ذ [section]   0.0

دانشگاه تربیت معلم

دانشکدهٔ علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامهٔ کارشناسی‌ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

آرنز منظمی اعمال مدولی، الحاقی دوم یک اشتقاق

و

مرکزهای توپولوژیک برخی اعمال مدولی باناخ

تدوین

ابوطالب شیخعلی

استادان راهنما

دکتر علی‌رضا مدقالچی

دکتر جواد لالی

خرداد ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان‌نامه، معیاری را برای آرنز منظم بودن یک نگاشت دوخطی کران‌دار بر فضاهای نرم‌دار بیان می‌کنیم و از ویژگی اعمال مدولی باناخ استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم الحاقی دوم یک اشتقاق، یک اشتقاق است. در ادامه چند اثبات مستقیم برای برخی نتایج قدیمی ارائه می‌دهیم.
همچنین مرکزهای توپولوژیک الحاقی برخی اعمال مدولی را بیان و ویژگی قویاً نامنظم بودن را برای این اعمال بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: ضرب‌های آرنز، نگاشت دوخطی کران‌دار، اعمال مدولی، اشتقاق، مرکزهای توپولوژیک، تجزیه شدن.

رده‌بندی موضوعی ریاضی (۲۰۱۰): 46H25، 46H20.

مقدمه

یکی از اساسی‌ترین مفاهیم در دوگان دوم جبرهای باناخ مفهوم آرنز[1] منظم است. در سال ۱۹۵۱ آرنز نشان داد که یک نگاشت دوخطی کران‌دار $f : X \times Y \longrightarrow Z$ روی فضاهای نرم‌دار دارای دو توسیع به صورت‌های f^{***} و f^{r***r} از $X^{**} \times Y^{**}$ به Z^{**} است. هنگامی‌که این توسیع‌ها برابر باشند f آرنز منظم نامیده می‌شود. ضرب $\pi : A \times A \longrightarrow A$ جبر باناخ A را در نظر می‌گیریم، π^{***} و π^{r***r} را به‌ترتیب ضرب‌های اول و دوم آرنز می‌نامیم و با نمادهای $\square$ و $\lozenge$ نمایش می‌دهیم. هنگامی‌که $\square = \lozenge$، جبر باناخ A را آرنز منظم می‌نامیم.

این پایان نامه شامل پنج فصل است. فصل اول مروری بر تعاریف و قضیه‌های مورد نیاز است که در فصل‌های آتی از آن‌ها استفاده خواهد شد. در فصل دوم، ابتدا توسیع‌های یک نگاشت دوخطی کران‌دار را بیان می‌کنیم و زمینه را برای تعریف ضرب‌های آرنز مهیا می‌سازیم. سپس مرکزهای توپولوژیک و اعمال مدولی را تعریف می‌کنیم و در انتهای فصل هم برخی نتایج قدیمی را بررسی می‌کنیم. در فصل سوم، معیاری برای آرنز منظم بودن نگاشت دوخطی کران‌دار ارائه می‌شود و نشان می‌دهیم f آرنز منظم است اگروتنها اگر $f^{****}(Z^*, X^{**}) \subseteq Y^*$، که به نوبه خود برخی نتایج قدیمی در مورد این موضوع را پوشش می‌دهد. سپس در ادامه، به بررسی نگاشت اشتقاق می‌پردازیم و شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آن D^{**} نیز یک اشتقاق شود. در فصل چهارم، مرکزهای توپولوژیک π_1^{r*} و π_2 را هنگامی‌که (π_1, X) و (X, π_2) به‌ترتیب $A-$مدول‌های باناخ تقریباً یکانی چپ و راست هستند بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که π_1^{r*} و π_2^* همیشه قویاً نامنظم چپ هستند و سپس ویژگی مرکزهای توپولوژیک راست π_1^{r*} و π_2^* را

---

[1] Arens

بررسی می‌کنیم. در پایان فصل رابطه آرنز منظم بودن برخی اعمال مدولی را هنگامی‌که (π_1^{r***r}, X^{**}) و (X^{**}, π_2^{***}) تجزیه می‌شوند به‌دست می‌آوریم. در فصل پنجم با فرض انعکاسی بودن فضای X نتایجی را به‌دست می‌آوریم و شرایطی را بیان می‌کنیم که ویژگی قویاً نامنظم چپ یک نگاشت دوخطی کران‌دار معادل ویژگی قویاً نامنظم راست آن می‌شود.

چهار فصل اول این پایان نامه بر اساس مقاله‌های

S. Mohammadzadeh and H.R.E. Vishki, Arens regularity of module actions and the second adjoint of a derivation, Bull Austral. Math. Soc. 77 (2008) 465-476.

S. Barootkoob, S. Mohammadzadeh and H.R.E. Vishki, Topological Centers of Certain Banach Module Actions, Bulletin of the Iranian Mathematical Society, Vol. 35 No. 2 (2009), 25-36.

تدوین شده است و مقاله‌های فرعی

M. Eshaghi Gorji and M. Filali, Arens regularity of module actions, Studia Math. 181 (3) (2007) 237-254.

H. G. Dales, A. Rodriguez-Palacios and M. V. Velasco, The second transpose of a derivation, J London Math. Soc. 64(2) (2001), 707-721.

نیز مورد استفاده قرار گرفته‌اند. فصل پنجم، نتایجی است که توسط مولف پایان‌نامه استخراج شده است.

فهرست مندرجات

فصل ۱

مفاهیم و مقدمات اولیه

۱.۱ اندازه‌پذیری

۱.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X یک مجموعه باشد. گردایهٔ $\mathfrak{M}$ از زیر مجموعه‌های X را یک $\sigma-$جبر در X می‌نامیم درصورتی که

آ) $X \in \mathfrak{M}$؛

ب) اگر $A \in \mathfrak{M}$ آنگاه $A^c \in \mathfrak{M}$ (A^cمکمل A نسبت به X است)؛

پ) اگر به ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $A_n \in \mathfrak{M}$ آنگاه $\bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$.

۲.۱.۱ قضیه. [24, 1.10]. اگر $\mathcal{F}$ گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد آنگاه کوچک‌ترین $\sigma-$جبری در X مانند $\mathfrak{M}^*$ وجود دارد که $\mathcal{F} \subset \mathfrak{M}^*$.

۳.۱.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشد. اعضای کوچک‌ترین $\sigma-$جبر شامل مجموعه‌های باز را مجموعه‌های بورل[۱] می‌نامیم. این $\sigma-$جبر را با $\mathfrak{B}$ نشان می‌دهیم.

۴.۱.۱ تعریف. اگر $\mathfrak{M}$ یک $\sigma-$جبر در X باشد آنگاه $(X, \mathfrak{M})$، یا به‌طور خلاصه، X را یک فضای اندازه پذیر و اعضای $\mathfrak{M}$ را مجموعه‌های اندازه پذیر در X می گوییم.

---

[۱] Borel

۵.۱.۱ تعریف. فرض کنیم f نگاشتی از فضای اندازه‌پذیر X به فضای توپولوژیک Y باشد. گوییم f اندازه‌پذیر است اگر به ازای هر مجموعهٔ باز V در Y، $f^{-1}(V)$ یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر در X باشد.

۶.۱.۱ تعریف. فرض کنیم $\mu : \mathfrak{M} \longrightarrow [0,\infty]$ نگاشتی باشد که

آ) $\mu(\phi) = 0$،

ب) به ازای هر $i,j \in I$ که $i \neq j$ و $A_i \cap A_j = \phi$ داشته باشیم $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. در این صورت، μ را یک اندازه می‌نامیم و $(X,\mathfrak{M},\mu)$ را فضای اندازه می‌گوییم.

۷.۱.۱ تعریف. فرض کنیم μ یک اندازه روی $\sigma-$جبر بورل $\mathfrak{B}$ باشد. اندازهٔ μ را یک اندازه رادون[2] می‌نامیم در صورتی که

آ) به ازای هر مجموعهٔ فشرده چون K داشته باشیم $\mu(K) < \infty$،

ب) به ازای هر مجموعهٔ بورل A داشته باشیم $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq A, \text{فشرده است } K\}$.

۸.۱.۱ تعریف. فضای برداری X روی میدان F را یک فضای نرم‌دار می‌نامیم اگر نگاشت $\|.\| : X \longrightarrow [0,\infty)$ وجود داشته باشد که به ازای هر $x,y \in X$ داشته باشیم:

آ) $\|x\| = 0$ اگروتنها اگر $x = 0$،

ب) به ازای هر $\alpha \in F$ داشته باشیم $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$،

پ) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

۹.۱.۱ تعریف. فضای نرم‌دار X را یک فضای باناخ[3] می‌نامیم هرگاه هر دنبالهٔ کوشی در این فضا همگرا باشد.

۱۰.۱.۱ تعریف. فرض کنیم E زیرمجموعه‌ای از فضای اندازهٔ X باشد. مجموعهٔ E را موضعاً پوچ می‌نامیم هرگاه به ازای هر F که $\mu(F) < \infty$، داشته باشیم $\mu(E \bigcap F) = 0$.

[2] Radon

[3] Banach

۱۱.۱.۱ تعریف. فرض کنیم f تابعی اندازه‌پذیر بر فضای اندازهٔ X باشد و $1 \leq p < \infty$. در این‌صورت،

$$\mathcal{L}^p(\mu) = \{f | f : X \longrightarrow \mathbb{C} \ , \ (\text{اندازه‌پذیر } f), \ \int_X |f|^p d\mu < \infty\}.$$

روی $\mathcal{L}^p(\mu)$ نسبت $\sim$ را چنین تعریف می‌کنیم، $f \sim g$ اگروتنها اگر تقریباً همه‌جا $f - g = 0$. در این‌صورت $L^p(\mu) = \dfrac{\mathcal{L}^p(\mu)}{\sim}$ تعریف می‌کنیم که نرم در آن به‌صورت $\|f\|_p = (\int_X |f|^p d\mu)^{1/p}$ است.

$L^\infty(\mu)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$L^\infty(\mu) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} \ , \ (\text{اندازه‌پذیر } f) \ , \|f\|_\infty = ess \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty\}$$

که در تعریف بالا $ess \sup_{x \in X} |f(x)| = \inf\{M : \{x : |f(x)| \geq M\}$ موضعاً پوچ باشد $\}$ است.

۱۲.۱.۱ تعریف. فضای همهٔ دنباله‌های همگرا از اعداد مختلط را با c و فضای همهٔ دنباله‌های همگرا به صفر را با c_0 نشان می‌دهیم. c و c_0 با نرم $\| \ \|_\infty$ باناخ هستند.

۲.۱ فضای هیلبرت

۱.۲.۱ تعریف. فرض کنیم H یک فضای برداری مختلط باشد. ضرب داخلی روی H تابعی مانند $\langle .,. \rangle : H \times H \longrightarrow F$ است به‌طوری‌که برای هر $x, y, z \in H$ و هر $\alpha, \beta \in F$ در شرایط زیر صدق کند:

آ) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$؛

ب) $\langle x, x \rangle \geq 0$؛

پ) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$؛

ت) تساوی $\langle x, x \rangle = 0$ ایجاب می‌کند که $x = 0$.

در این صورت زوج $(H, \langle .,. \rangle)$ را یک فضای ضرب داخلی می‌نامیم، در اینجا نرم به‌صورت $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ تعریف می‌شود. فضای ضرب داخلی H را یک فضای هیلبرت[۴] می‌گوییم هرگاه با متر حاصل از ضرب داخلی، یک فضای متریک کامل باشد.

---

[۴] Hilbert

۲.۲.۱ تعریف. اگر $x,y \in H$ و $\langle x,y\rangle = 0$ آنگاه x را عمود بر y گوییم و به‌صورت $x \perp y$ نمایش می‌دهیم و تمام اعضای متعامد بر x را با نماد $x^{\perp}$ نشان می‌دهیم و اگر برای هر $x \in A$ و $y \in B$ داشته باشیم $x \perp y$ آنگاه می‌نویسیم $A \perp B$.

۳.۲.۱ قضیه. [24, 4.9]. برای هر زیر مجموعهٔ A از H، $A^{\perp}$ زیرفضای برداری بسته از H است.

۴.۲.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان F باشد. زیرمجموعهٔ Y از X را پایه‌ای برای X گوییم اگر Y مستقل خطی باشد و فضای X را تولید کند.

۵.۲.۱ تعریف. فرض کنیم H یک فضای ضرب داخلی باشد. اگر I یک مجموعهٔ اندیس‌گذار باشد، آنگاه $\{x_\alpha : \alpha \in I\}$ را یک مجموعهٔ متعامد یکه گوییم، هرگاه، هر دو عضو متمایز آن متعامد باشند و به ازای هر $\alpha \in I$، $\|x_\alpha\| = 1$ به‌عبارتی اگر $\alpha, \beta \in I$ آنگاه $\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = \delta_{\alpha,\beta}$ که $\delta_{\alpha,\beta}$ تابع دلتای کرونکر[5] است یعنی

$$\delta_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha=\beta \\ 0 & \alpha\neq\beta \end{cases}$$

۶.۲.۱ تعریف. فرض کنیم M زیر فضای بسته‌ای از فضای نرم‌دار X باشد. اگر زیر فضای بسته‌ای مانند N از X موجود باشد به‌طوری‌که $M \cap N = (0)$ و $X = M + N$ آنگاه M را یک زیر فضای متکامل X می‌نامیم و در این‌حالت می‌نویسیم $X = M \bigoplus N$.

۳.۱ جبرهای باناخ

۱.۳.۱ تعریف. فرض کنیم مجموعهٔ I با رابطه $\leq$ یک مجموعهٔ جزئاً مرتب باشد، در این‌صورت $(I, \leq)$ را جهت‌دار می‌نامیم هرگاه به ازای هر α, β از I، γای عضو I موجود باشد که $\alpha \leq \gamma$ و $\beta \leq \gamma$.

[5] Kroneker delta

۲.۳.۱ تعریف. تابعی از مجموعهٔ جهت‌داری مانند I به‌توی فضای توپولوژیک X را یک تور می‌نامیم و معمولاً به‌صورت (x_α) نمایش می‌دهیم.
در یک فضای توپولوژیک X گوییم (x_α) به x همگراست، اگر به ازای هر همسایگی U از x، عضوی از I مانند β موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر $\alpha \in I$ که $\beta \leq \alpha$ داشته باشیم $x_\alpha \in U$.
حال فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. تور x_α را کران‌دار می‌نامیم هرگاه عدد مثبت M به‌گونه‌ای باشد که $\|x_\alpha\| \leq M$.

۳.۳.۱ تعریف. فضای باناخ A روی میدان مختلط $\mathbb{C}$ (حقیقی $\mathbb{R}$) را یک جبر باناخ مختلط (حقیقی) می‌نامیم در صورتی‌که دارای یک ضرب با خاصیت‌های زیر باشد.

آ) $x(yz) = (xy)z$؛

ب) $x(y+z) = xy + xz$ و $(x+y)z = xz + yz$؛

پ) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$،

و به‌علاوه $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$. هرگاه جبر باناخ A دارای عضو یکهٔ e باشد که $\|e\| = ۱$ آنگاه A را یک جبر باناخ یک‌دار می‌نامیم.

۴.۳.۱ تعریف. گروه G را یک گروه توپولوژیک می‌نامیم، هرگاه یک توپولوژی روی G موجود باشد به‌طوری‌که نگاشت‌های

$$\begin{array}{c} G \longrightarrow G \\ x \longrightarrow x^{-1} \end{array} \quad , \quad \begin{array}{c} G \times G \longrightarrow G \\ (x,y) \longrightarrow xy \end{array}$$

پیوسته باشند. G را موضعاً فشرده نامیم، هرگاه هر نقطه آن دارای همسایگی با بستار فشرده باشد.

۵.۳.۱ تعریف. فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک باشد. اندازهٔ رادون λ بر G را اندازه هار[۶] چپ می‌نامیم هرگاه به ازای هر $x \in G$ و به ازای مجموعهٔ بورل E داشته باشیم $\lambda(xE) = \lambda(E)$ و اگر $\lambda(Ex) = \lambda(E)$ آنگاه λ را اندازه هار راست می‌نامیم.

[۶] Haar

٦.٣.١ قضیه. [14, 2.10]. هر گروه توپولوژیک موضعاً فشرده دارای اندازه هار چپ یکتاست (یکتایی به این معنا که اگر λ و μ دو اندازه هار چپ روی G باشند آنگاه $c > ٠$ وجود دارد که $\mu = c\lambda$).

٧.٣.١ مثال. گروه $(\mathbb{Z}, +)$ با توپولوژی گسسته یک گروه توپولوژیک است و اندازهٔ شمارشی اندازه هار آن است. گروه $(\mathbb{R}, +)$ با توپولوژی معمولی یک گروه توپولوژیک است و اندازهٔ لبگ، اندازه هار آن است.

٨.٣.١ تعریف. فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده با اندازه هار چپ λ باشد

$$L^{١}(G) = \{f | f : G \longrightarrow \mathbb{C} \ , \int_G |f| d\lambda < \infty, \text{ اندازه‌پذیر } f\}.$$

٩.٣.١ قضیه. [15, 20.10]. ضرب $L^{١}(G) \times L^{١}(G) \longrightarrow L^{١}(G)$ با ضابطه $(f, g) \longrightarrow f * g$ به‌صورت زیر

$$f * g(x) = \int_G f(y) g(y^{-١}x) d\lambda$$

$L^{١}(G)$ را به یک جبر باناخ تبدیل می‌کند، که به آن، جبر گروهی می‌گویند.

١٠.٣.١ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد، نگاشت $* : A \longrightarrow A$ را یک برگشت بر A می‌نامیم هرگاه به ازای هر x, y از A و $\lambda \in \mathbb{C}$ داشته باشیم:

آ) $(x + y)^* = x^* + y^*$؛

ب) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$؛

پ) $(xy)^* = y^* x^*$؛

ت) $x^{**} = x$،

در این‌صورت $(A, *)$ را یک $*-$جبر گوییم. اگر به ازای هر x از A تساوی $\|x^* x\| = \|x\|^{٢}$ برقرار باشد آنگاه A را یک C^*-جبر می‌نامیم.

١١.٣.١ مثال. فرض کنیم $C[٠, ١]$ مجموعه توابع پیوسته بر $[٠, ١]$ باشد و به ازای هر $f \in C[٠, ١]$، $\|f\|_\infty = \sup\limits_{٠ \leq x \leq ١} |f(x)|$ باشد. در این‌صورت، $C[٠, ١]$ با ضرب نقطه‌ای یک جبر باناخ است. اگر برگشت را به صورت $* : f \longrightarrow \bar{f}$ تعریف کنیم آنگاه $C[٠, ١]$ یک C^*- جبر است.

۱۲.۳.۱ تعریف. فرض کنیم A یک جبر باناخ باشد. تور (e_α) در A را همانی تقریبی چپ (راست) برای A می‌نامیم درصورتی‌که به ازای هر a از A داشته باشیم

$$\lim_\alpha e_\alpha a = a. \qquad (\lim_\alpha a e_\alpha = a)$$

همانی تقریبی چپ(راست) A را کران‌دار می‌نامیم هرگاه $\sup_\alpha \|e_\alpha\| < \infty$. هرگاه تور (e_α) همانی تقریبی چپ و راست برای A باشد آنگاه (e_α) را همانی تقریبی برای A می‌نامیم.

۱۳.۳.۱ قضیه. تجزیه کوهن[۷] [6, pp 61]. فرض کنیم جبر باناخ A دارای همانی تقریبی کران‌دار باشد $z \in A$ و $\delta > 0$. در این‌صورت a, y عضو A وجود دارند که $z = ay$ و $\|z - y\| \leq \delta$.

۴.۱ عملگرهای خطی کران‌دار و توپولوژی‌های ضعیف وضعیف ستاره

۱.۴.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان F و τ یک توپولوژی روی آن باشد. دراین‌صورت (X, τ) را یک فضای برداری توپولوژیک می‌نامیم هرگاه:

آ) به ازای هر $x \in X$، مجموعهٔ تک عضوی $\{x\}$ بسته باشد؛

ب) نگاشت‌های $+ : X \times X \longrightarrow X$ و $. : F \times X \longrightarrow X$ نسبت به توپولوژی τ پیوسته باشند.

لازم به‌ذکر است که فضاهای نرم‌دار حالت خاصی از فضاهای برداری توپولوژیک هستند.

۲.۴.۱ تعریف. عملگر خطی T از فضای نرم‌دار X به فضای نرم‌دار Y را کران‌دار می‌نامیم هرگاه عدد $K > 0$ وجود داشته باشد که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $\|Tx\| \leq K\|x\|$، دراین‌صورت K را یک کران برای T خوانیم.

۳.۴.۱ قضیه. [25, 2.3]. اگر X و Y دو فضای نرم‌دار و $T : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد آنگاه T کران‌دار است اگروتنها اگر T پیوسته باشد.

[۷] Cohen Factorization

۴.۴.۱ قضیه. [25, 2.4]. مجموعهٔ $B(X,Y)$ شامل تمام عملگرهای خطی کران‌دار از فضای نرم‌دار X به فضای نرم‌دار Y، با جمع و ضرب اسکالر نقطه‌وار عملگرها و نرم زیر یک فضای نرم‌دار است.

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$$

به‌علاوه اگر Y یک فضای باناخ باشد آنگاه $B(X,Y)$ نیز با نرم مذکور یک فضای باناخ است. معمولاً $B(X,X)$ را با $B(X)$ نمایش می‌دهیم.

۵.۴.۱ تعریف. فرض کنیم H یک فضای هیلبرت باشد. عملگرهای رده اثر بر H را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$TB(H) = \{T \in B(H) : \|T\|_1 = tr|T| = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \psi_n, |T|\psi_n \rangle < \infty\}$$

که در آن $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$، یک پایهٔ یکا متعامد برای H است.

۶.۴.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار باشد. دوگان X، مجموعهٔ تمام تابعک‌های خطی پیوسته روی X است که آن‌را با X^* نمایش می‌دهیم. X^* یک فضای نرم‌دار است و نرم در آن به‌صورت نرم در $B(X,Y)$ است، به عبارت دیگر، به ازای $\Lambda \in X^*$

$$\|\Lambda\| = \sup\{\|\Lambda x\| : \|x\| \leq 1\}.$$

دوگان X^* یعنی $(X^*)^*$ که آن‌را با X^{**} نمایش می‌دهیم و به همین ترتیب $X^{***},\ldots$ تعریف می‌شوند.

۷.۴.۱ مثال. برای گروه موضعاً فشرده G داریم $(L^1(G))^* = L^\infty(G)$ و برای فضای دنباله‌ای $c_\circ$ داریم:

$$c_\circ{}^* = l^1(N) = \{x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\} \quad , \quad c_\circ{}^{**} = (l^1(N))^* = l^\infty(N)$$

که برای اطلاعات بیشتر می‌توانید به [10, 3.3] مراجعه کنید.

۸.۴.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای برداری باشد، تابع $p : X \longrightarrow R$ را یک تابع زیرخطی می‌نامیم هرگاه:

آ) به ازای هر $x, y \in X$، $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$؛

ب) به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$.

۹.۴.۱ قضیه. هان–باناخ[۸] [25, 4.6]. فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی، p یک تابعک زیرخطی روی X و M یک زیرفضای برداری X باشد، اگر تابعک خطی $f : M \longrightarrow R$ در شرط $(x \in M) f(x) \leq p(x)$ صدق کند، آنگاه f دارای یک توسیع $\Lambda : X \longrightarrow R$ است به قسمی که به ازای هر $x \in M$

$$-p(-x) \leq \Lambda x \leq p(x).$$

۱۰.۴.۱ قضیه. [24, 5.20]. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و $x \in X - \{\circ\}$ باشد. دراین‌صورت، $\Lambda \in X^*$ای وجود دارد که $\|\Lambda\| = ۱$ و $\|x_\circ\| = \Lambda x_\circ$.

۱۱.۴.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و X^{**} دوگان دوم X باشد. در این‌صورت، نگاشت $J : X \longrightarrow X^{**}$ را نشاندن طبیعی می‌نامیم درصورتی‌که

$$\langle J(x), x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle \qquad (x \in X, x^* \in X^*).$$

نشاندن طبیعی یک یکریختی طولپا از X به $J(X)$ است. در بعضی مواقع $J(x)$ را با $\widehat{x}$ نمایش می‌دهیم، پس $\langle \widehat{x}, x^* \rangle = \langle x^*, x \rangle$. اگر J پوشا باشد یعنی $J(X) = X^{**}$ آنگاه X را انعکاسی می‌نامیم.

قرارداد. در این پایان‌نامه، معمولاً یک فضای نرم دار را با تصویر طبیعی آن در دوگان دومش یکی می‌گیریم.

---

[۸] Hahn-Banach

۱۲.۴.۱ مثال. فضای $L^{1}(\mu)$ باناخ است اما انعکاسی نیست زیرا در حالت کلی بنا به [24, pp 157]

$$L^{1**}(\mu) = L^{\infty *}(\mu) \neq L^{1}(\mu).$$

لازم به‌ذکر است که فضاهای $L^{p}(\mu)$ برای $1 < p < \infty$ همگی انعکاسی هستند زیرا $L^{p**}(\mu) = L^{q*}(\mu) = L^{p}(\mu)$ که q مزدوج خطی p است.

۱۳.۴.۱ مثال. c_{0} انعکاسی نیست زیرا $c_{0}{}^{*} = l^{1}$ و $(l^{1})^{*} = l^{\infty}$ و $c_{0}{}^{**} = (l^{1})^{*} = l^{\infty}$.

۱۴.۴.۱ قضیه. [9]. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. در این‌صورت، X انعکاسی است اگروتنها اگر X^{*} انعکاسی باشد.

۱۵.۴.۱ تعریف. فرض کنیم X یک مجموعه و τ_{1} و τ_{2} دو توپولوژی روی X باشند و $\tau_{1} \subseteq \tau_{2}$ در این حالت می‌گوییم τ_{1} ضعیف‌تر از τ_{2} است.

۱۶.۴.۱ تعریف. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و $X^{*} = B(X, \mathbb{C})$ دوگان X باشد. ضعیف‌ترین توپولوژی روی X را که به ازای هر x^{*} از X^{*} نسبت به آن پیوسته باشد توپولوژی ضعیف روی X می‌نامیم و آن‌را با $\sigma(X, X^{*})$ نمایش می‌دهیم.

توپولوژی $\sigma(X^{*}, J(X))$ یعنی کوچک‌ترین توپولوژی بر X^{*} را که به ازای هر $x \in X$، $J(x)$ پیوسته باشد توپولوژی ضعیف ستاره بر X می‌نامیم و با $\sigma(X^{*}, X)$ نمایش می‌دهیم.

گوییم تور (x_{α}) با توپولوژی ضعیف به x در X همگراست اگروتنها اگر به ازای هر $x^{*} \in X^{*}$ داشته باشیم $\lim\limits_{\alpha} \langle x^{*}, x_{\alpha} \rangle = \langle x^{*}, x \rangle$ و همچنین تور (x^{*}_{α}) در X^{*} را با توپولوژی ضعیف ستاره همگرا به x^{*} در X^{*} گوییم اگروتنها اگر به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $\lim\limits_{\alpha} \langle x^{*}_{\alpha}, x \rangle = \langle x^{*}, x \rangle$ و به صورت $w^{*} - \lim\limits_{\alpha} x^{*}_{\alpha} = x^{*}$ نمایش می‌دهیم.

۱۷.۴.۱ قضیه.باناخ–آل‌اوغلو[۹] [19, 3.15]. فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیک و V یک همسایگی صفر در آن باشد و

[۹] Banach-Alaoglu

$$K = \{x^* \in X^* : |\langle x^*, x\rangle| \leq ۱,\ \text{به ازای هر } x \text{ عضو } V\}.$$

در این‌صورت K با توپولوژی ضعیف ستاره فشرده است.

۱۸.۴.۱ قضیه.گلدشتاین [۱۰] [18, 3.7]. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد و U_X و $U_{X^{**}}$ به ترتیب گوی‌های یکه بسته در X و X^{**} باشند و $J : X \longrightarrow X^{**}$ نشاندن طبیعی باشد. در این‌صورت، $J(U_X)$ با توپولوژی ضعیف ستاره در $U_{X^{**}}$ چگال است، به‌عبارتی، گوی یکه X با توپولوژی ضعیف ستاره در گوی یکه X^{**} چگال است، به‌ویژه X با توپولوژی ضعیف ستاره در X^{**} چگال است.

۵.۱ نگاشت‌های الحاقی

۱.۵.۱ قضیه. [19, 4.10]. فرض کنیم X و Y فضاهای نرم‌دار باشند و $T \in B(X,Y)$ در این‌صورت $T^* \in B(Y^*, X^*)$ یکتا وجود دارد که به ازای هر $x \in X$ و هر $y^* \in Y^*$ داریم $\langle T^*y^*, x\rangle = \langle y^*, Tx\rangle$.

۲.۵.۱ تعریف. نگاشت T^* در قضیه بالا را عملگر الحاقی T می‌نامیم.

۳.۵.۱ قضیه. فرض کنیم X و Y فضاهای نرم‌دار و $T : X \longrightarrow Y$ عملگری خطی باشد. در این‌صورت، $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ ضعیف ستاره، ضعیف ستاره پیوسته است.

برهان. فرض کنیم (Λ_α) یک تور دلخواه در Y^* باشد به‌طوری‌که (Λ_α) با توپولوژی ضعیف ستاره به Λ همگرا باشد، با توجه به خاصیت همگرایی در توپولوژی ضعیف ستاره به ازای هر $y \in Y$ داریم $\langle \Lambda_\alpha, y\rangle \longrightarrow \langle \Lambda, y\rangle$، از جمله به ازای $x \in X$ داریم $\langle \Lambda_\alpha, Tx\rangle = \langle \Lambda, Tx\rangle$ پس $\langle T^*\Lambda_\alpha, x\rangle \longrightarrow \langle T^*\Lambda, x\rangle$ در نتیجه با توپولوژی ضعیف ستاره $T^*\Lambda_\alpha \longrightarrow T^*\Lambda$. بنابراین، حکم برقرار است. □

۴.۵.۱ تعریف. فرض کنیم $T \in B(X,Y)$ و U_X گوی یکه در X باشد. T را فشرده می‌نامیم اگر $T(U_X)$ به‌طورنسبی در Y فشرده باشد. به‌عبارت دیگر، $\overline{T(U_X)}$ در Y فشرده باشد. اگر $\overline{T(U_X)}$ در Y ضعیف فشرده باشد، آنگاه T را ضعیف فشرده می‌نامیم.

---

[۱۰] Goldstine

۵.۵.۱ قضیه.[19, 4.19]. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $T \in B(X,Y)$ باشد. دراین‌صورت، T فشرده است اگر وتنها اگر T^* فشرده باشد.

۶.۵.۱ قضیه.[18, 4.3]. فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ باشند و $T \in B(X,Y)$ باشد. دراین‌صورت، عبارت‌های زیر هم‌ارزند:

آ) T ضعیف فشرده است؛

ب) $T^{**} : X^{**} \longrightarrow Y^{**}$ عملگری است که $T^{**}(X^{**}) \subseteq J(Y)$؛

پ) $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ ضعیف ستاره، ضعیف پیوسته است.

۷.۵.۱ تعریف. فرض کنیم X، Y و Z فضاهای نرم‌دار روی میدان F باشند، نگاشت $f : X \times Y \longrightarrow Z$ را دوخطی می‌نامیم هرگاه:

آ) برای هر $x_1, x_2 \in X$، $y \in Y$ و $\alpha \in F$ داشته باشیم $f(\alpha x_1 + x_2, y) = \alpha f(x_1, y) + f(x_2, y)$؛

ب) برای هر $y_1, y_2 \in Y$، $x \in X$ و $\beta \in F$ داشته باشیم $f(x, y_1 + \beta y_2) = f(x, y_1) + \beta f(x, y_2)$.

نگاشت دوخطی f کران‌دار است در صورتی‌که $M > 0$ موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر $x \in X$ و هر $y \in Y$، داشته باشیم $\|f(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\|$ و نرم f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|f\| = \sup\{\|f(x,y)\| : \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1\}.$$

مجموعهٔ تمام نگاشت‌های دوخطی کران‌دار از $X \times Y$ به Z را با $BL(X,Y;Z)$ نمایش می‌دهیم.

۸.۵.۱ تعریف. فرض کنیم $f \in BL(X,Y;Z)$. الحاقی f به صورت $f^* : Z^* \times X \longrightarrow Y^*$ با ضابطه زیر تعریف می‌شود

$$\langle f^*(z^*, x), y\rangle = \langle z^*, f(x,y)\rangle \qquad (x \in X, y \in Y, z^* \in Z^*).$$

بدیهی است که f^* نگاشتی دوخطی کران‌دار است.

۹.۵.۱ قضیه. [23, pp 57]. یک نگاشت دوخطی پیوسته است اگر وتنها اگر در مبدا $(0,0)$ پیوسته باشد.