بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه علم و صنعت ایران

دانشکده ریاضی

عنوان

مشابه «قضیه ایده آل اصلی» برای مدولها روی حلقه‌های تعویضپذیر

نگارش

سودابه خیری‌زاده

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

استاد راهنما

جناب آقای دکتر حمید تولایی

زمستان ۱۳۷۹

چکیده:

این پایان‌نامه برداشتی از مقالات [۱] و [۲] می‌باشد. پایان‌نامه شامل یک مقدمه و سه فصل است. فصل اول شامل تعاریف و قضایای مقدماتی است. در فصل دوم خاصیتهایی از زیر مدولهای اول بیان شده است. در فصل سوم به طور خاص به تعمیم قضیه ایده‌آل اصلی کرول برای مدولها پرداخته شده است.

تقدیر و تشکر

برخود لازم می دانم که از زحمات استاد گرانقدر جناب آقای دکتر حمید تولایی که استاد راهنمای اینجانب در تهیهٔ این پایان نامه بوده اند ، صمیمانه تشکر نمایم.

همچنین از حضور جناب آقای دکتر علیرضا ذکائی ، جناب آقای دکتر مهدی علائیان و آقای پاریاب مدیریت محترم تحصیلات تکمیلی که قبول زحمت فرمودند و به عنوان داور پایان نامه تشریف آوردند کمال تشکر و سپاسگزاری را می نمایم.

همچنین از انسانهای وارسته ای که به هر گونه در گذراندن این پایان نامه ، اینجانب را یاری نموده اند ، چون : آقایان دکتر سید حسن رضوی و منصور عیوضی اینانلو صمیمانه سپاس خود را تقدیم می دارم . همچنین مراتب قدر دانی خود را نثار سرکارخانم بتول یوسفی مسئول آموزش دورهٔ تحصیلات تکمیلی و همچنین سرکارخانم رامش که همواره راهنمایی شایسته برای اینجانب بوده اند ، می نمایم.

فهرست مطالب

مقدمه

فصل اول ۹
تعاریف و قضایای مقدماتی

فصل دوم ۴۴
خاصیتهایی مجرد از زیر مدولهای اول

فصل سوم ۷۳
تعمیم قضیه ایده‌آل اصلی برای مدولها

مراجع ۱۴۰
فهرست علایم ۱۴۲
واژه‌نامه ۱۴۳
چکیده پایان‌نامه به زبان انگلیسی ۱۴۸

مقدمه :

قضیه ایده‌آل اصلی بیان می‌کند که اگر R یک حلقه نوتری تعویضپذیر و P ایده‌آل اول باشد به طوری که روی یک ایده‌آل اصلی مینیمال است، آنگاه P دارای بلندی حداکثر یک می‌باشد.

همچنین اگر R، UFD باشد (نه لزوماً نوتری) و P ایده‌آل اول R باشد که روی ایده‌آل اصلی مینیمال می‌باشد آنگاه P دارای بلندی حداکثر یک می‌باشد.

در این پایان‌نامه مطالب مشابهی را برای مدولها روی حلقه‌های تعویضپذیر نشان می‌دهیم. اما این موارد تنها در حالتهای خاص برقرارند.

در سراسر این پایان‌نامه تمام حلقه‌ها تعویضپذیر و یکدار و تمام مدولها یکانی فرض شده‌اند.

مولفین متعددی تئوری ایده‌آلهای اول را به زیر مدولهای اول تعمیم داده‌اند که از آن جمله می‌توان به [۳] اشاره کرد.

بعنوان مثال معلوم شده است که مشابه قضیه کوهنز "cohens theorem" برای مدولها نیز برقرار است یعنی یک مدول با تولید متناهی نوتری است اگر و تنها اگر هر زیر مدول اول آن با تولید متناهی باشد. یکی از پایه‌های تئوری ایده‌آلها، قضیه ایده‌آل اصلی است همین بس که کاپلانسکی آنرا «تنها مهمترین قضیه در تئوری حلقه‌های نوتری» نامیده است. طبیعی است که سوال شود آیا می‌توان آنرا برای مدولها تعمیم داد؟

گوییم قضیه ایده‌آل اصلی (PIT) برای R مدول M برقرار است هرگاه به ازای هر زیر مدول اول K از M به طوری که K روی زیر مدول دوری از M مینیمال است داشته باشیم $ht(k) \leq 1$ ثابت می‌شود که PIT برای تمام R مدولهای فارغ از تاب برقرار است اگر و تنها اگر R یک بعدی باشد یعنی R، PID باشد [قضیه (۳-۳۰)]. بعبارت دیگر اگر R ، UFD باشد آنگاه PID برای تمام R مدولهای پروژکتیو برقرار

است [قضیه (۳-۳۷)].

اگر R نوتری باشد آنگاه R دامنه ددکیند است اگر و تنها اگر PIT برای تمام R مدولهای متناهیاً تولید شده برقرار باشد. [قضیه (۳-۳۴)]. همچنین برای یک دامنه نوتری R، PIT برای تمام R مدولهای پروژکتیو برقرار است اگر و تنها اگر حلقه موضعی Rp برای هر ایده‌آل اول P با بلندی یک یک DVR باشد [قضیه (۳-۳۸)].

فصل اول

تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف (۱-۱): فرض کنیم A یک مجموعه باشد . رابطه R بر $A \times A$ یک رابطه هم ارزی است هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

منعکس : به ازای هر $a \in A$، $(a, a) \in R$ ؛ (۱)

متقارن : $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$ ؛ (۲)

متعدی : $(a, b) \in R$ و $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$. (۳)

تعریف (۱-۲): یک مجموعه جزئی مرتب مجموعه‌ای است ناتهی مانند A همراه با رابطه‌ای چون R بر $A \times A$ (به نام ترتیب جزئی از A) که منعکس و متعدی است و

پاد متقارن : $(a, b) \in R$ و $(b, a) \in R \Rightarrow a = b$ (۴)

هرگاه R یک ترتیب جزئی از A باشد، آنگاه معمولاً به جای $(a, b) \in R$ می‌نویسیم $a \le b$. با این نماد شرایط (۱)، (۲)، (۳) و (۴) (به ازای هر $a, b, c \in R$) خواهند شد:

$$a \le a$$

$$a \le b \Rightarrow b \le a$$

$$a \le b \text{ , } b \le c \Rightarrow a \le c$$

$$a \le b \text{ , } b \le a \Rightarrow a = b$$

اگر $a \le b$ و $a \ne b$، می‌نویسیم $a < b$.

تعریف (۱-۳): عنصرهای $a,b \in A$ را قابل مقایسه گویند اگر $a \le b$ یا $b \le a$. دو عنصر یک مجموعهٔ جزئی مرتب لزوماً قابل مقایسه نیستند . یک ترتیب جزئی از مجموعه A که هر دو عنصرش قابل مقایسه باشند یک ترتیب خطی (یا کلی یا ساده) نامیده می‌شود .

تعریف (۱-۴): فرض کنیم $(A, \le)$ یک مجموعه جزئی مرتب باشد . عنصر $a \in A$ در A ماکزیمال است اگر به ازای هر $c \in A$، که با a قابل مقایسه باشد، $c \le a$؛ به عبارت دیگر، به ازای هر $c \in A$، $a \le c \Rightarrow a = c$.

تعریف (۱-۵): یک کران بالایی زیر مجموعه B از A عنصری است مانند $d \in A$ به طوری که به ازای هر $b \in B$، $b \leq d$.

تعریف (۱-۶): زیر مجموعه ناتهی B از A که با $\leq$ خطی مرتب باشد یک زنجیر در A نام دارد .

لم (۱-۷): **(لم زرن)** . هرگاه A یک مجموعه جزئی مرتب ناتهی باشد به طوری که هر زنجیر در A کران بالایی در A داشته باشد، آنگاه A شامل عنصر ماکزیمال است .

تعریف (۱-۸): یک حلقه مجموعه‌ای است ناتهی مانند R همراه با دو عمل دوتایی (که معمولاً به صورت جمع (+) و ضرب نموده می‌شوند) به طوری که

(یک) $(R, +)$ یک گروه آبلی است؛

(دو) به ازای هر $a,b,c \in R$، $(ab)c = a(bc)$ (ضرب شرکتپذیر است)؛

(سه) $a(b + c) = ab + ac$ و $(a + b)c = ac + bc$ (قوانین بخشپذیری از چپ و از راست) .

هرگاه علاوه بر این

(چهار) به ازای هر $a,b \in R$، $ab = ba$،

آنگاه گوییم R یک حلقه تعویضپذیر است . هرگاه R شامل عنصری مانند 1_R باشد به طوری که

(پنج) به ازای هر $a \in R$، $1_R a = a 1_R = a$،

آنگاه گوئیم R یک حلقه یکدار است .

تعریف (۱-۹): عنصر ناصفر a در حلقه R را یک مقسوم علیه صفر چپ [راست] گوییم اگر عنصر ناصفری مانند $b \in R$ موجود باشد به طوری که $ab = 0$ [$ba = 0$] .

مقسوم علیه صفر، عنصری از R است که هم مقسوم علیه صفر چپ باشد، هم مقسوم علیه صفر راست .

به آسانی معلوم می‌شود که حلقه R مقسوم علیه صفر ندارد اگر و فقط اگر قوانین حذف از راست و از چپ در R برقرار باشند؛ یعنی به ازای هر $a,b,c \in R$ که $a \neq 0$،

$$ab = ac \Rightarrow b = c \quad \text{یا} \quad ba = ca$$

تعریف (۱-۱۰): عنصر a در حلقه یکدار R را معکوسپذیر چپ [راست] گوییم اگر $c \in R$ ای [$b \in R$ ای] وجود داشته باشد که $ca = 1_R$ [$ab = 1_R$] عنصر c [b] معکوس چپ [راست] a نامیده می‌شود. عنصر $a \in R$ که معکوسپذیر چپ و راست باشد، معکوسپذیر یا یکه نامیده می‌شود.

تبصره: معکوسهای چپ و راست یکه a در حلقه یکدار R لزوماً یکی هستند (زیرا $ab = 1_R = ca$ ایجاب می‌کند که $b = 1_R b = (ca)b = c(ab) = c1_R = c$).

تعریف (۱-۱۱): حلقه تعویضپذیر و یکدار R با خاصیت $1_R \neq 0$ و فاقد مقسوم علیه‌های صفر یک دامنه صحیح نامیده می‌شود.

تعریف (۱-۱۲): حقله یکدار D با خاصیت $1_R \neq 0$ که در آن هر عنصر نا صفر یکه باشد یک حلقه بخشی نام دارد.

تعریف (۱-۱۳): هر میدان، یک حلقه بخشی تعویضپذیر است.

چند تبصره:

(یک) هر دامنه صحیح و هر حلقه بخشی دست کم دو عنصر دارد (یعنی؛ 0 و 1_R).

(دو) هر میدان F یک دامنه صحیح است زیرا $ab = 0$ و $a \neq 0$ ایجاب می‌کنند که $b = 1_R b = (a^{-1}a) b = a^{-1}(ab) = a^{-1} 0 = 0$.

تعریف (۱-۱۴): فرض کنیم R و S حلقه باشند. تابع $f:R \to S$ یک همومورفیسم حلقه‌ها است مشروط بر اینکه به ازای هر $a, b \in R$:

$$f(ab) = f(a)\, f(b) \quad \text{و} \quad f(a + b) = f(a) + f(b)$$

به علاوه، اگر حلقه‌ها یکدار باشند بایستی:

$$f(1_R) = 1_S$$

تبصره: یک منومورفیسم [اپی مورفیسم، ایزومورفیسم] از حلقه‌ها یک همومورفیسم از حلقه‌ها است که نگاشتی یک به یک [پوشا، یک به یک و پوشا] باشد. یک منومورنسیم $R \to S$ از حلقه‌ها را گاهی یک

نشانندهٔ R در S می‌نامند .

تعریف (۱-۱۵): هسته همومورفیسم $f: R \to A$ از حلقه‌ها هسته آن به عنوان نگاشت گروههای جمعی است؛ یعنی، $\ker f = \{r \in R \mid f(r) = 0\}$. به همین نحو، نقش f، که با Imf نموده می‌شود، عبارت است از $\{s \in S \mid s = f(r)$ به ازای $r \in R$ ی$\}$.

تعریف (۱-۱۶): فرض کنیم R یک حلقه و S زیر مجموعه‌ای ناتهی از R باشد که تحت اعمال جمع و ضرب در R بسته است . هرگاه S خود حلقه‌ای تحت این اعمال باشد، آنگاه S را یک زیر حلقه R می‌نامیم .

تعریف (۱-۱۷): زیر حلقه I از حلقه R یک ایده‌آل چپ است مشروط بر اینکه

$$x \in I, r \in R \Rightarrow rx \in I ;$$

I ایده‌آل راست است به شرط آنکه

$$x \in I, r \in R \Rightarrow xr \in I ;$$

I ایده‌آل است اگر هم ایده‌آل چپ باشد هم ایده‌آل راست .

هر وقت حکمی در باب ایده‌آلهای چپ داده شود فرض است که مشابه آن برای ایده‌آلهای راست برقرار است .

مثال . هرگاه $f : R \to S$ یک همومورفیسم حلقه‌ها باشد، آنگاه kerf یک ایده‌آل در R بوده و Imf یک زیر حلقه S است . Imf لزوماً ایده‌آلی در S نیست .

مثال . دو ایده‌آل از حلقه R عبارت است از خود R و ایده‌آل بدیهی (که با ۰ نموده می‌شود) که فقط از عنصر صفر تشکیل شده است .

چند تبصره: ایده‌آل [چپ] I از R که $I \neq 0$ و $I \neq R$ یک ایده‌آل [چپ] سره (حقیقی) نامیده می‌شود . هرگاه R دارای واحد 1_R بوده و I یک ایده‌آل [چپ] R باشد، آنگاه $I = R$ اگر و فقط اگر $1_R \in I$.

قضیه (۱-۱۸): زیر مجموعه نا تهی I از حلقه R یک ایده‌آل چپ [راست] است اگر و فقط اگر به ازای

هر $a,b \in I$ و $r \in R$،

یک) $a,b \in I \Rightarrow a - b \in I$

دو) $a \in I$ و $r \in R \Rightarrow ra \in I$ $[ar \in I]$

اثبات. به مرجع [۱۴] مراجعه شود. ■

تعریف (۱-۱۹): فرض کنیم X زیر مجموعه‌ای از حلقه R باشد. همچنین، $\{A_i \mid i \in I\}$ خانوادهٔ تمام ایده‌آلهای [چپ] در R باشد که شامل X هستند. در این صورت، $\bigcap_{i \in I} A_i$ ایده‌آل [چپ] تولید شده به وسیله X نام دارد. این ایده‌آل با (X) نموده می‌شود. عناصر X مولدهای ایده‌آل (X) نام دارند.

تعریف (۱-۲۰): هرگاه $X=\{x_1,x_2,...,x_n\}$، آنگاه گوییم ایده‌آل (X) با تولید متناهی است.

تعریف (۱-۲۱): ایده‌آل (x) تولید شده به وسیله یک عنصر یک ایده‌آل اصلی نام دارد.

تعریف (۱-۲۲): یک حلقه ایده‌آل اصلی حلقه‌ای است که در آن هر ایده‌آل اصلی باشد. یک حلقه ایده‌آل اصلی که دامنه صحیح باشد یک دامنه ایده‌آل اصلی نام دارد.

تعریف (۱-۲۳): فرض کنیم R یک حلقه و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت، گروه خارج قسمتی جمعی $\frac{R}{I}$ حلقه‌ای است که در آن ضرب به صورت زیر داده می‌شود:

$$(a + I)(b + I) = ab + I$$

هرگاه R تعویضپذیر یا یکدار باشد، همین امر برای $\frac{R}{I}$ نیز درست است.

قضیهٔ (۱-۲۴): هرگاه $f: R \to S$ یک همومورفیسم حلقه‌باشد، آنگاه هسته f ایده‌آلی در R است. به عکس، هرگاه I ایده‌آلی در R باشد، آنگاه نگاشت $\pi: R \to \frac{R}{I}$ داده شده با $r \to r + I$ یک اپی مورفیسم حلقه‌ها با هسته I است.

اثبات. به مرجع [۱۴] مراجعه شود. ■

قضیه (۱-۲۵): هرگاه I ایده‌آلی در حلقه R باشد، آنگاه تناظری یک به یک بین مجموعه تمام ایده‌آلهای R که شامل I هستند و مجموعه تمام ایده‌آلهای $\frac{R}{I}$ موجود می‌باشد که با $J \to \frac{J}{I}$ داده شده است. از اینرو،

هر ایده‌آل در $\frac{R}{I}$ به شکل $\frac{J}{I}$ است که در آن J ایده‌آلی از R است که شامل I می‌باشد .

اثبات . به مرجع [۱۴] مراجعه شود .■

تعریف (۱-۲۶): ایده‌آل P در حلقه R را اول گوییم اگر $P \neq R$ و به ازای هر ایده‌آل A و B در R

$$AB \subseteq P \Rightarrow B \subseteq P \text{ یا } A \subseteq P.$$

قضیه (۱-۲۷): هرگاه P ایده‌آلی در حلقه R باشد به طوری که $P \neq R$ و به ازای هر $a, b \in R$،

$$ab \in p \Rightarrow b \in p \text{ یا } a \in p \qquad (۱)$$

آنگاه P اول است . به عکس هرگاه p اول و R تعویضپذیر باشد، آنگاه p در شرط (۱) صدق می‌کند .

اثبات . به مرجع [۱۴] مراجعه شود .■

مثال . ایده‌آل صفر در یک دامنه صحیح اول است، زیرا $ab = ۰$ اگر و فقط اگر $a = ۰$ یا $b = ۰$.

قضیه (۱-۲۸): در حلقه تعویضپذیر R دارای واحد $۱_R \neq ۰$ ایده‌آل p اول است اگر و فقط اگر حلقه خارج قسمتی $\frac{R}{P}$ دامنه صحیح باشد .

اثبات . به مرجع [۱۴] مراجعه شود .■

قرارداد . مجموعه همه ایده‌آلهای اول حلقه R را با Spec(R) نشان می‌دهیم .

تعریف (۱-۲۹): ایده‌آل [چپ] M در حلقه R را ماکزیمال گوییم اگر $M \neq R$ و به ازای هر ایده‌آل [چپ] N که $M \subseteq N \subseteq R$، یا $N = M$ یا $N = R$.

تبصره: هرگاه R حلقه و S مجموعه تمام ایده‌آلهای I از R باشد که $I \neq R$، آنگاه S به وسیله شمول نظریه مجموعه‌ها جزئی مرتب است . M یک ایده‌آل ماکزیمال است (تعریف ۱-۲۹) اگر و فقط اگر M در مجموعه جزئی مرتب S به معنی آمده در تعریف (۱-۴) یک عنصر ماکزیمال باشد .

قضیه (۱-۳۰): درحلقه ناصفر و یکدار R همواره ایده‌آلهای [چپ] ماکزیمال وجود دارند . در واقع، هر ایده‌آل [چپ] در R (جز خود R) مشمول یک ایده‌آل [چپ] ماکزیمال است .

اثبات . به مرجع [۱۴] مراجعه شود .■

قضیه (۱-۳۱): فرض کنیم M ایده‌آلی در حلقه یکدار R با واحد $1_R \neq 0$ باشد .

(یک) هرگاه M ماکزیمال و R تعویضپذیر باشد، آنگاه حلقه خارج قسمتی $\frac{R}{M}$ یک میدان است .

(دو) هرگاه حلقه خارج قسمتی $\frac{R}{M}$ یک حلقه بخشی باشد، آنگاه M ماکزیمال است .

اثبات . به مرجع [۱۴] مراجعه شود . ■

نتیجه (۱-۳۲): شرایط زیر بر حلقه تعویضپذیر و یکدار R با واحد $1_R \neq 0$ معادلند:

(یک) R میدان است؛

(دو) R ایده‌آل سره ندارد؛

(سه) 0 ایده‌آل ماکزیمال در R است؛

(چهار) هر همومورفیسم ناصفر $R \to S$ از حلقه‌ها یک منومورفیسم است .

اثبات . به مرجع [۱۴] مراجعه شود . ■

قضیه (۱-۳۳): فرض کنید M یک ایده‌آل سره در حلقه R باشد . آنگاه M ماکزیمال است اگر و فقط اگر

به ازای هر a که $M \not\ni a$ ، $(M,a)=R$. ((M,a) ایده‌آل تولید شده به وسیله $M\cup\{a\}$ است .)

اثبات . به مرجع [۱۵] مراجعه شود . ■

قضیه (۱-۳۴): هرگاه $f : R \to S$ یک همومورفیسم حلقه‌ها و I ایده‌آل اول S باشد آنگاه $f^{-1}(I)$ ایده‌آل

اول R است و $\frac{R}{f^{-1}(I)}$ با زیر حلقه‌ای از $\frac{S}{I}$ ایزومورف است .

اثبات . به مرجع [۱۵] مراجعه شود . ■

تعریف (۱-۳۵): فرض کنیم I و J دو ایده‌آل حلقه R باشند . در این صورت منظور از $(I:J)$ مجموعه‌ای

به صورت زیر است:

$$(I : J) = \{ r \in R \mid rJ \subseteq I\}$$

لم (۱-۳۶): فرض کنید I و J ایده‌آلهای حلقه R باشند، آنگاه $(I : J)$ یک ایده‌آل از حلقه R است .

اثبات . $x_1, x_2 \in (I :J) \Rightarrow x_1J \in I \, , \, x_2 J \in I \; ; \forall j \; ; j \in J$