دانشگاه تبریز
۱۳۲۶

دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی کاربردی ، گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

بررسی معادلات انتگرال دیفرانسیل فازی غیرخطی و جواب جدید معادله دیفرانسیل فازی خطی با استفاده از مشتق تعمیم یافته قوی

استاد راهنما

دکتر فریبا بهرامی

استاد مشاور

دکتر صداقت شهماد

پژوهشگر

عادل جباری

۱۳۸۹

نام خانوادگی: جباری نام:عادل

عنوان پایان‌نامه: بررسی معادلات انتگرال‌دیفرانسیل فازی غیرخطی و جواب جدید معادله دیفرانسیل فازی خطی با استفاده از مشتق تعمیم‌یافته قوی

استاد راهنما: دکتر فریبا بهرامی

استاد مشاور: دکتر صداقت شهمراد

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل

دانشگاه: تبریز دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: زمستان ۱۳۸۹ تعداد صفحه:

کلیدواژه‌ها: مجموعه اعداد فازی، مشتق تعمیم‌یافته، معادله انتگرال‌دیفرانسیل فازی خیرخطی، معادله دیفرانسیل فازی خطی

چکیده

در این پایان‌نامه ما یک مسئله انتگرال‌دیفرانسیل فازی غیرخطی را در نظر گرفته‌ایم و وجود و یکتایی جواب را برای این مسئله تحت مشتق تعمیم‌یافته اثبات کرده‌ایم. این تحقیق بر اساس مقالات [۱]، [۲] و [۳] بنا شده است. مولفان مقاله [۲] قضایای وجود و یکتایی را برای معادله انتگرال‌دیفرانسیل، ارائه کرده‌اند که غلط می‌باشد. ما این غلط‌ها را اصلاح کرده و نتایج را با استفاده از مشتق تعمیم‌یافته توسعه داده‌ایم. درنهایت با استفاده از مشتق تعمیم‌یافته، جواب‌های جدیدی برای معادله دیفرانسیل فازی خطی ارائه کرده‌ایم.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

مقدمه

در نیمه های قرن گذشته میلادی (۱۹۶۵) بود که آقای لطفی عسگرزاده – صاحب کرسی رشته برق دانشگاه کالیفرنیا در برکلی – وجود کمبودهایی را در علم ریاضیات حس کرد و نظریاتی جهت رفع آنها پایه‌ریزی کرد ([۱۳]). این کمبودها را – که کم و بیش توسط عموم ریاضی‌دانان درک می‌شد – شاید بتوان در یک جمله خلاصه کرد "عدم تطبیق کامل ریاضیات با دنیای واقعی".

خلاصه شدن کاربرد ریاضیات در علوم فیزیکی و طبیعی و کاربرد بسیار ضعیف آن در علوم انسانی و حتی برخورد بسیار ایده‌آل‌گونه با پدیده‌های فیزیکی مشکلی نبود که بتوان از آن گذشت و بدین ترتیب شالوده "ریاضیات فازی" ریخته شد. شاخه‌ای که بعضی در ابتدا تفاوت آنرا با بحث احتمالات درک نمی‌کردند.

ولی بحث از یک تغییر عمده در علم ریاضیات است پس باید از اساس شروع کرد یعنی از نظریه مجموعه‌ها، مبحثی که پایه آنالیز، جبر، و هر شاخه دیگر از ریاضیات است.

امروزه بحث ریاضیات فازی در اکثر شاخه‌های ریاضی وارد شده است. از این جمله می‌توان گراف فازی، توپولوژی فازی، هندسه فازی و جبر فازی را نام برد. کتاب "مقدمه‌ای بر ریاضیات فازی برای دانشجویان علوم و مهندسی" [۸] توسط "جان ان مردسون"[1] و "پرمچاند اس نیر"[2] توانسته است در هریک از گرایشهای مذکور قضایا و نکات اساسی و پایه‌ای را ارائه نماید و خواننده را بطور اجمالی با هریک از این گرایش‌ها آشنا سازد. متن حاضر (مقدمه) و برخی تعاریف و ویژگی‌های ابتدایی این پایان‌نامه هم از مقدمه همین کتاب اقتباس شده است.

در زمینه معادلات دیفرانسیل فازی نیز کارهای زیادی، هم در بحث‌های تئوری و هم در مباحث عددی انجام شده است که در قسمتی از این پایان‌نامه به یک نوع جدید از جواب‌های معادلات مرتبه یک خطی خواهیم پرداخت. مبحث معادلات انتگرال‌دیفرانسیل فازی نیز که از سال ۲۰۰۰ میلادی به بعد مورد توجه قرار گرفته است، موضوع اصلی این پایان‌نامه را تشکیل می‌دهد. البته از عمر معادلات انتگرال‌دیفرانسیل نیز فقط کمی بیش از یک قرن می‌گذرد.

بعضی از تعاریف اساسی در ریاضیات فازی با توجه به نوپا بودن آن مرتب دچار تغییر و تحولاتی شده و می‌شوند. مثلا شاید در کتب مختلف، تعاریف متفاوتی از اعمال اجتماع و یا اشتراک روی مجموعه‌های فازی دیده شود و یا آنگونه که مفصلا توضیح داده خواهد شد، تعریف مشتق و انتگرال برای توابع فازی از بدو تعریف در مسیر تکامل قرار گرفته‌اند.

[1] John N Mordson
[2] Permchand S Nir

فصل ۱

حساب دیفرانسیل و انتگرال فازی

فصل اول این پایان‌نامه شامل تعاریف و مباحث اولیه ریاضیات فازی است. این مباحث از تعریف مجموعه فازی و روابط روی آن‌ها شروع می‌شود و با تعریف متر روی مجموعه‌های فازی و $\alpha-$ برش‌ها و اعداد فازی ادامه می‌یابد و با بحث مشتق و انتگرال فازی تکمیل می‌شود. عموم مطالب این فصل در اکثر کتاب‌هایی که در این زمینه نوشته شده‌اند، یافت می‌شود.

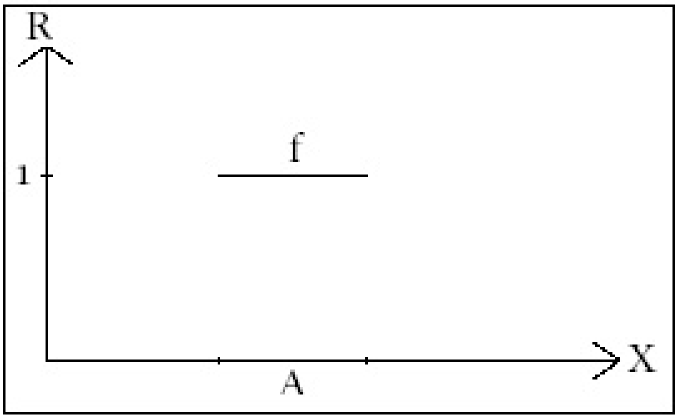
۱.۱ مجموعه فازی و خواص آن

ابتدا نگاهی به نظریه مجموعه‌ها در ریاضیات کلاسیک می‌اندازیم. می‌دانیم که به طور نادقیق مجموعه را گردایه‌ای ازاعضاء در نظر می‌گیریم و به عبارتی بهتر هر مجموعه با اعضایش شناخته می‌شود. اعضای یک مجموعه می‌توانند متناهی یا نامتناهی، عدد یا حروف و یا حتی ترکیبی از اجناس مختلف باشند. این مهم نیست، و حتی لازم نیست که اعضای مجموعه را بطور دقیق بشناسیم و تقریبا تنها چیزی که برایمان اهمیت دارد، وضعیت تعلق هر شیء به مجموعه است. یعنی هر شیء باید دقیقا مشخص شود که آیا داخل مجموعه است یا نه؟ و نمی‌توانیم بگوییم مثلا عنصر a به مجموعه A هم متعلق است و هم نیست و همین ویژگی است که به کمک آن "برتراند راسل" ثابت کرد چیزی بنام مجموعه جهانی وجود ندارد.

حال می‌خواهیم تعریف جدید خود از مجموعه را با عنوان"مجموعه فازی" ارائه کنیم. چنانکه یک عضو بتواند هم داخل مجموعه A باشد و هم داخل متمم A و یا به عبارتی بهتر، برای هر عنصر درون یک مجموعه، درجه عضویت تعریف می‌کنیم. قبلا یک مجموعه را می‌توانستیم به چند روش تبیین کنیم، از جمله روش تابع مشخصه برای مجموعه A که به صورت زیر بود.

$$f : X \to \{0,1\}$$
$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in A^c \end{cases}$$

از همین ویژگی استفاده می‌کنیم با این تفاوت که برد تابع f را به جای مجموعه دو عضوی $\{0,1\}$ ، بازه $[0,1]$ در نظر



شکل ۱.۱: A یک مجموعه و f تابع مشخصه آن است.

می‌گیریم.

شاید یکی از بارزترین مثالها برای به تصویر کشیدن تابع مشخصه یک مجموعه با تعریف کلاسیک مطابق شکل۱.۱ باشد.

مثال ۱.۱.۱. مجموعه تمام انسانها را به عنوان مجموعه مرجع (X) در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم مجموعه انسانهای جوان را از این بین انتخاب کنیم و جواب زیر را برای آن عنوان می‌کنیم

$$g : X \longrightarrow [0,1]$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq T(x) \leq 16 \\ \frac{T(x)-16}{4} & 16 \leq T(x) \leq 20 \\ 1 & 20 \leq T(x) \leq 30 \\ \frac{35-T(x)}{5} & 30 \leq T(x) \leq 35 \\ 0 & 35 \leq T(x) \end{cases}$$

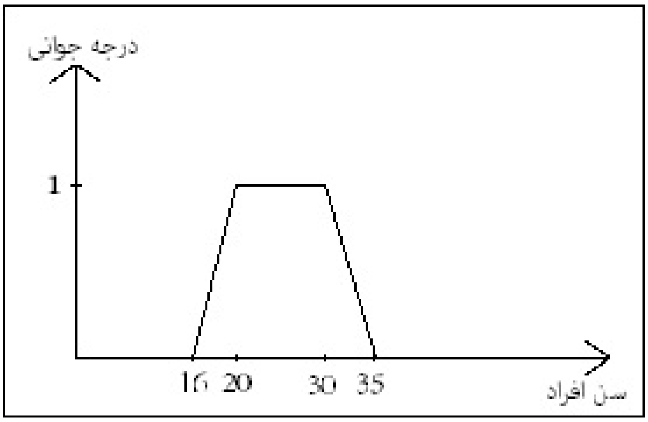
که در آن $T(x)$ نشاندهنده سن فرد $x \in X$ است (شکل۲.۱).

یا به عنوان یک مجموعه متناهی فازی می‌توانیم مثال زیر را ارائه کنیم.

مثال ۲.۱.۱. مجموعه مرجع را برابر $Y = \{0,1,2,...,10\}$ می‌گیریم و فرض می‌کنیم، B مجموعه عناصری از Y باشد که به عدد ۵ نزدیک هستند.

دراین‌صورت مجموعه B را می‌توان بدینصورت ارائه کرد. (شکل۳.۱)

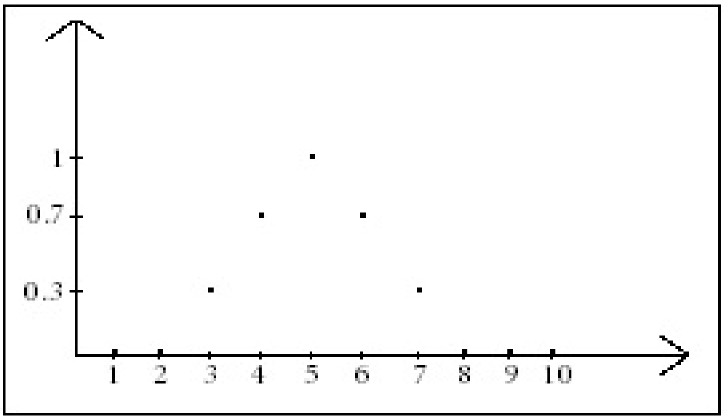
$$h : Y \longrightarrow [0,1]$$



شکل ۲.۱: مثالی از یک مجموعه فازی پیوسته

$$h(y) = \begin{cases} 0 & y \in \{1,2,8,9,10\} \\ 0.3 & y \in \{3,7\} \\ 0.7 & y \in \{4,6\} \\ 1 & y = 5 \end{cases}$$

مجموعه B را گاه به صورت زیر نیز می‌نویسند.



شکل ۳.۱: مثالی از یک مجموعه فازی گسسته

$$B = \left\{ \frac{0.3}{3}, \frac{0.7}{4}, \frac{1}{5}, \frac{0.7}{6}, \frac{0.3}{7} \right\}$$

که مقدار پایین کسر نام عنصر را نشان می‌دهد و مقدار بالای کسر درجه عضویت عنصر را و عدم وجود عناصر $\{1,2,8,9,10\}$ به منزله درجه صفر برای آنهاست.

بعد از این مثال‌ها، مجموعه فازی را بصورت زیر رسما تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۱.۱. اگر X را به عنوان فضای مرجع داشته باشیم، تابع $\mu_A : X \to [0,1]$ یک مجموعه فازی را مشخص می‌کند و برای $x \in X$ مقدار $\mu_A(x)$ را درجه عضویت عنصر x در مجموعه فازی A نامیم.

یک مجموعه با تابع عضویت آن شناخته می‌شود. بعضی کتاب‌ها به جای $\mu_A(x)$ از نماد $A(x)$ برای نشان دادن درجه عضویت عنصر x در مجموعه A استفاده می‌کنند.

برخی خواص مجموعه‌های فازی

هر مجموعه با تعاریف کلاسیک را بعد از این مجموعه قطعی گوییم. هر مجموعه قطعی، یک مجموعه فازی نیز به شمار می‌آید.
در تعاریف زیر X را مجموعه مرجع و A و B را مجموعه‌های فازی روی X می‌گیریم.

تعریف ۴.۱.۱. (تساوی دو مجموعه فازی) $A = B \Leftrightarrow \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad \forall x \in X$

تعریف ۵.۱.۱. (خاصیت زیر مجموعه بودن) $A \subset B \Leftrightarrow \mu_A(x) < \mu_B(x) \quad \forall x \in X$

تعریف ۶.۱.۱. $A \cup B$ ، $A \cap B$ و A^c را بدین صورت تعریف می‌کنیم.

$$\mu_{A\cup B}(x) = max\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\} \qquad \forall x \in X$$

$$\mu_{A\cap B}(x) = min\left\{\mu_A(x), \mu_B(x)\right\} \qquad \forall x \in X$$

$$\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad \forall x \in X$$

ملاحظه ۷.۱.۱. اگر ویژگی‌های فوق را برای مجموعه‌های قطعی اعمال کنیم، با ویژگی‌هایی که از قبل برای مجموعه‌های قطعی می‌شناختیم، معادل خواهند بود.

تعریف ۸.۱.۱. [۲] ارتفاع مجموعه فازی A را به صورت

$$hgt(A) = \sup_{x\in X} \mu_A(x)$$

تعریف می‌کنیم.

تعریف ۹.۱.۱. محمل یا تکیه گاه مجموعه فازی A را بدین شکل تعریف می‌کنیم

$$supp(A) = \left\{x \in X | \mu_A(x) > 0\right\}.$$

تعریف ۱.۱.۱۰. [۱۱] مجموعه فازی A را نرمال گوییم اگر داشته باشیم: $hgt(A) = 1$.

تعریف ۱.۱.۱۱. [۱۱] مجموعه فازی A را محدب گوییم اگر

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\} \; ; \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad , \quad \forall \lambda \in [0,1]$$

تعریف ۱.۱.۱۲. (α برش) [۴] اگر A یک مجموعه فازی و $\alpha \in [0,1]$ باشند، α برش مجموعه فازی A را بدین‌صورت تعریف می‌کنیم

$$A^\alpha = \{x | \mu_A(x) \geq \alpha\} \qquad 0 < \alpha \leq 1$$

$$A^0 = \overline{supp(A)} \qquad \alpha = 0$$

$\alpha-$ برش یک مجموعه فازی، برای هر α ، یک مجموعه قطعی است.

ملاحظه ۱.۱.۱۳. [۱۱]

۱) اگر A یک مجموعه فازی نرمال باشد خواهیم داشت: $A^1 \neq \emptyset$

۲) محدب بودن یک مجموعه فازی هم ارز با این است که $\alpha-$ برشهای آن، مجموعه‌های قطعی محدبی باشند و اگر مجموعه فازی روی $X = \mathbb{R}$ تعریف شود به این معنی است که باید $\alpha-$ برشهای مجموعه فازی، بصورت بازه باشند.

ملاحظه ۱.۱.۱۴. خواص جبری مربوط به زیر مجموعه‌های فازی را در زیر خلاصه می‌کنیم (ر.ک. [۸]). ابتدا توجه می‌کنیم که در اینجا مجموعه مرجع (X) و مجموعه تهی $(\emptyset)$ را به دید فازی در نظر می‌گیریم و A ، B و C مجموعه‌های فازی هستند.

$$\begin{array}{ll}
(1)\;\; A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C & (9)\;\; A \cup B = B \cup A \\
(2)\;\; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C & (10)\;\; A \cap B = B \cap A \\
(3)\;\; A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) & (11)\;\; A \cup \emptyset = A \\
(4)\;\; A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) & (12)\;\; A \cap \emptyset = \emptyset \\
(5)\;\; (A \cup B)^c = A^c \cap B^c & (13)\;\; A \cup X = X \\
(6)\;\; (A \cap B)^c = A^c \cup B^c & (14)\;\; A \cap X = A \\
(7)\;\; (A^c)^c = A & (15)\;\; A \cup A = A \\
(8)\;\; A \cap A = A &
\end{array}$$

اثبات این نکات با بکار گیری تعریف مجموعه‌های فازی بدست می‌آید.

۲.۱ عدد فازی

تعریف ۱.۲.۱. (شبه‌پیوستگی از بالا) تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را در x_0 شبه‌پیوسته از بالا گوییم، اگر برای هر $\varepsilon > 0$ یک همسایگی U از x_0 چنان موجود باشد که برای هر x در این همسایگی داشته باشیم $f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$.

تعریف ۲.۲.۱. [۴] (عدد فازی) مجموعه فازی $\mu : \mathbb{R} \to I = [0,1]$ را یک عدد فازی گوییم اگر

i) μ شبه‌پیوسته از بالا باشد.

ii) بازه $[c,d] \subset \mathbb{R}$ موجود باشد که در خارج از آن داشته باشیم $\mu(x) = 0$.

iii) اعداد حقیقی a و b چنان موجود باشند که $c \leq a \leq b \leq d$ و μ در $[c,a]$ صعودی باشد و در $[a,b]$ برابر ۱ و در $[b,d]$ نزولی باشد.

مجموعه اعداد فازی روی $\mathbb{R}$ را با $\mathbb{R}_f$ یا E^1 و مجموعه اعداد فازی روی $\mathbb{R}^n$ را با $\mathbb{R}^n_f$ یا E^n نشان می‌دهیم. اگر یک عدد فازی دارای محمل ($supp$) کوچکتری باشد گوییم که در شرایط بهتری قرار دارد و هر چه محمل یک عدد فازی بزرگتر باشد گوییم که آن عدد، فازی‌تر است.

گزاره ۳.۲.۱. اگر A یک عدد فازی باشد داریم:

i) برای هر $\alpha \in [0,1]$ ، A^α یک بازه بسته و کراندار است.

ii) $A^1 \neq \emptyset$

برهان. i) اگر A یک مجموعه فازی باشد که در تعریف عدد فازی برای a ، b ، c ، d صدق کند، آنگاه

$$A^0 = [c,d]$$

$$[a,b] \subset A^\alpha \qquad 0 < \alpha \leq 1$$

و چون A در $[c,a]$ صعودی است پس یک t_α در $[c,a]$ چنان موجود است که

$$[c,t_\alpha) \cap A^\alpha = \emptyset$$

$$[t_\alpha, a] \subset A^\alpha$$

و همچنین بنابه نزولی بودن A در $[b,d]$ ، یک s_α در $[b,d]$ چنان موجود است که

$$[b, s_\alpha] \subset A^\alpha$$

$$(s_\alpha, d] \cap A^\alpha = \emptyset$$

پس $A^\alpha = [t_\alpha, s_\alpha]$ که بسته و کراندار بودن A^α را برای هر $\alpha \in [0,1]$ نشان می‌دهد.

ii) با توجه به نرمال بودن اعداد فازی حکم برقرار است. □

قضیه ۴.۲.۱. [۴] اگر $p : I \to \mathbb{R}$ و $q : I \to \mathbb{R}$ دو تابع باشند چنانکه:

۱) p یک تابع کراندار صعودی باشد.

۲) q یک تابع کراندار نزولی باشد.

۳) $p(1) \leq q(1)$

۴) برای هر $0 < k \leq 1$ داشته باشیم: $\lim_{t\to k^-} p(t) = p(k)$ و $\lim_{t\to k^-} q(t) = q(k)$

۵) $\lim_{t\to 0^+} p(t) = p(0)$ و $\lim_{t\to 0^+} q(t) = q(0)$

آنگاه $\mu_A : \mathbb{R} \to I$ با ضابطه

$$\mu_A(x) = sup\{r|p(r) \leq x \leq q(r)\}$$

یک عدد فازی است و از طرفی اگر هر عدد فازی A با تابع عضویت $\mu_A : \mathbb{R} \to I$ را با $\alpha-$ برش‌های

$$A^\alpha = [p(r), q(r)]$$

بنویسیم، توابع $p(r)$ و $q(r)$ دارای ویژگیهای (۱)-(۵) خواهند بود.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم ویژگیهای (۱) تا (۵) برای توابع $p(t)$ و $q(t)$ برقرار باشند. پس

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash[p(0), q(0)]\ ; \qquad \mu_A(x) = 0$$

پس ویژگی (ii) از تعریف عدد فازی برای $[p(0), q(0)]$ برقرار است. می‌دانیم $p(1) \leq q(1)$ حال اگر $x \in \mathbb{R}$ چنان باشد که

$$p(r) \leq p(1) \leq x \leq q(1) \leq q(r)\ ; \qquad \forall r \in [0,1]$$

آنگاه

$$\{r|p(r) \leq x \leq q(r)\} = [0,1]$$

درنتیجه

$$\mu_A(x) = sup\{r|p(r) \leq x \leq q(r)\} = 1$$

یعنی

$$\forall x \in [p(1), q(1)]\ ; \qquad \mu_A(x) = 1$$

حال اگر $p(0) < x < y < p(1)$ آنگاه

$$x \leq q(r) \quad , \quad y \leq q(r)\ ; \quad \forall r \in [0,1]$$

و اگر $p(r) \leq x$ آنگاه $p(r) \leq y$. یعنی

$$\{r|p(r) \leq x \leq q(r)\} \subseteq \{r|p(r) \leq y \leq q(r)\}\ .$$

پس

$$\mu_A(x) = sup\{r|p(r) \leq x \leq q(r)\} \leq sup\{r|p(r) \leq y \leq q(r)\} = \mu_A(y)$$

یعنی $\mu_A(x)$ روی $[p(0), p(1)]$ صعودی است.

به همین ترتیب می‌توان نشان داد $\mu_A(x)$ روی $[q(0), q(1)]$ نزولی است. پس حکم (iii) در تعریف عدد فازی نیز حاصل می‌شود.

حال می‌خواهیم حکم (i) از تعریف عدد فازی را ثابت کنیم. روی $[p(1), q(1)]$ داریم $\mu_A(x) = 1$ پس $\mu_A(x)$ روی این بازی پیوسته است. روی $[p(0), p(1)]$ ، μ تابعی صعودی است پس برای اثبات شبه‌پیوستگی از بالا کافیست ثابت کنیم $\mu_A(x)$ روی این بازه پیوسته از راست است. یعنی ثابت می‌کنیم

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}\ ; \quad \lim_{x \to x_0^+} \mu_A(x) = \mu_A(x_0).$$

فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای نزولی و همگرا به x_0 از راست باشد. بنابه نزولی بودن دنباله $\mu_A(x_n)$ و کرانداری این دنباله از پایین

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ; \ \ \mu_A(x_n) \geq \mu_A(x_0).$$

پس این دنباله همگراست. حال اگر $\lim_{n\to\infty} \mu_A(x_n) = \mu_A(x_0)$، آنگاه حکم برقرار است درغیر اینصورت فرض کنید

$$\lim_{n\to\infty} \mu_A(x_n) = \widehat{r} > \mu_A(x_0).$$

تعریف می‌کنیم

$$B_n := \{r | a(r) \leq x \leq b(r)\}$$

پس $\widehat{r} > \sup B_0$ یعنی $a(\widehat{r}) > x_0$. پس یک $N \in \mathbb{N}$ چنان موجود است که

$$\forall n > N \ ; \ \ p(\widehat{r}) > x_n > x_0.$$

پس

$$\forall n > N \ ; \ \ \widehat{r} > \sup B_n.$$

یعنی

$$\forall n > N \ ; \ \ \widehat{r} > \mu_A(x_n).$$

پس

$$\widehat{r} = \lim_{n\to\infty} \mu_A(x_n) = \inf_n \mu_A(x_n) \gneqq \widehat{r}$$

و این تناقض است. شبه‌پیوستگی از بالای $\mu_A(x)$ در بازه $[q(0), q(1)]$ را نیز می‌توان به طریق مشابه نشان داد.

حال اگر عدد فازی A را با تابع درجه عضویت μ_A داشته باشیم و $\alpha-$ برشهای آنرا بدست آوریم، بررسی احکام (۱) تا (۳) با استفاده از تعریف $\alpha-$ برش‌ها براحتی بدست می‌آید. نشان می‌دهیم اگر $A^r = [p(r), q(r)]$ آنگاه $\lim_{r\to k^-} p(r) = p(k)$.

چون p صعودی است فرض کنید

$$\lim_{r\to k^-} p(r) = \sup_{r\in[0,k)} p(r) = x_0 \lneqq x_1 = p(k)$$

آنگاه $\forall r < k \ ; \ \ p(r) \leq x_0$. پس $\mu_A(x_0) \geq k$ و با توجه به اینکه $p(k) = x_1$ نتیجه می‌شود $\mu_A(x_0) = k$. از طرفی بنابه تعریف $\alpha-$ برش‌ها داریم $p(k) = \inf \{x; \ \mu_A(x) \geq k\} = x_1$ پس $\forall x < x_1 \ ; \ \ \mu_A(x) \lneqq k$. یعنی $\mu_A(x_0) < k$ و این یک تناقض است، پس $\lim_{r\to k^-} p(r) = p(k)$ و حکم $\lim_{r\to k^-} q(r) = q(k)$ نیز به طریق مشابه اثبات می‌شود.

حال حکم (۵) یعنی

$$\lim_{r\to 0^+} p(r) = p(0)$$

را بررسی می‌کنیم. (فرض خلف) اگر $\lim_{r\to 0^+} p(r) = x_0 \gneqq p(0)$ آنگاه برای هر $x_0 > x > p(0)$ داریم $\mu_A(x) \gneqq 0$ (زیرا اگر $\mu_A(x) = 0$ خواهیم داشت: $p(0) \geq x$ و این تناقض است). پس

$$\exists r_0 > 0, \qquad \mu_A(x) = r_0$$

در نتیجه

$$x_0 = \lim_{r\to 0^+} p(r) \le p(r_0) \le x \lneqq x_0$$

و این تناقض است و $x_0 = p(0)$.

و حکم $\lim_{r\to 0^+} q(r) = q(0)$ نیز بطریق مشابه اثبات می‌شود. $\square$

تعاریف دیگری نیز در کتاب‌های فازی برای عدد فازی بیان شده است که هم ارزی آنها با تعریف اولیه ما با توجه به آنچه در بالا آمده است بدست می‌آید.

تعریف ۱.۲.۵. [۳] مجموعه فازی $\mu_A : \mathbb{R} \to I = [0,1]$ را یک عدد فازی گوییم اگر:

$i)$ μ نرمال باشد.

$ii)$ μ محدب باشد.

$iii)$ μ شبه‌پیوسته از بالا باشد.

$iv)$ A^0 فشرده باشد.

بعد از این برای راحتی کار، با $\alpha-$ برشهای اعداد فازی کار خواهیم کرد، یعنی عدد فازی A را با $A^\alpha = [\underline{A}^\alpha, \overline{A}^\alpha]$ خواهیم شناخت، که $\overline{A}^\alpha$ کران بالا و $\underline{A}^\alpha$ کران پایین $\alpha-$ برشهای A هستند.

تعریف ۱.۲.۶. (عدد فازی ذوزنقه‌ای) اگر A یک عدد فازی روی $\mathbb{R}$ باشد، گوییم A ذوزنقه‌ای است اگر $a < b < c < d$ موجود باشند که

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \le a\ ,\ x \ge d \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & b \le x \le c \\ \frac{d-x}{d-c} & c \le x \le d \end{cases}$$

عدد فازی ذوزنقه‌ای بصورت $A = (a,b,c,d)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۷. (عدد فازی مثلثی) عدد فازی ذوزنقه‌ای $A = (a,b,c,d)$ مثلثی نامیده می‌شود اگر داشته باشیم $b = c$ و در اینصورت با $A = (a,b,d)$ نشان داده می‌شود.

توجه شود که اگر $A = (a,b,c)$ آنگاه $\alpha-$ برشهای A بصورت زیر خواهند بود.

$$\underline{A}^\alpha = a + (b-a)\alpha \quad , \quad \overline{A}^\alpha = c - (c-b)\alpha$$

و $A^1 := \underline{A}^1 = \overline{A}^1$. مجموعه اعداد فازی مثلثی را درصورت نیاز با $\mathbb{R}_T$ نشان خواهیم داد.

۳.۱ حساب فازی

اگر A و B دو عدد فازی باشند می‌نویسیم

$$(A+B)^\alpha = [\underline{A}^\alpha + \underline{B}^\alpha, \overline{A}^\alpha + \overline{B}^\alpha]$$

$$(A \times B)^\alpha = [\underline{T}^\alpha, \overline{T}^\alpha]$$

که در آن

$$\underline{T}^\alpha = min\left\{\underline{A}^\alpha.\underline{B}^\alpha\ ,\ \overline{A}^\alpha.\underline{B}^\alpha\ ,\ \underline{A}^\alpha.\overline{B}^\alpha\ ,\ \overline{A}^\alpha.\overline{B}^\alpha\right\}$$

$$\overline{T}^\alpha = max\left\{\underline{A}^\alpha.\underline{B}^\alpha\ ,\ \overline{A}^\alpha.\underline{B}^\alpha\ ,\ \underline{A}^\alpha.\overline{B}^\alpha\ ,\ \overline{A}^\alpha.\overline{B}^\alpha\right\}$$

و همچنین

$$(A/B)^\alpha = [\underline{S}^\alpha, \overline{S}^\alpha]$$

که در آن

$$\underline{S}^\alpha = min\left\{\underline{A}^\alpha/\underline{B}^\alpha\ ,\ \overline{A}^\alpha/\underline{B}^\alpha\ ,\ \underline{A}^\alpha/\overline{B}^\alpha\ ,\ \overline{A}^\alpha/\overline{B}^\alpha\right\}$$

$$\overline{S}^\alpha = max\left\{\underline{A}^\alpha/\underline{B}^\alpha\ ,\ \overline{A}^\alpha/\underline{B}^\alpha\ ,\ \underline{A}^\alpha/\overline{B}^\alpha\ ,\ \overline{A}^\alpha/\overline{B}^\alpha\right\}.$$

توجه شود که $\widehat{0}$ عنصر خنثی برای عمل جمع اعداد فازی است (که علامت $\widehat{0}$ نشاندهنده عدد صفر حقیقی است). ولی هیچ عدد فازی غیر حقیقی نسبت به این عنصر خنثی دارای معکوس نیست.

تعریف ۱.۳.۱. (ضرب اسکالر در عدد فازی): اگر
A یک عدد فازی و $c \in \mathbb{R}$ آنگاه

$$[c.A]^\alpha = \{ct; t \in A^\alpha\}$$

یعنی اگر $c \geq 0$ آنگاه

$$[c.A]^\alpha = [c\underline{A}^\alpha, c\overline{A}^\alpha]$$

و اگر $c < 0$ آنگاه

$$[c.A]^\alpha = [c\overline{A}^\alpha, c\underline{A}^\alpha]$$

قضیه ۲.۳.۱. اگر $a, b \in \mathbb{R}$ هم‌علامت باشند و $A, B \in \mathbb{R}_f$ و اگر $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ آنگاه از [۱] داریم:

۱) $(a+b).A = a.A + b.A$

۲) $\lambda.(A+B)=\lambda.A+\lambda.B$

۳) $\lambda.(\mu.A)=(\lambda.\mu).A$

در بالا برای محاسبه جمع، ضرب و تقسیم اعداد فازی از حساب بازه‌ها استفاده کرده‌ایم. در حساب بازه‌ها اگر $[a,b]$ و $[x,y]$ دو بازه باشند، حاصل‌جمع آنها یعنی بازه‌ای که اعضای آن از جمع تک‌تک اعضای این بازه‌ها بدست می‌آید، یعنی:

$$[a,b]+[x,y]=\{t\in\mathbb{R}|\exists r\in[a,b],\exists s\in[x,y];t=r+s\}$$

و ضرب و تقسیم نیز به طریق مشابه تعریف می‌شود. حال اگر A و B دو عدد فازی باشند و $(*)$ یک عمل حسابی باشد، برای محاسبه $[A*B]^\alpha$ ، ابتدا A^α و B^α را محاسبه می‌کنیم و حساب بازه‌ها را روی آنها اعمال می‌کنیم که نتیجه بنابه تعاریفی که بیان شد حاصل می‌شود. ولی برای عمل تفریق دو عدد فازی نمی‌توان چنین کرد زیرا بعضی از ویژگی‌های مورد انتظار را ندارد، مثلا اگر $A^\alpha=[1+\alpha,3-\alpha]$ و $B^\alpha=[2+2\alpha,6-2\alpha]$ و اگر از حساب بازه‌ها استفاده کنیم داریم:

$$[\underline{C},\overline{C}]=[A]^\alpha-[B]^\alpha=[1+\alpha-(6-2\alpha),(3-\alpha)-(2+2\alpha)]=[-5+3\alpha,1-3\alpha]$$

حال $[C+B]^\alpha\neq A^\alpha$ ولی برای ما در محاسبات خیلی مهم است که تفریق ، عکس عمل جمع را انجام دهد. رابطه زیر را به عنوان تفاضل دو عدد فازی تعریف می‌کنیم.

تعریف ۳.۳.۱. ($h-$ تفاضل): اگر A و B دو عدد فازی باشند گوییم $A-B$ موجود و برابر عدد فازی C است اگر عدد فازی C چنان موجود باشد که داشته باشیم $C+B=A$

تفاضل فوق را $h-$ تفاضل نامیم و با $\ominus$ نشان می‌دهیم. توجه شود که $A\ominus B\neq A+(-1)B$ و همچنین، $h-$ تفاضل دو عدد فازی ممکن است موجود نباشد.

فرض کنید $A=[\underline{a}^\alpha,\overline{a}^\alpha]$ و $B=[\underline{b}^\alpha,\overline{b}^\alpha]$ دو عدد فازی باشند که در آن $\alpha\in[0,1]$ و برای هر α بازه‌های $[\underline{a}^\alpha,\overline{a}^\alpha]$ و $[\underline{b}^\alpha,\overline{b}^\alpha]$ ، $\alpha-$ برشهای اعداد فازی A و B باشند. فرض کنید $h-$ تفاضل‌های $A\ominus B$ و $B\ominus A$ موجود باشند. یعنی اعداد فازی C و D

چنان موجود باشند که

$$A=B+C \quad , \quad B=D+A$$

در اینصورت داریم:

$$A=B+C=(D+A)+C$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{0} = D + C \quad \Rightarrow \quad D = -C \in \mathbb{R}$$

به عنوان مثال A و B می‌توانند بصورت زیر باشند.

$$A^\alpha = [3+\alpha, 5-\alpha] \quad , \quad B^\alpha = [\alpha, 2-\alpha]$$

البته ممکن است $h-$ تفاضل دو عدد فازی از هیچ طرف برقرار نباشد. به عنوان مثالی از این حالت می‌توان دو عدد زیر را امتحان کرد.

$$A^\alpha = [2\alpha, 4-2\alpha] \quad , \quad B^\alpha = [3\alpha, 4-\alpha]$$

لم ۴.۳.۱. [۱] اگر $A, B \in \mathbb{R}_T$ دو عدد فازی مثلثی باشند چنانکه $A^1 - \underline{A}^0 > 0$ و $\overline{A}^0 - A^1 > 0$, و $supp(B) = (\overline{B}^0 - \underline{B}^0) \leq min\left\{A^1 - \underline{A}^0, \overline{A}^0 - A^1 > 0\right\}$ آنگاه $h-$ تفاضل $A \ominus B$ موجود است.

تعریف ۵.۳.۱. [۱۰] اگر $a = [\underline{a}, \overline{a}]$ و $b = [\underline{b}, \overline{b}]$ دو بازه باشند، فاصله بین a و b بصورت زیر نوشته می‌شود

$$d(a,b) = max\left\{|\underline{a} - \underline{b}|, |\overline{a} - \overline{b}|\right\}$$

که یک متر را بنام متر هاسدورف روی فضای بازه‌های روی اعداد حقیقی تشکیل می‌دهد

اگر عدد حقیقی a را بصورت بازه $[a,a]$ نشان دهیم، می‌توان دید که متر هاسدورف تعمیمی از متر اقلیدسی روی فضای اعداد حقیقی است.

گزاره ۶.۳.۱. از ویژگی‌های زیر در رابطه با متر d در فصول بعد استفاده خواهیم کرد. فرض کنید a ، b و c بازه باشند.

۱) $d([\underline{a}, \overline{a}] + [\underline{b}, \overline{b}], [\underline{a}, \overline{a}] + [\underline{c}, \overline{c}]) = d([\underline{b}, \overline{b}], [\underline{c}, \overline{c}])$

۲) $d([\underline{a}, \overline{a}] + [\underline{b}, \overline{b}], [\underline{c}, \overline{c}] + [\underline{d}, \overline{d}]) \leq d([\underline{a}, \overline{a}], [\underline{c}, \overline{c}]) + d([\underline{b}, \overline{b}], [\underline{d}, \overline{d}])$

۳) $d[a \ominus b, a \ominus c] = d[b, c]$

اثبات این روابط با بکارگیری تعریف متر d بدست می‌آید.

۴.۱ تابع فازی و مشتق فازی

تعریف ۱.۴.۱. (تابع فازی) تابع $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_f$ را یک تابع فازی گوییم.

تعریف ۲.۴.۱. [۲] (متر روی $\mathbb{R}_f$): نگاشت $D : \mathbb{R}_f \times \mathbb{R}_f \to \mathbb{R}^+$ با ضابطه

$$D(A,B) = \sup_{\alpha} \max \left\{ |\underline{A}^{\alpha} - \underline{B}^{\alpha}|, |\overline{A}^{\alpha} - \overline{B}^{\alpha}| \right\} = \sup_{\alpha} d\left\{A^{\alpha}, B^{\alpha}\right\}$$

یک متر را روی اعداد فازی مشخص می‌کند که بعد از این آنرا متر اعداد فازی یا فاصله اعداد فازی خواهیم نامید. (توجه شود که فاصله بین دو بازه را با d و فاصله بین دو عدد فازی را با D نشان می‌دهیم.)

ویژگیهای معروف زیر در رابطه با متر فازی را در اینجا از [۱] نقل می‌کنیم. اگر $k \in \mathbb{R}$ و A ، B ، C ، $E \in \mathbb{R}_f$ و توابع g و f فازی باشند، آنگاه داریم:

۱) $D(A+C, B+C) = D(A,B)$

۲) $D(k.A, k.B) = |k| D(A,B)$

۳) $D(A+B, C+E) \leq D(A,C) + D(B,E)$

۴) $(\mathbb{R}_f, D)$ یک فضای متری کامل است.

تعریف ۳.۴.۱. (حد فازی): با توجه به متر D که در بالا تعریف شد، اگر $f(x)$ یک تابع فازی باشد گوییم

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

(که L یک عدد فازی است) اگر

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad D(f(x), L) < \varepsilon$$

گزاره ۴.۴.۱. اگر $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ که با فرض $L^{\alpha} = [\underline{L}^{\alpha}, \overline{L}^{\alpha}]$ آنگاه خواهیم داشت:

$$\lim_{x \to x_0} \underline{f}^{\alpha}(x) = \underline{L} \quad , \quad \lim_{x \to x_0} \overline{f}^{\alpha}(x) = \overline{L}.$$

برهان. اگر $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ که $L^{\alpha} = [\underline{L}^{\alpha}, \overline{L}^{\alpha}]$ یعنی اگر:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0; \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad D(f(x), L) < \varepsilon$$

آنگاه

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0; \quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup_{\alpha} \left\{ max \left\{ |\underline{f}^{\alpha}(x) - \underline{L}^{\alpha}|, |\overline{f}^{\alpha}(x) - \overline{L}^{\alpha}| \right\} \right\} < \varepsilon$$

آنگاه

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \alpha \in [0,1]; |x - x_0| < \delta \rightarrow \begin{cases} |\underline{f}^{\alpha}(x) - \underline{L}^{\alpha}| < \varepsilon \\ |\overline{f}^{\alpha}(x) - \overline{L}^{\alpha}| < \varepsilon \end{cases}$$

آنگاه

$$\lim_{x \to x_0} \underline{f}^{\alpha}(x) = \underline{L} \quad , \quad \lim_{x \to x_0} \overline{f}^{\alpha}(x) = \overline{L}$$

□

و این یعنی اینکه اگر یک تابع فازی در نقطه‌ای حد داشته باشد می‌توان با محاسبه حدود توابع بالا و پایین در $\alpha-$ برشها، حد تابع را بدست آورد. البته توجه شود که ممکن است که تابعی دارای حد توابع بالا و پایین در $\alpha-$ برشها باشد ولی خود تابع فازی حد نداشته باشد.

تعریف ۵.۴.۱. (کرانداری تابع فازی) تابع فازی $f : U \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_f$ را کراندار گوییم اگر

$$\exists M > 0, \qquad \forall x \in U; \qquad D(f(x), \widehat{0}) \leq M.$$

ایده اصلی در تعریف مشتق فازی، تعریف متناظر در ریاضیات کلاسیک است.

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

حال تعریف ابتدایی خود از مشتق را با استفاده از تعریف ۳.۲ از [۶] ارائه می‌کنیم: اگر $f(x)$ تابعی فازی روی (a, b) باشد و $x_0 \in (a, b)$ و برای $h > 0$ های به اندازه کافی کوچک $h-$ تفاضل‌های

$$f(x_0 + h) \ominus f(x_0) \quad , \quad f(x_0) \ominus f(x_0 - h)$$

تعریف شده باشند، دراینصورت گوییم f در x_0 مشتق‌پذیر است و مقدار مشتق برابر یک عدد فازی مثل $f'(x_0)$ است، اگر داشته باشیم:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) \ominus f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0) \ominus f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0) \in \mathbb{R}_f$$

یعنی اگر داشته باشیم:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad 0 < h < \delta \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} D(\frac{f(x_0+h) \ominus f(x_0)}{h}, f'(x_0)) < \varepsilon \\ D(\frac{f(x) \ominus f(x_0 - h)}{h}, f'(x_0)) < \varepsilon \end{cases}$$