وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

درجه خارجی گروه‌های متناهی

توسط:
زهرا قلیچ لی

استاد راهنما:
دکتر پیمان نیرومند

استاد مشاور:
دکتر اسداله فرامرزی ثالث

شهریور ۱۳۹۲


بسم الله
بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

درجه خارجی گروه‌های متناهی

توسط:

زهرا قلیچ لی

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه: **عالی**

دکتر پیمان نیرومند استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر اسداله فرامرزی ثالث استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر محسن پرویزی استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد (استاد داور)

دکتر عباس جعفرزاده استادیار ریاضی محض گرایش جبر دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد (استاد داور)

دکتر سجاد رحمانی استادیار ریاضی محض گرایش جبر محاسباتی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به

پدرم ومادرم،

ستایش و سپاس مخصوص آفریدگاریست که هستی او اول است بی‌آن‌که قبل از او اولی باشد و آخر است بی‌آن‌که بعد از او آخری باشد. و ستایش مخصوص اوست که خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما گشود و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده خویش را در طریق علم و معرفت بیازماید. اکنون که این دفتر به پایان آمده و به لطف پروردگارم موفق به اتمام این مقطع از تحصیل گشته‌ام بر خود لازم می‌دانم از کسانی که در این مسیر راهنماییم نموده‌اند، تشکر نمایم.

مراتب سپاس وقدردانی عمیق قلبی خود را خدمت استاد فرزانه و گرانقدرم جناب آقای دکتر پیمان نیرومند که در طی این دو سال از چشمه جوشان دانش و اخلاق والایشان به قدر ظرفیت محدود خویش بهره‌مند گشته‌ام ابراز می‌نمایم.

از استاد ارجمندم جناب آقای دکتر اسداله فرامرزی ثالث که مشاوره این پایان‌نامه را بر عهده داشتند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

زهرا قلیچلی

چکیده

درجه خارجی گروه‌های متناهی

به وسیله‌ی:
زهرا قلیچ لی

در این پایان‌نامه، ابتدا به معرفی درجه جابجایی یک گروه متناهی می‌پردازیم و نتایج مرتبط با این مفهوم و ایزوکلینیسم از گروه‌ها را به‌دست می‌آوریم. در نهایت مفهوم درجه خارجی را برای گروه‌های متناهی تعریف می‌کنیم و برخی نتایج را در رابطه با آن به‌دست می‌آوریم.

واژه‌های کلیدی: گروه توانا، درجه جابجایی، مرکزخارجی، درجه خارجی، ضربگرشور.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

پیشگفتار

در چند دهه اخیر نظریه احتمالی گروه‌ها توسط ریاضی‌دانان مورد توجه خاصی قرار گرفته است. آن‌ها سعی کرده‌اند با تعریف یک احتمال مناسب در یک موضوع خاص، نتایجی را بدست بیاورند که در اثبات قضایای مختلف موضوع مربوط به کمک آنها بیاید.

احتمال جابجایی دو عنصر در یک گروه متناهی توسط میلر [۱] [۲۰] در سال ۱۹۴۴ معرفی شد. او برای یک گروه متناهی مانند G، تعداد جفت‌های مرتبی را در $G \times G$ در نظر گرفت که با هم جابجا می‌شدند. سپس تعداد حاصل شده را بر توان دو مرتبه گروه G تقسیم کرد و عدد حاصل را درجه جابجایی گروه نامید. در سال ۱۹۷۳ گاستافسون [۲] [۱۴] نشان داد که درجه جابجایی یک گروه برابر با حاصل تقسیم تعداد کلاس‌های تزویج آن گروه بر مرتبه گروه است. هم‌چنین او توانست کران بالای ۵/۸ را برای درجه جابجایی گروه‌های غیرآبلی بدست آورد.

لسکات [۳] [۱۲] برای اولین بار ارتباط بین درجه جابجایی و مفهوم ایزوکلینیسم را مورد بررسی قرار داد و نتایج قابل توجهی را بدست آورد. او نشان داد که اگر دو گروه ایزوکلینیک باشند درجه جابجایی یکسان دارند که در فصل دوم این پایان‌نامه تحت عنوان درجه جابجایی گروه‌های متناهی به بررسی آن خواهیم پرداخت.

احتمال اینکه دو عنصر g, g' از یک گروه متناهی G، دارای شرط $g \wedge g' = 1_\wedge$ باشد چیست؟ در سال ۲۰۱۰ این احتمال توسط نیرومند [۴] و رضایی [۵] در [۱۸] معرفی شد. آن‌ها تعداد جفت‌های

---

[۱] Miller

[۲] Gustafson

[۳] Lescot

[۴] Niroomand

[۵] Rezaei

مرتبی را در $G \times G$ در نظر گرفتند که دارای شرط مذکور باشند. سپس تعداد حاصل شده را بر توان دو مرتبه گروه G تقسیم کردند و عدد حاصل را درجه خارجی گروه G نامیدند. آنها نشان دادند برای یک گروه متناهی، ناآبلی و توانای G، درجه خارجی گروه کمتر از $۱/p$ است که در آن p کوچکترین عدد اولی است که مرتبه G را عاد می‌کند. ارایه کران‌های بالایی و پایینی برای درجه خارجی و برخی روابط بین این مفهوم جدید و درجه جابجایی، توانایی و ضربگر شور نیز توسط آن‌ها بیان شد که در فصل سوم تحت عنوان درجه خارجی گروه‌های متناهی به بررسی آن‌ها خواهیم پرداخت.

تذکر: در این پایان‌نامه گروه G را همواره متناهی در نظر می‌گیریم.

برخی نمادگذاری‌ها

$C_G(x)$: مرکزساز عنصر $x \in G$

$C_G^{\wedge}(x)$: مرکزساز خارجی عنصر $x \in G$

C_x: رده (کلاس) تزویجی عنصر $x \in G$

$exp(G)$: نما گروه G

$Z(G)$: مرکز گروه G

$Z^{\wedge}(G)$: مرکز خارجی گروه G

G': زیرگروه مشتق G

$d(G)$: درجه جابجایی گروه G

$d^{\wedge}(G)$: درجه خارجی گروه G

$\gamma_i(G)$: $i-$ امین جمله سری مرکزی پایینی G

$Z_i(G)$: $i-$ امین جمله سری مرکزی بالایی G

$|G:H|$: شاخص زیرگروه H در G

$|G|$: مرتبه گروه G

$\langle x \rangle$: زیرگروه تولید شده توسط x

$C_{p^m}^{(n)}$: حاصل ضرب مستقیم [۶] $n-$ نسخه از گروه دوری C_{p^m}،

D_8: نمایشگر گروه دو وجهی [۷] از مرتبه ۸

D_{2n}: نمایشگر گروه دو وجهی از مرتبه $2n$

Q_8: نمایشگر گروه چهارگان [۸] از مرتبه ۸

Q_n: نمایشگر گروه چهارگان از مرتبه $4n$

---

[۶] Direct product

[۷] Dihedral group

[۸] Quaternion group

فصل ۱

پیش‌نیازها

در این فصل مفاهیم و قضایایی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است را بیان می‌کنیم.
این فصل شامل شش بخش است. بخش اول با عنوان مفاهیم اولیه، تعاریف و قضایای مقدماتی که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرد را بیان می‌کند. در بخش دوم، رده‌های مزدوجی و مرکزسازها را معرفی می‌کنیم. در بخش سوم، گروه‌های پوچتوان و در بخش چهارم و پنجم، به ترتیب، $p-$گروه‌های متناهی و ضربگر شور را معرفی می‌کنیم و در نهایت در بخش ششم، به معرفی حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها می‌پردازیم.

۱-۱ مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. در این صورت نمای [۱] گروه G، کوچک‌ترین مضرب مشترک از مرتبه تمام اعضای G است و آن را با $exp(G)$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر

$$exp(G) = min\,\{n \in \mathbb{N} \mid \forall g;\ g^n = ۱\}$$

تعریف ۲.۱.۱. اگر گروه G توسط یک مجموعه متناهی X تولید شود آن‌گاه G را با تولید متناهی می‌نامیم.

تعریف ۳.۱.۱. کمترین تعداد مولدهای گروه G، را رتبه G می‌گوییم و آن را با $rank(G)$ نمایش می‌دهیم به عبارت دیگر

$$rank(G) = min\{|X| \mid X \subseteq G, < X >= G\}$$

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و X مجموعه ای ناتهی باشد اگر تابعی مانند $G \times X \longrightarrow X$ با ضابطه $gx \longmapsto (g,x)$ وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر $g_۱$ و $g_۲$ از G و هر x از X، شرایط زیر برقرار باشند

الف) $۱x = x$،

ب) $(g_۱g_۲)x = g_۱(g_۲x)$،

دراین صورت گوییم G بر X عمل می‌کند.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و X مجموعه ای ناتهی باشد گوییم G بر X به طور بدیهی عمل می کند هرگاه به ازای هر g از G و هر x از X، داشته باشیم $gx = x$.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید G یک گروه و Ω یک مجموعه باشد در نظر بگیرید

$$\alpha : G \times \Omega \longrightarrow G$$
$$(g,\omega) \longmapsto g^\omega.$$

در این صورت یک گروه عملگر راست سه تایی (G,Ω,α) است که شامل گروه G و مجموعه Ω که دامنه عملگر نامیده می شود و تابع α می باشد که تابع α_ω القا شده به وسیله α که به ازای هر $w \in \Omega$، $g \longmapsto g^\omega$ یک درونریختی از G باشد در این صورت G را یک $\Omega-$ گروه می‌نامیم.

---
[۱] Exponent

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید G و H دو $\Omega-$ گروه باشند و $\beta : G \longrightarrow H$ یک همریختی باشد در این صورت β را $\Omega-$ همریختی گوییم، هرگاه به ازای هر $g \in G$ و $w \in \Omega$، داشته باشیم $\beta(g^\omega) = (\beta g)^\omega$.

قضیه ۸.۱.۱. *فرض کنید G یک گروه و N زیر گروه نرمال G باشد. اگر گروه خارج قسمتی G/N دوری و N زیرگروه مرکزی باشد، آن گاه G آبلی است.*

اثبات. به وضوح ثابت می شود. $\square$

۱–۲ مرکزسازها و جابجاگرها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید G گروه دلخواهی باشد برای هر $x \in G$، $C_x = \{x^g \mid g \in G\}$ را رده تزویج x در G گوییم، تعداد رده‌های G را با نماد $k(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید G گروهی متناهی باشد و $x \in G$، در این‌صورت مرکزساز x در G را با $C_G(x)$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$C_G(x) = \{\ y \in G \mid yx = xy\ \}.$$

گزاره ۳.۲.۱. *فرض کنید G گروهی متناهی باشد، در این‌صورت*

$$C_G(H) = \bigcap_{x \in H} C_G(x).$$

اثبات. با توجه به تعریف به سادگی اثبات می‌شود. $\square$

قضیه ۴.۲.۱. *اگر G یک گروه متناهی و $\{x_i\}_{1 \le i \le n}$ نماینده‌های رده‌های تزویج گروه G باشند آن‌گاه $[G : C_G(x_i)] = |C_{x_i}|$ و*

$$|G| = |Z(G)| + \sum_{x_i \notin Z(G)} \frac{|G|}{|C_G(x_i)|}$$

که آن را معادله رده‌ای گروه G گوییم.

اثبات. به صفحه ۱۳۹ از [۲۳] مراجعه کنید. $\square$

قضیه ۵.۲.۱. (*قضیه پوآنکاره*[۲]) *فرض کنید G یک گروه و $\{H_x \mid x \in G\}$ یک مجموعه متناهی از زیرگروه‌های G با شاخص متناهی باشد. در این صورت*

$$\left[G : \bigcap_x H_x\right] \le \prod_x [G : H_x]\,.$$

[۲] poincare

اثبات. به صفحه ۱۴ از [۲۵] مراجعه شود. □

قضیه ۶.۲.۱. *(نرمال‌ساز - مرکزساز) فرض کنید H زیرگروهی از G باشد. در این صورت*
$$C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$$
و $N_G(H)/C_G(H)$ با زیرگروهی از $Aut(H)$ یکریخت است.

اثبات. به صفحه ۳۸ از [۲۵] مراجعه شود. □

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید G یک گروه و $x_۱, x_۲, \cdots$ اعضای G باشند. در این‌صورت جابه‌جاگر $x_۱$ و $x_۲$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم
$$[x_۱, x_۲] = x_۱^{-۱} x_۲^{-۱} x_۱ x_۲ = x_۱^{-۱} x_۱^{x_۲}$$
و زیرگروه تولید شده توسط این جابه‌جاگرها را زیرگروه جابه‌جاگر یا زیرگروه مشتق [۳] می‌نامیم و با نماد G' نشان می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود
$$G' = [G, G] = \langle\ [x_۱, x_۲]\ \ |\ \forall\, x_۱, x_۲ \in G\,\rangle.$$
علاوه بر این، به ازای $H \subseteq G$ داریم
$$[H, G] = \langle\ [h, g]\ |\ h \in H, g \in G\ \rangle\,.$$
عموماً، یک جابه‌جاگر ساده از وزن $n \geq ۲$ به طور بازگشتی به وسیله قانون زیر تعریف شده است
$$[x_۱, \cdots, x_n] = [[x_۱, \cdots, x_{n-۱}], x_n]\,,$$
که به طور قراردادی داریم
$$[x_۱] = x_۱.$$
یک نماد مفید برای مختصرنویسی به صورت زیر است
$$[x,_n y] = \ [x, \underbrace{y, \cdots, y}_{n}\,]$$
و هم‌چنین
$$x^{-y} = (x^{-۱})^y.$$

گزاره ۸.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه دلخواه و x, y و z عناصری در G باشند، در این‌صورت روابط زیر برقرارند.*

الف) $[x, y] = [y, x]^{-۱}$

[۳] Derived subgroup

ب) $[xy, z] = [x, z]^y [y, z] \ , \quad [x, yz] = [x, z] [x, y]^z$

ج) $[x, y^{-1}] = [y, x]^{y^{-1}} \ , \quad [x^{-1}, y] = [y, x]^{x^{-1}}$

د) (*اتحاد هال-ویت*[۴]) $[x, y^{-1}, z]^y [y, z^{-1}, x]^z [z, x^{-1}, y]^x = 1$

اثبات. به [۲۵] مراجعه شود. □

لم ۹.۲.۱. *اگر G گروهی دلخواه و H، K و L زیرگروه‌های نرمالی از G باشند، آنگاه*

الف) $[H, K] \trianglelefteq G$

ب) $[HK, L] = [H, L][K, L]$

ج) $[H, KL] = [H, K][H, L]$

اثبات. به [۲۵] مراجعه شود. □

لم ۱۰.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه و N زیرگروه نرمالی از آن باشد به طوری‌که $N \cap G' = \{e\}$. آن‌گاه $N \subseteq Z(G)$.*

اثبات. به وضوح ثابت می‌شود. □

قضیه ۱۱.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه و N یک زیرگروه نرمال از آن باشد در این صورت G/N آبلی است اگر و فقط اگر $G' \subseteq N$.*

اثبات. به وضوح ثابت می‌شود.

□

۱-۳ گروه‌های پوچتوان

در این بخش به بیان تعاریف و قضایایی در مورد گروه‌های پوچتوان می‌پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱. گروه G را یک گروه پوچتوان [۵] می‌نامیم هرگاه یک سری مرکزی داشته باشد، به این معنی که، سری نرمال

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \cdots \subseteq G_n = G$$

[۴] Hall-Witt identity

[۵] Nilpotent group

وجود داشته باشد به طوری که

$$\forall i\ ,\ \ \frac{G_{i+1}}{G_i} \subseteq Z(\frac{G}{G_i})$$

یا به طور معادل

$$[G_{i+1}, G] \subseteq G_i.$$

ملاحظه ۲.۳.۱. طول کوتاه‌ترین سری مرکزی از G ،کلاس پوچتوانی G نامیده می‌شود.

قضیه ۳.۳.۱. *کلاس گروه های پوچتوان تحت زیرگروه بودن، تصویر همریخت و حاصل‌ضرب مستقیم متناهی بسته است.*

اثبات. به صفحه ۱۴۶ از [۲۶] مراجعه شود. □

تعریف ۴.۳.۱. زیرگروه‌های $\gamma_n(G)$ و $Z_n(G)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\gamma_1(G) = G\ ,\ Z_0(G) = 1$$

سپس برای هر عدد صحیح $n > 1$،

$$\gamma_n(G) = \ [\gamma_{n-1}(G), G\ ]$$

و برای هر عدد صحیح $n > 0$،

$$\frac{Z_n(G)}{Z_{n-1}(G)} = Z\big(\frac{G}{Z_{n-1}(G)}\big).$$

در این صورت

$$G = \gamma_1(G) \supseteq \gamma_2(G) \supseteq \cdots$$

را سری مرکزی پایینی و

$$1 = Z_0(G) \subseteq Z_1(G) \subseteq \cdots$$

را سری مرکزی بالایی می‌نامیم.

لم ۵.۳.۱. (سه زیرگروه) *فرض کنید H ، K و L زیرگروه‌های گروه G باشند. در این صورت اگر دو تا از زیرگروه‌های جابه‌جاگر $[K, L, H]$ ، $[H, K, L]$ و $[L, H, K]$ مشمول در زیرگروه نرمال G باشند، آن‌گاه سومی نیز هست.*

اثبات. به صفحه ۱۲۶ از [۲۵] مراجعه شود. □

قضیه ۶.۳.۱. *اگر G یک گروه پوچتوان و $1 \neq N \trianglelefteq G$ ، آن‌گاه* $N \cap Z(G) \neq 1$.

اثبات. به صفحه ۱۲۹ از [۲۵] مراجعه شود. □

نتیجه ۷.۳.۱. *گروه‌های پوچتوان مرکز نابدیهی دارند.*

اثبات. فرض کنید $G \trianglerighteq N \neq ۱$ باشد آن‌گاه از قضیه ۶.۳.۱ خواهیم داشت

$$۱ \neq N \cap Z(G) \subseteq Z(G).$$

در نتیجه

$$Z(G) \neq ۱.$$

□

۱-۴ $p-$ گروه‌های متناهی

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید G یک گروه، و p یک عدد اول باشد. گروه G را یک $p-$ گروه می‌نامیم در صورتی‌که مرتبه هر عضو G توان مثبتی از p باشد. زیرگروه H از G را یک $p-$ زیرگروه G گوییم در صورتی‌که H یک $p-$ گروه باشد.

تعریف ۲.۴.۱. گروه G را یک $p-$ گروه آبلی مقدماتی گوییم هرگاه G مجموع مستقیم گروه‌های دوری از مرتبه p (p عدد اول) باشد.

قضیه ۳.۴.۱. *هر $p-$ گروه متناهی پوچتوان است.*

اثبات. به صفحه ۱۲۲ از [۲۵] مراجعه شود. □

قضیه ۴.۴.۱. *$p-$ گروه‌های متناهی مرکز نابدیهی دارند.*

اثبات. به آسانی از ۳.۴.۱ و ۷.۳.۱ نتیجه می شود. □

تعریف ۵.۴.۱. گروه متناهی G، $p-$ گروه بسیار ویژه[۶] نامیده می‌شود اگر

$$Z(G) = G'$$

و

$$|Z(G)| = |G'| = p.$$

---

[۶] Extra special p- group