانند

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_n = \{1\},$$

وجود داشته باشد به‌قسمی که به ازای هر $1 \leq i \leq n$ ،

(۱) $G_i \trianglelefteq G_{i-1}$؛

(۲) G_{i-1}/G_i آبلی باشد.

طول کوتاهترین سری به‌صورت سری بالا که سری آبلی G نامیده می‌شود را طول حل‌پذیری G می‌نامیم.

تعریف ۹.۲.۱. یک گروه حل‌پذیر از طول حل‌پذیری ۲ را فراآبلی نامیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. قرار می‌دهیم $G^{(1)} = G' = [G, G]$(که زیرگروه مشتق G نامیده می‌شود). به ازای هر $i \geq 1$،

$$G^{(i)} = (G^{(i-1)})' = [G^{(i-1)}, G^{(i-1)}]$$

را i-امین زیرگروه مشتق G می‌نامیم. از این رو سری زیرگروه‌های مشتق به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} = G' \supseteq \cdots \supseteq G^{(i)} \supseteq \cdots ,$$

به‌قسمی که $G^{(i)} \trianglelefteq G^{(i-1)}$.

قضیه ۱۱.۲.۱. *گروه G حل‌پذیر است اگر و فقط اگر به ازای یک عدد صحیح مثبت n، $G^{(n)} = \{1\}$.*

برهان. به منبع [۳۲] مراجعه کنید.

□

تعریف ۱۲.۲.۱. گروه G چنددوری نامیده می‌شود، هرگاه G دارای یک سری نرمال

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \cdots \supseteq G_n = \{1\},$$

از زیرگروه‌ها باشد به‌قسمی که به ازای هر $1 \leq i \leq n$، G_{i-1}/G_i گروهی دوری باشد.

لم ۱۳.۲.۱. *گروه‌های چنددوری نسبت به زیرگروه، تصویر همریخت و توسیع بسته هستند.*

برهان. به منبع [۳۲] مراجعه کنید.

□

۳.۱ حاصلضرب تانسوری معمولی

تمامی مباحث این بخش از منبع [۱۸] آورده شده است.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید R یک حلقه یکدار باشد. یک گروه آبلی M یک R-مدول چپ نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $r \in R$ و هر $m \in M$ عضو یکتای rm از M موجود باشد به‌قسمی که شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) به ازای هر $r, s \in R$ و $m \in M$، $(r+s)m = rm + sm$؛

(۲) به ازای هر $r, s \in R$ و $m \in M$، $(rs)m = r(sm)$؛

(۳) به ازای هر $r \in R$ و $m', m \in M$، $r(m+m') = rm + rm'$؛

(۴) $۱m = m$ برای هر $m \in M$ که منظور از ۱ عنصر همانی حلقه R است.

که آن را با ${}_RM$ نشان می‌دهیم.
به‌طور مشابه R-مدول راست تعریف می‌شود، که اگر M یک R-مدول راست باشد آن را با M_R نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید A_R و ${}_RB$ مدول‌هایی روی حلقه R باشند و C یک گروه آبلی جمعی باشد. یک نگاشت خطی میانی از $A \times B$ به C، یک تابع $\phi : A \times B \to C$ است به‌قسمی که، به ازای هر $a, a_۱ \in A$، $b, b_۱ \in B$ و $r \in R$، شرایط زیر برقرار باشند:

(۱) $\phi(a + a_۱, b) = \phi(a, b) + \phi(a_۱, b)$؛

(۲) $\phi(a, b + b_۱) = \phi(a, b) + \phi(a, b_۱)$؛

(۳) $\phi(ar, b) = \phi(a, rb)$.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید A_R و ${}_RB$ مدول‌هایی روی حلقه R باشند و F گروه آبلی آزاد روی مجموعه $A \times B$ باشد. هم‌چنین K زیرگروه F تولید شده توسط عضوهایی به‌صورت زیر باشد:

(۱) $(a + a_۱, b) - (a, b) - (a_۱, b)$؛

(۲) $(a, b + b_۱) - (a, b) - (a, b_۱)$؛

(۳) $(ar, b) - (a, rb)$،

که در آن $a, a_1 \in A$، $b, b_1 \in B$ و $r \in R$. در این صورت گروه خارج قسمتی F/K حاصلضرب تانسوری از A و B نامیده می‌شود و با $A \otimes_R B$ نشان داده می‌شود. به‌جای هم‌مجموعه $(a,b)+K$ از عضو (a,b) در F از نماد $a \otimes b$ استفاده می‌شود.
توجه می‌کنیم که در تعریف ۱.۳.۳، مولدهای $a \otimes b$ از $A \otimes_R B$، که $a, a_1 \in A$، $b, b_1 \in B$ و $r \in R$ در روابط زیر صدق می‌کنند:

(۱) $(a+a_1) \otimes b = a \otimes b + a_1 \otimes b$؛

(۲) $a \otimes (b+b_1) = a \otimes b + a \otimes b_1$؛

(۳) $ar \otimes b = a \otimes rb$.

همچنین هنگامی که R حلقه اعداد صحیح باشد، یعنی A و B گروه‌هایی آبلی باشند، به‌جای $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ از نماد $A \otimes B$ استفاده می‌کنیم.

قضیه ۴.۳.۱. *فرض کنید A_R و $_RB$ مدول‌هایی روی حلقه R باشند و C یک گروه آبلی جمعی باشد. اگر $\phi : A \times B \to C$ یک نگاشت خطی میانی باشد، آنگاه همریختی منحصر به‌فردی مانند $\bar{\phi} : A \otimes_R B \to C$ وجود دارد به‌قسمی که نمودار زیر را تعویض‌پذیر می‌کند:*

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\phi"'] & & A \otimes B \arrow[dl, "\bar{\phi}"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

یعنی $\bar{\phi} i = \phi$، که $i : A \times B \to A \otimes_R B$ به ازای هر $a \in A$ ، $b \in B$، به‌وسیله $(a,b) \mapsto a \otimes b$ تعریف می‌شود.
توجه می‌کنیم که با استفاده از تعریف ۱.۳.۳، i نگاشت خطی میانی است.

برهان. به منبع [۱۸] مراجعه کنید.

□

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید R یک حلقه جابجایی باشد و A_R و B_R و C_R مدول‌هایی روی R باشند. یک نگاشت دو خطی از $A \times B$ به C، یک تابع $\phi : A \times B \to C$ است که به ازای هر $a, a_1 \in A$، $b, b_1 \in B$ و $r \in R$ در شرایط زیر صدق کند:

(۱) $\phi(a+a_1, b) = \phi(a,b) + \phi(a_1, b)$؛

(۲) $\phi(a, b+b_1) = \phi(a,b) + \phi(a, b_1)$؛

(۳) $\phi(ar, b) = r\phi(a,b) = \phi(a, rb)$.

اگر $i : A \times B \to A \otimes B$ مشابه با قضیه ۴.۳.۱ تعریف شده باشد، i یک نگاشت دو خطی است. بدین ترتیب قضیه ۴.۳.۱ را می‌توانیم به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

قضیه ۶.۳.۱. *فرض کنید A و B و C مدول‌هایی روی حلقه جابجایی R باشند. اگر $\phi : A \times B \to C$ یک نگاشت دو خطی باشد، آنگاه همریختی R - مدولی منحصر به‌فردی مانند $\bar{\phi} : A \otimes_R B \to C$ وجود دارد به‌قسمی که نمودار زیر را تعویض‌پذیر می‌کند:*

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\phi"'] & & A \otimes B \arrow[dl, "\bar{\phi}"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

یعنی $\bar{\phi} i = \phi$.

برهان. به منبع [۱۸] مراجعه کنید.

□

۴.۱ همولوژی و کوهمولوژی گروه‌ها

تعریف ۱.۴.۱. [۱۹] رشته از گروه‌ها و همریختی‌های

$$\cdots \to G_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} G_i \xrightarrow{f_i} G_{i+1} \to \cdots ,$$

را در G_i دقیق نامیم، هرگاه تساوی $\ker f_i = \operatorname{im} f_{i-1}$ برقرار باشد. هم‌چنین رشته دقیق نامیده می‌شود اگر در هر G_i دقیق باشد.

تعریف ۲.۴.۱. [۶] اگر R یک حلقه جابه‌جایی یکدار باشد، زنجیر $\mathbf{C}$ از R - مدول‌ها یک دنباله به‌صورت

$$\mathbf{C} : \cdots \longrightarrow C_{n+2} \xrightarrow{d_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} C_n \xrightarrow{d_n} C_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} C_{n-2} \longrightarrow \cdots ,$$

از R - مدول‌ها و همریختی‌های R - مدولی است که در آن $d_n d_{n+1} = 0$.

تعریف ۳.۴.۱. [۶] فرض کنید $\mathbf{C}$ زنجیری از R - مدول‌ها باشد. در این صورت $Z_n(\mathbf{C}) = \ker d_n$ را مدول n - دورها و $B_n(\mathbf{C}) = \operatorname{im} d_{n+1}$ را مدول n - مرزها می‌نامیم. منظور از n - امین مدول همولوژی عبارت است از $H_n(\mathbf{C}) = \dfrac{Z_n(\mathbf{C})}{B_n(\mathbf{C})}$.

تعریف ۴.۴.۱. [۱۸] مدول P روی حلقه R را تصویری نامیم، اگر به ازای هر نمودار از همریختی‌های R - مدولی

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

که سطر پایین آن دقیق است، همریختی R-مدولی منحصر به‌فردی مانند $h : P \to A$ موجود باشد به‌قسمی که نمودار

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"'] & B \arrow[r] & ۰ \end{tikzcd}$$

تعویض‌پذیر است.

تعریف ۱.۴.۵. [۶] R-مدول M را در نظر می‌گیریم. یک تحلیل تصویری برای مدول M عبارت است از دنباله‌ای دقیق از R-مدول‌ها و R-همریختی‌ها مانند

$$\mathbf{P}^{\bullet} : \cdots \to P_{۲} \to P_{۱} \to P_{۰} \to M \to ۰,$$

که در آن P_iها تصویری می‌باشند.

تعریف ۱.۴.۶. [۳۰] فرض کنید R یک حلقه و G یک گروه ضربی باشند. RG را مجموعه تمام مجموع‌هایی به‌صورت $\sum\limits_{g\in G} r_g g$ که به‌جز تعداد متناهی از عضوهای $g \in G$، $r_g = ۰$ در نظر می‌گیریم، همچنین برای هر دو عضو $\sum\limits_{g\in G} r_g g\ ,\ \sum\limits_{g\in G} s_g g \in RG$، $\sum\limits_{g\in G} r_g g = \sum\limits_{g\in G} s_g g$ اگر و فقط اگر به ازای هر $g \in G$، $r_g = s_g$. اینک عمل‌های جمع و ضرب را روی RG به‌صورت

$$\sum_{g\in G} r_g g + \sum_{g\in G} s_g g = \sum (r_g + s_g) g$$

و

$$(\sum_{g\in G} r_g g)(\sum_{h\in G} s_h h) = \sum_{g,h\in G} (r_g s_h) gh.$$

که در آن $\sum\limits_{g\in G} r_g g\ ,\ \sum\limits_{h\in G} s_h h \in RG$ است، تعریف می‌کنیم.

با این دو عمل RG یک حلقه می‌شود. با یکی گرفتن $r \in R$ با $r1$ که ۱ عنصر همانی گروه G است، R یک زیرحلقه از RG می‌شود. حلقه RG حلقه گروه از گروه G، روی حلقه R نامیده می‌شود. همچنین هنگامی که $R = \mathbb{Z}$، حلقه گروه، حلقه گروه صحیح نامیده می‌شود.
توجه می‌کنیم که یک $\mathbb{Z}G$-مدول به‌طور ساده یک G-مدول نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۴.۷. [۶] برای هر گروه G، همریختی حلقه‌ای زیر را داریم:

$$\varepsilon : \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z},$$

که در آن به ازای هر $g \in G$، $\varepsilon(g) = ۱$. بنابراین برای $x = \sum\limits_{g\in G} n_g g$، $\varepsilon(x) = \sum\limits_{g\in G} n_g$. این همریختی را همریختی افزایشی نامیده و هسته آن را که با نماد IG نشان داده می‌شود، ایده‌آل افزوده می‌نامیم.

گزاره ۸.۴.۱. *برای هر گروه G ایده‌آل افزوده به‌عنوان یک ایده‌آل توسط مجموعه $\{g-1 \mid g\in G\}$ تولید می‌شود.*

برهان. به منبع [۶] مراجعه شود.

□

تعریف ۹.۴.۱. [۶] اگر $\mathbf{F}$ یک تحلیل تصویری از $\mathbb{Z}$ روی $\mathbb{Z}G$ و M یک G-مدول باشد، آنگاه n-امین همولوژی از G با ضرایب در M را به‌صورت

$$H_n(G,M)=H_n(\mathbf{F}\otimes_G M)$$

تعریف می‌کنیم. که در اینجا $\mathbf{F}\otimes_G M$ از اثر دادن عملگر $-\otimes_G M$ روی $\mathbf{F}$ به‌دست می‌آید. هنگامی که $M=\mathbb{Z}$ ما نماد خلاصه شده $H_n(G)$ را به‌جای $H_n(G,\mathbb{Z})$ به‌کار می‌بریم.

تعریف ۱۰.۴.۱. [۶] اگر R یک حلقه جابجایی یکدار باشد، هم‌زنجیر C^* از R-مدول‌ها یک دنباله به‌صورت

$$\mathbf{C}^*:\cdots\longrightarrow C^{n-2}\xrightarrow{d^{n-2}}C^{n-1}\xrightarrow{d^{n-1}}C^n\xrightarrow{d^n}C^{n+1}\xrightarrow{d^{n+1}}C^{n+2}\longrightarrow\cdots,$$

از R- مدول‌ها و همریختی‌های R-مدولی است که در آن $d^nd^{n-1}=0$.

تعریف ۱۱.۴.۱. فرض کنید $\mathbf{C}^*$ هم‌زنجیری از R-مدول‌ها باشد. منظور از n-امین مدول کوهمولوژی عبارت است از $H^n(\mathbf{C})=\dfrac{\ker d^n}{\operatorname{im} d^{n-1}}$.

تعریف ۱۲.۴.۱. [۶] اگر $\mathbf{F}$ یک تحلیل تصویری از $\mathbb{Z}$ روی $\mathbb{Z}G$ باشد و M یک G-مدول باشد، آنگاه n-امین کوهمولوژی از G با ضرایب در M را به‌صورت

$$H^n(G,M)=H^n(\operatorname{Hom}_G(\mathbf{F},M))$$

تعریف می‌کنیم. که در اینجا $\operatorname{Hom}_G(\mathbf{F},M)$ از اثر دادن عملگر $\operatorname{Hom}_G(-,M)$ روی $\mathbf{F}$ به‌دست می‌آید. هنگامی که $M=\mathbb{Z}$ ما نماد خلاصه شده $H^n(G)$ را به‌جای $H^n(G,\mathbb{Z})$، به‌کار می‌بریم.

فرض کنید G و A به‌ترتیب یک گروه ضربی و یک گروه آبلی جمعی باشند که A یک G-مدول نیز می‌باشد. در این صورت تابع f از حاصلضرب مستقیم n تا G به‌توی A را یک n-هم‌زنجیر از G نامیم. مجموعه همه n-هم‌زنجیرها را با نماد $C^n(G,A)$ نشان می‌دهیم. $C^n(G,A)$ تحت ضرب مقدارها یک گروه آبلی است. هم‌چنین هنگامی که $n=0$ قرار می‌دهیم $C^0(G,A)=A$.

رابطه