دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

روش بدون مش برای مسائل مقدار مرزی

استاد راهنما

دکتر مس‌فروش

پژوهشگر

سمیه حقی

تیر ۱۳۹۲

نام خانوادگی دانشجو: حقی نام: سمیه

عنوان: روش بدون مش برای مسائل مقدار مرزی

استاد راهنما: دکتر مس‌فروش

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی

دانشگاه: دانشگاه صنعتی شاهرود دانشکده ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: تیر ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۷۱

واژگان کلیدی: عناصر متناهی، بدون شبکه، مساله مقدار مرزی، جواب خاص، جواب همگن، تابع وزن، تقریب کمترین مربعات متحرک، توابع شکل

چکیده

این پایان‌نامه به حل عددی مسائل مقدار مرزی به روش بدون شبکه توسعه یافته می‌پردازد. در فصل اول به بیان مفاهیمی از روش‌های بدون شبکه و تفاوت آنها با روش عناصر متناهی می‌پردازیم. در فصل دوم روش‌های تقریبی برای ساخت توابع شکل، از جمله روش تقریبی کمترین مربعات متحرک (MLS) معرفی می‌شوند. فصل آخر از دو بخش کلی تشکیل شده است، که در بخش اول به معرفی کامل و نحوه فرمول‌بندی و پیاده‌سازی روش بدون شبکه‌ی EFG بر پایه تقریب MLS می‌پردازیم، و در بخش دوم با معرفی روش بدون شبکه‌ی توسعه یافته و حل مثال پواسون یک بعدی تاثیر روش بدون شبکه‌ی توسعه یافته بر مسایل عددی سنجیده خواهد شد. رسم تمامی نمودارها در بخش مثال‌های عددی با استفاده از نرم افزار Matlab می‌باشد.

تقدیم به همه آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنهاشوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را به زیور عقل آراست.

در این‌جا وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مس‌فروش، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعا بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

سمیه حقی

تیر ۱۳۹۲

فهرست مطالب

فصل ۱
مفاهیم بنیادی در روش‌های بدون شبکه

۱.۱ مقدمه

در این پایان‌نامه به معرفی روش بدون شبکه توسعه یافته[۱] برای مسائل مقدار مرزی[۲] به‌صورت

$$\begin{cases} u_{xx} + b(x) = \circ, & \text{in } (a,b), \\ u(a) = \overline{u}_a, & u(b) = \overline{u}_b, \end{cases} \tag{۱.۱}$$

می‌پردازیم. در معادله (۱.۱)، $b(x)$ تابع منبع[۳] می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱. معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله، همراه با شرایط مرزی[۴] و شرایط اولیه[۵]، را یک ***مساله مقدار مرزی*** می‌نامند.

تعریف ۲.۱.۱. ***جواب خاص*** برای یک مساله مقدار مرزی، به‌صورت یک عبارت تحلیلی می‌باشد، که در معادله دیفرانسیل شامل تابع منبع صدق می‌کند، ولی لزوما در شرایط مرزی مساله صدق نخواهد کرد.

نکته ۳.۱.۱. *جواب عمومی مساله مقدار مرزی را می‌توان، به‌صورت مجموع دو جواب خاص و جواب همگن به‌صورت*

$$u(x) = u^{\circ}(x) + u^{p}(x),$$

[۱] Extended meshfree method
[۲] Boundary value problems
[۳] Source term
[۴] Boundary condition
[۵] Initial conditions

نوشت که $u^{\circ}(x)$ و $u^{p}(x)$ به‌ترتیب، جواب خاص و جواب همگن می‌باشند.

بیشتر پدیده‌ها در طبیعت، مانند پدیده‌های مکانیکی، زمین‌شناسی، زیست‌شناسی یا شیمیایی را می‌توان به‌کمک معادلات جبری، معادلات دیفرانسیلی و یا معادلات انتگرال توصیف کرد.

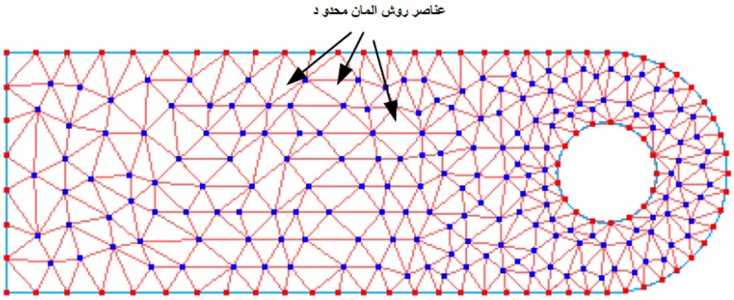
ایده‌آل‌ترین حالت پس از مدل‌سازی، زمانی رخ می‌دهد که جواب تحلیلی و دقیق معادلات به‌دست آید، ولی به دلیل پیچیدگی بسیاری از مسایل، تنها قادر به حل تحلیلی و دقیق برخی از این معادلات هستیم. ریاضیدانان برای حل این معادلات، روش‌های عددی گوناگونی برای حل تقریبی آنها ابداع کردند [۱]. امروزه مهندسان و محققان علوم با بسیاری از این روش‌ها و تکنیک‌ها برای انواع مختلف مسایل آشنا می‌باشند. به‌دلیل پیشرفت سریع تکنولوژی محاسباتی و کامپیوتری، روش‌های شبیه‌سازی عددی با یک مسیر رو به افزایش، به‌عنوان ابزاری مهم برای حل مسایل پیچیده در مهندسی و علوم به‌کار می‌روند.

تعریف ۴.۱.۱. شبیه‌سازی عددی، تبدیل مساله‌ای پیچیده به شکل گسسته می‌باشد، به‌گونه‌ای که بتوان با کامپیوتر آن‌را حل کرد.

معادلات اصلی مساله به‌صورت مجموعه‌ای از معادلات دیفرانسیل معمولی[۶]، معادلات دیفرانسیل جزیی[۷]، و معادلات انتگرالی[۸] بیان می‌شوند و شرایط مرزی و شرایط اولیه، برای تکمیل معادلات اصلی به‌کار می‌روند. بنابراین برای حل یک مساله به روش عددی به‌طوری که نتایج حاصل به‌خوبی نمایان‌گر فیزیک مساله باشد، باید روش عددی مناسبی استفاده کنیم. روش تفاضلات متناهی[۹]، المان‌های مرزی[۱۰]، حجم‌های متناهی[۱۱] و روش بدون شبکه نمونه‌هایی از روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل می‌باشند [۲]، [۳]. روش تفاضلات متناهی از اولین روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی هستند. استفاده از روش‌های تفاضلات متناهی برای حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی، با مشکلاتی مواجه است، از آن جمله می‌توان به پایداری محدود روش تفاضلات متناهی صریح، افزایش هزینه‌های محاسباتی در روش تفاضلات متناهی ضمنی، پیاده‌سازی مشکل برای مسایل غیرخطی و کاهش دقت در رویارویی با مرزهای نامنظم اشاره نمود.

[۶] Ordinery differentioal equations
[۷] Partioal differentioal equations
[۸] Integral equations
[۹] Finite difference method
[۱۰] Boundary element method
[۱۱] Finite volume method

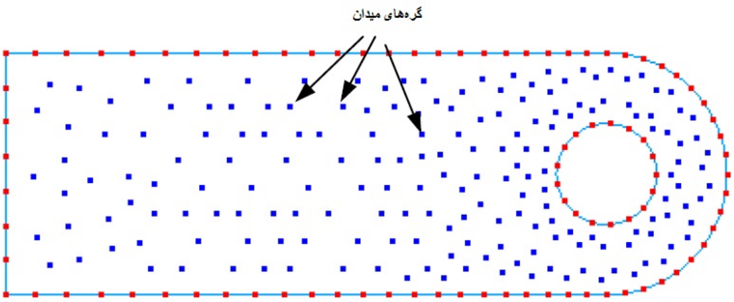
در دهه‌ی ۱۹۵۰ برای رفع این مشکلات روش عناصر متناهی مطرح شد. روش عناصر متناهی برای حل معادلات دیفرانسیل، حاصل از مدل‌سازی سیستم‌های مهندسی، روشی کارا و مناسب است. در این روش، مطابق شکل ۱.۱ دامنه مساله با تعداد زیادی از عنصر با اشکال ساده که در نقاطی به‌نام گره به یکدیگر متصل شده‌اند، نشان داده می‌شود. تقریب به‌دست آمده، به ویژگی‌ها و تعداد عنصر به‌کار رفته، بستگی دارد و برای این که نتایج دقیقی از این روش به‌دست آید، باید تعداد عنصر بیشتری در نظر گرفته شود.



شکل ۱.۱: نمایش دامنه در روش عناصر متناهی

ایجاد شبکه، از اصلی‌ترین بخش‌های روش عناصر متناهی است. برای دسته خاصی از مسایل، استفاده از شبکه‌بندی منجر به پیچیدگی‌های زیادی می‌گردد. استفاده از روش عناصر متناهی در مسایلی که دارای تغییر شکل زیادی در دامنه هستند، به‌دلیل به هم‌خوردن عناصر، منجر به کاهش دقت خواهد شد. بنابراین در مسایلی که تغییر شکل‌های زیاد در دامنه، گسترش شکاف و موارد شبیه به آن وجود دارد، استفاده از روش عناصر متناهی دارای پیچیدگی و خطای زیادی می‌باشد. بنابراین ایده‌ی روش‌های بدون‌شبکه، به‌منظور رهایی از پیچیدگی‌های حاصل از اتصال بین گره‌ها مطرح شد تا مشکلات ناشی از وجود شبکه را از بین ببرد [۴]،[۵]، [۶]،[۷].

جذابیت اصلی روش‌های بدون شبکه در امکان به‌روزرسانی ساده‌ی آنها است. در روش‌های بدون شبکه دامنه‌ی مساله مطابق شکل ۲.۱ توسط مجموعه‌ای از گره‌های پراکنده با توزیع دلخواه نمایش داده می‌شود. این گره‌ها احتیاج به‌هیچ‌گونه ارتباط و اتصال با یکدیگر ندارند. بنابراین روش‌های بدون شبکه می‌توانند برای هر مساله با ناحیه هندسی دلخواه با توزیع مناسب گره‌ها، مناسب باشند. روش عناصر متناهی و روش بدون شبکه، به‌طور گسترده برای حل عددی مساله‌های مقدار مرزی به‌کار می‌روند. اما با وجود تابع منبع در مسایل مقدار مرزی، دقت جوابی که با استفاده از این روش‌ها به‌دست می‌آید،پایین می‌آید. بنابراین مساله مقدار مرزی ناهمگن توسط روش بدون شبکه توسعه یافته که در فصل سوم به آن می‌پردازیم، به مساله همگن تبدیل شده، معادله همگن



شکل ۲.۱: نمایش دامنه در روش بدون شبکه

با روش بدون شبکه حل می‌شود. در این بخش به مفاهیمی از روش بدون شبکه و تفاوت آن با روش عناصر متناهی به‌عنوان پیش‌زمینه‌ای برای روش بدون شبکه توسعه یافته می‌پردازیم. برای درک بهتر روش‌های بدون شبکه در شکل ۳.۱ مقایسه‌ای از مراحل حل مساله با استفاده از روش عناصر متناهی و بدون شبکه ارایه شده است [۱].

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مرحله تولید هندسه مساله و ساخت توابع شکل [۱۲] در دو روش متفاوت است. در روش عناصر متناهی توابع شکل بر اساس عناصر ساخته می‌شوند. این توابع برای تمام عناصر یک شکل، یکسان می‌باشند. پیش از اینکه آنالیز روش عناصر متناهی شروع شود، توابع شکل برای انواع مختلفی از عناصر، از پیش تعیین شده هستند. در حقیقت معرفی عنصر و ایجاد اتصال بین گره‌ها به‌منظور محاسبه‌ی تابع شکل است. درحالیکه در روش‌های بدون شبکه، توابع شکل معمولا به ازای یک نقطه دلخواه در دامنه تعریف می‌شوند. در مورد تشکیل دستگاه معادلات در روش‌های بدون شبکه، باید گفت که دستگاه معادلات حاصل از این روش‌ها به لحاظ تنک[۱۳] و نواری بودن، مانند روش عناصر متناهی می‌باشد ولی بسته به روشی که به‌کار گرفته می‌شود، می‌تواند بر خلاف روش عناصر متناهی، نامتقارن باشد. برای دسته‌بندی تفاوت‌های میان روش‌های بدون شبکه و روش عناصر متناهی، جدول ۱.۱ ارایه شده است.

[۱۲] Shape functions
[۱۳] Sparse

جدول ۱.۱: دسته‌بندی تفاوت‌های روش بدون شبکه و روش عناصر متناهی

عناوین	روش عناصر متناهی	روش بدون شبکه
شبکه	دارد	ندارد
ساخت توابع شکل	بر پایه المان‌های از پیش تعیین شده	بر پایه گره‌های موجود در دامنه‌های محمل موضعی
دستگاه معادلات حاصل	نواری- متقارن	نواری-بسته به نوع روش انتخابی، متقارن و یا نامتقارن
اعمال شرایط مرزی دیریکله	ساده و استاندارد	بسته به نوع روش انتخابی،روش‌های مختلفی می‌توان اعمال کرد
سرعت محاسبه	سریع	در مقایسه با روش عناصر متناهی کندتر
دقت محاسبات	در مقایسه با تفاضلات متناهی دقیق‌تر	معمولا بسیار دقیق تر از روش عناصر متناهی
آنالیز مسایل	برای مسایل سه بعدی، مشکل	ساده تر
مرحله پیشرفت	توسعه یافته	نو پاست و جای پیشرفت دارد
نرم افزارهای تجاری مرتبط	بسیار زیاد	محدود و کم

۲.۱ دسته‌بندی روش‌های بدون شبکه

به‌عنوان اولین روش‌های بدون شبکه، می‌توان روش گردابی[۱۴]، روش تفاضلات متناهی[۱۵] با شبکه‌های دلخواه[۱۶] و روش هیدرودینامیک ذرات هموار[۱۷] را معرفی کرد. در حالت کلی روش‌های بدون شبکه بر اساس سه فاکتور زیر در دسته‌های مربوط به‌خود قرار می‌گیرند.

۱. چگونگی فرمول‌بندی

۲. نوع تقریب توابع

۳. نوع نمایش دامنه

۱.۲.۱ چگونگی فرمول‌بندی

در حالت کلی دو نوع فرمول‌بندی در روش‌های بدون شبکه وجود دارد: شکل قوی و شکل ضعیف. نوع اول بر اساس شکل قوی یا هم‌مکانی[۱۸] می‌باشد. در این روش معادله‌ی اصلی مساله و معادلات مربوط به شرایط مرزی به‌طور مستقیم در گره‌ها توزیع شده، با استفاده از تکنیک

[۱۴] Vertex method
[۱۵] Finite diffrence method
[۱۶] Arbitrary grids
[۱۷] Smoothed particle hydrodynamics
[۱۸] Colocation

هم‌مکانی، گسسته‌سازی می‌شوند. به عنوان مثال‌هایی از این نوع، می‌توان به روش تفاضلات متناهی تعمیم یافته، روش بدون شبکه هم‌مکانی، و روش نقاط متناهی (FPM[۱۹]) اشاره کرد. این روش‌ها الگوریتم ساده‌ای دارند و کاملا بی‌نیاز از شبکه هستند ولی این روش‌ها غالبا ناپایدار می‌باشند. در نوع دوم، روش‌های بدون‌شبکه براساس شکل ضعیف هستند. در روش‌های شکل ضعیف، معادله‌ی دیفرانسیل جزیی به شکل انتگرالی تبدیل می‌شود. روش‌های بدون شبکه زیادی در این نوع قرار می‌گیرند. از بهترین روش‌های این نوع می‌توان روش گالرکین بدون شبکه (EFG[۲۰])، روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی (RPIM[۲۱])، روش‌های درونیابی نقاط (PIM[۲۲])، روش بدون شبکه پتروگالرکین موضعی (MLPG[۲۳]) را نام برد [۵]، [۶]، [۷]، [۱۱].

۲.۲.۱ نوع تقریب توابع

در دسته‌بندی روش‌های بدون شبکه بر اساس نوع تقریب توابع، سه دسته‌ی کلی وجود دارد:

۱. روش‌های مبتنی بر تقریب کمترین مربعات متحرک (MLS[۲۴])

۲. روش‌های مبتنی بر روش نمایش انتگرالی

۳. روش‌های مبتنی بر درونیابی نقاط

دسته اول، بر اساس تقریب کمترین مربعات متحرک که در سال ۱۹۸۱ برای تقریب رویه‌ها و سطوح در برازش داده‌های پراکنده مطرح شد، عمل می‌کنند. در حقیقت MLS تقریبی پیوسته برای تابع مجهول می‌باشد. از روش‌های بدون شبکه‌ای که از این تقریب استفاده می‌کنند، می‌توان روش‌های المان پراکنده (DEM[۲۵])، روش EFG، روش MLPG و روش گره‌های مرزی (BNM[۲۶]) را نام برد. در دسته دوم، از شکل انتگرالی برای تقریب تابع استفاده می‌شود. از جمله روش‌های این دسته، روش SPH، روش RKPM[۲۷] می‌باشند. دسته سوم، روش‌هایی مبتنی بر روش درونیابی نقاط هستند. در این روش‌ها برای ساخت توابع شکل، از درونیابی نقاط استفاده می‌شود و برخلاف

[۱۹] Finite point method
[۲۰] Element free galerkin method
[۲۱] Radial point interpolation method
[۲۲] Point interpolation method
[۲۳] Meshless local petrov-galerkin
[۲۴] Moving least squares
[۲۵] Diffuse element method
[۲۶] Boundary node method
[۲۷] Reproducing kernel particle method

روش تقریب کمترین مربعات متحرک، توابع شکل در آن دارای خاصیت دلتای کرونکر می‌باشند. در این روش‌ها پایه‌های مختلفی شامل پایه‌های چندجمله‌ای و توابع پایه‌ای شعاعی (RBF[۲۸]) به‌کار می‌رود.

۳.۲.۱ نوع نمایش دامنه

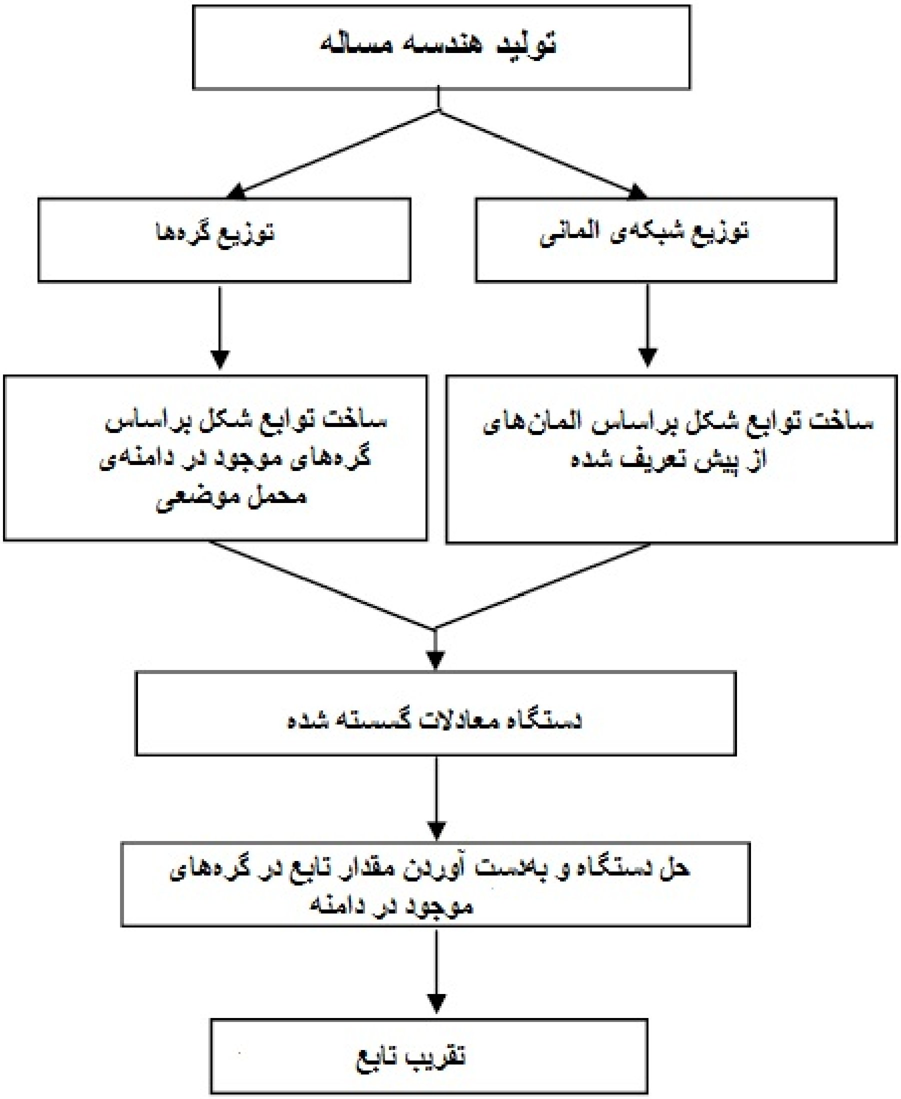
روش‌های بدون شبکه بر اساس نمایش دامنه به دو دسته‌ی کلی تقسیم می‌شوند:

۱. روش‌های بدون شبکه از نوع دامنه

۲. روش‌های بدون شبکه از نوع مرز

در دسته‌ی اول، گره‌های تقریب، روی مرز و دامنه‌ی مساله توزیع می‌شوند. بنابراین هم گره‌های روی مرز و هم گره‌های داخل دامنه‌ی مساله، برای تشکیل دستگاه و یافتن جواب مساله استفاده می‌شوند. روش گالرکین بدون شبکه (EFG) و بسیاری از روش‌های دیگر در این دسته قرار می‌گیرند.
در روش‌های موجود در دسته دوم، تنها مرز مساله توسط گره‌های تقریب نمایش داده می‌شود و هیچ گره‌ای در دامنه‌ی مساله توزیع نمی‌شود. از جمله روش‌های موجود در این دسته، می‌توان به روش گره‌های مرزی (BNM)، روش‌های معادله انتگرال مرزی موضعی (LBIE[۲۹]) و روش‌های درونیابی نقاط مرزی شعاعی (BRPIM[۳۰]) اشاره کرد.

[۲۸] Radial basis function
[۲۹] Local boundary integral equation
[۳۰] Boundary radial point interpolation method



شکل ۳.۱: مقایسه دو روش عناصر متناهی و بدون شبکه

فصل ۲
روش‌های تقریب توابع

۱.۲ مقدمه

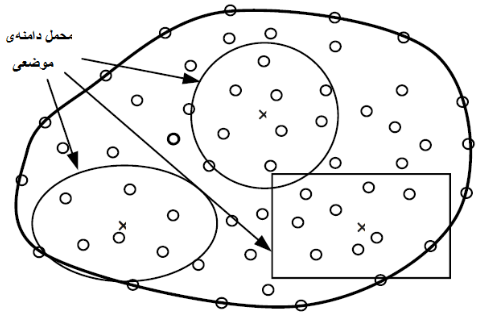
در تمام نسخه‌های روش‌های بدون شبکه، قبل از حل معادله دیفرانسیل مربوطه در دامنه‌ی مساله، ابتدا تابع مجهول با توابع شکل در دامنه مساله تقریب زده می‌شوند. تکنیک‌های مختلفی برای تولید توابع شکل وجود دارد، که در حالت کلی بر اساس نوع درونیاب/تقریب تابع به سه دسته کلی تقسیم‌بندی می‌شوند: PPIM ،RPIM و MLS، که هرکدام از توابع پایه‌ی خاصی استفاده می‌کنند. با استفاده از این توابع پایه و دنبال نمودن روند مشخصی در هر گروه، توابع شکل تولید می‌گردند. این توابع متناسب با نوع تابع پایه به‌کار گرفته شده دارای ویژگی‌های خاصی هستند. از این مرحله به بعد توابع شکل مورد استفاده قرار می‌گیرند و در فرایندی مشابه روش عناصر متناهی، معادله دیفرانسیل مربوطه در کل دامنه مساله حل می‌شود.

در این بخش این سه تقریب را با جزییات مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۲ روش‌های درونیابی نقطه‌ای

روش درونیابی نقطه‌ای برای تقریب تابع و ساخت توابع شکل مفید می‌باشد. این روش تابع $u(X)$ روی دامنه Ω در نقطه دلخواه X را به‌شکل:

$$u^h(X) = \sum_{i=۱}^{m} \mathrm{B}_i(X) a_i,$$



شکل ۱.۲: محمل دامنه‌ی موضعی در روش بدون شبکه برای ساخت توابع شکل

تقریب می‌زند.

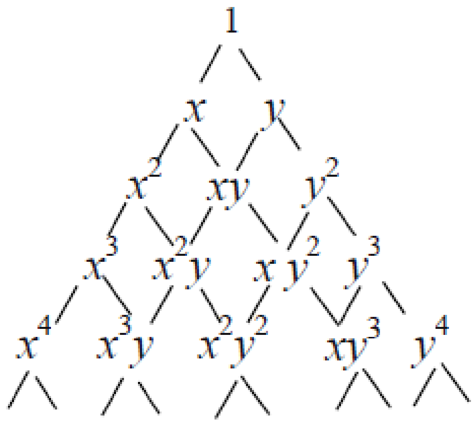
$\mathrm{B}_i(X)$، توابع پایه‌ای هستند که در فضای مختصات دکارتی $\mathrm{X} = [x, y]$ تعریف شده‌اند، و m تعداد توابع پایه‌ای و a_i ضرایب می‌باشند. برای تقریب ابتدا محمل دامنه‌ی موضعی[۱] برای نقطه X که شامل n گره باشد ارایه می‌شود. تاکنون دو نوع از روش‌های درونیابی نقطه‌ای برای ساخت توابع شکل با بکارگیری تابع‌های پایه متفاوت گسترش یافته است که در این فصل مورد بررسی قرار می‌گیرند [۱۸].

تعریف ۱.۲.۲. یک محمل دامنه موضعی برای نقطه x در دامنه، گره‌هایی که برای تقریب جواب معادله در x مورد نیاز است را تعیین می‌کند. محمل دامنه موضعی می‌تواند شکلهای متفاوتی مانند دایره یا مستطیل داشته باشد. شکل ۱.۲ را مشاهده کنید.

۱.۲.۲ روش درونیابی نقطه چندجمله‌ای(PPIM)

یکی از ایده‌های ساده و پرکاربرد در تولید توابع شکل، استفاده از چندجمله‌ای‌های پاسکال[۲] به‌عنوان توابع پایه است. همان‌طور که قبلا اشاره شد در روش‌های بدون شبکه دامنه‌ی مساله به‌وسیله گره‌های ثابتی مشخص می‌شود تابع اسکالر $u(X)$ تعریف شده در این محدوده را در نظر می‌گیریم این تابع در نقطه مشاهده X را می‌توانیم به‌صورت

[۱] Local support domain
[۲] Pascales



شکل ۲.۲: مثلث پاسکال از چندجمله‌ای‌ها برای دامنه دوبعدی

$$u^h(X) = \sum_{i=۱}^{m} p_i(X)a_i = \{p_۱(X) \quad p_۲(X) \quad \ldots \quad p_m(X)\} \begin{Bmatrix} a_۱ \\ a_۲ \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix} = \mathbf{P}^T\mathbf{a}, \qquad (۱.۲)$$

تقریب بزنیم که $p_i(X)$ چندجمله‌ای‌های پاسکال در مختصات $\mathrm{X}^T = [x, y]$ هستند، که در شکل ۲.۲ نشان داده شده است (در حالت دو بعدی).

تعریف ۲.۲.۲. به ماتریس مربعی متقارنی که درایه‌های آن از تک‌جمله‌ای‌ها تشکیل شده باشند، ماتریس ممان گفته می‌شود.

تعریف ۳.۲.۲. چندجمله‌ای‌های پایه کامل از درجه p به شکل

$$\mathbf{p}^T(X) = \{۱ \quad x \quad x^۲ \quad \ldots \quad x^{p-۱} \quad x^p\} \qquad (۱-D)$$

$$\mathbf{p}^T(X) = \{۱ \quad x \quad y \quad x^۲ \quad xy \quad y^۲ \quad \ldots \quad x^p \quad y^p\} \qquad (۲-D)$$

نوشته می‌شوند.

در این حالت برای تعیین ضرایب a_i، یک محمل دامنه موضعی برای نقطه مشاهده X شامل n گره تعیین می‌شود. توجه کنید که در روش PPIM، تعداد گره‌ها در محمل دامنه موضعی، همیشه

برابر تعداد توابع پایه‌ای می‌باشد، به این معنی که $n = m$. بنابراین اگر فرض کنیم که مقدار تابع $u(X)$ در محل گره‌ها مشخص باشد، با برابر قرار دادن این تابع با مقادیر معلوم در محل گره‌ها به تعداد a_i معادله داریم به این معنی که

$$\begin{cases} u_1 = \sum_{i=1}^{m} a_i P(X_1) = a_1 + a_2 x_1 + a_3 y_1 + ... + a_m P_m(X_1), \\ u_2 = \sum_{i=1}^{m} a_i P(X_2) = a_1 + a_2 x_2 + a_3 y_2 + ... + a_m P_m(X_2), \\ \vdots \\ u_n = \sum_{i=1}^{m} a_i P(X_n) = a_1 + a_2 x_n + a_3 y_n + ... + a_m P_m(X_n). \end{cases} \tag{۲.۲}$$

معادله (۲.۲) را می‌توان به‌شکل u ماتریسی

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{P}_m \mathbf{a}, \tag{۳.۲}$$

نوشت که

$$\mathbf{U}_s = [u_1, u_2, ..., u_n]^T,$$

برداری از مقدارهای گره‌ای تابع[۳] و

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_m \end{Bmatrix}$$

برداری از ضرایب مجهول[۴]، و

$$\mathbf{P}_m = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & \dots & P_m(X_1) \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & \dots & P_m(X_2) \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & \dots & P_m(X_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n & x_n y_n & \dots & P_m(X_n) \end{bmatrix}, \tag{۴.۲}$$

[۳] Nodal function values
[۴] Unknown coefficient