

# دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد  
در رشته فیزیک اتمی و مولکولی

دانشگاه پیام نور مرکز شیراز گروه علمی فیزیک

بررسی تحلیلی پرتوهای گاوسی و سوپرگاوسی عبوری از روزنه مستطیلی و  
دایره ای به روش ماتریسی ABCD

استاد راهنما: دکتر پرویز الهی

استاد مشاور: دکتر عبدالرسول قرائتی

نگارش: رمضانعلی دالوند

شهریور ۱۳۸۸



## دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

### تصویب پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : بررسی تحلیلی پرتوهای گاوسی و سوپرگاوسی عبوری از روزنه مستطیلی و دایره ای به روش ماتریس ABCD

که توسط آقای رمضانعلی دالوند در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است  
مورد تأیید می باشد. تاریخ دفاع: ۸۸/۰۶/۱۱ نمره: ۱۷/۳ درجه ارزشیابی: خوب

اعضای هیأت داوران:

<u>امضاء</u>	<u>مرتبه علمی</u>	<u>هیأت داوران</u>	<u>نام و نام خانوادگی</u>
	استادیار	استاد راهنما	۱- دکتر پرویز الهی
	دانشیار	استاد مشاور	۲- دکتر عبدالرسول قرانتي
	دانشیار	استاد داور	۳- دکتر حمید نادگران
	دانشیار	نماینده تحصیلات تکمیلی	۴- دکتر حسین توللی

تقدیم

به همسر و فرزندانم

## چکیده

بر این اساس که بسط تابع روزنه بایک جمع متناهی از توابع گاوسی مختلط می‌تواند تحلیل مناسبی از انتشار پرتوهای گاوسی، سوپرگاوسی و ... عبوری از یک دستگاه اپتیکی پیرامحوری  $ABCD$  در اختیار ما قراردهد، به بررسی توزیع شدت و اختلاف فاز نسبی ناشی از پرتوهای گاوسی و سوپرگاوسی مرتبه ۴ عبوری از روزنه‌های دایره‌ای و مستطیلی سیستم اپتیکی  $ABCD$  پرداخته شده است. می‌توان نشان داد که بین پارامترهای باریکه، اندازه روزنه و عناصر ماتریس  $ABCD$  رابطه‌ای وجود دارد. بر همین اساس کنترل خروجی سیستم اپتیکی با تغییر پارامترهای فوق‌الذکر میسر می‌گردد. در این تحقیق روابط مورد نیاز استخراج با استفاده از مقادیر عددی منحنی تغییرات شدت برای باریکه‌های نوری مختلف رسم گردیده است.

## فهرست

### فصل اول: ماتریس $ABCD$ پرتو

۱	۱	روش ماتریسی	۲
۱	۴	ماتریس انتقال	۳
۱	۳	ماتریس شکست	۵
۱	۴	ماتریس بازتاب	۷
۱	۵	ماتریس های عدسی ضخیم و عدسی نازک	۸
۱	۶	ماتریس تبدیل پرتو دستگانه	۱۴

### فصل دوم: شناخت باریکه های گاوسی

۲-۱	۱۸	مبنایی برای تعریف ساختاره ای مدی باریکه لیزری	۱۸
۲-۲	۱۹	جواب باریکه گاوسی	۱۹
۲-۳	۲۴	توصیف فیزیکی مد $TEM_{00}$	۲۴
۲-۴	۲۶	مدهای مرتبه بالاتر	۲۶
۲-۵	۳۰	قانون عمومی انتشار لیزری	۳۰

### فصل سوم تحلیل پرتوهای گاوسی، کسینوس گاوسی، لاگر-گاوسی و سوپر گاوسی عبوری از

#### سیستم اپتیکی $ABCD$

۳-۱	۳۳	پرتو $Cosine - Gaussian$	۳۳
-----	----	--------------------------	----

۴۰	.....	<i>Laguerre – Gaussian</i>	پرتو	۲-۳
۴۵	.....		پرتو گاوسی و سوپر گاوسی	۳-۳
۴۵	.....		پرتو گاوسی برای روزنه مستطیلی	۱-۳-۳
۵۴	.....		پرتو گاوسی برای روزنه دایره ای	۲-۳-۳
۶۲	.....		پرتو سوپر گاوسی برای روزنه مستطیلی	۳-۳-۳
۷۴	.....		پرتو سوپر گاوسی برای روزنه دایره ای	۴-۳-۳
۸۴	.....		نتیجه گیری	
۸۷	.....		منابع	

# فصل اول

ماتریس ABCD پرتو

## مقدمه

در این فصل به بررسی روشهایی می پردازیم که برای تحلیل دستگاههای اپتیکی پیچیده شامل تعدادی عنصر شکست و بازتاب در یک ردیف بکار می روند. با توجه باینکه یک باریکه انرژی الکترومغناطیسی که از لحاظ فیزیکی باریک باشد، در بسامدهای خیلی زیاد چندان پخش نمی شود، این نکته ام کانی را فراهم می آورد تا پرتوهای نور را درحالی که مسیری نوری را طی می کنند، تعقیب کنیم. می توان برای قطاری از عناصر اپتیکی با تعیین نقاط بنیادی، بحث را شروع و توسط ضرب ماتریسهای  $2 \times 2$  که نمایشگر شکستهایا بازتابهای جزئی روی دهنده در دستگاه هستند به تحلیل آن پرداخت. بدین طریق می توان یک ماتریس دستگاه برای تمام دستگاه اپتیکی به دست آورد که به سهولت خواص اساسی قطاری از عناصر اپتیکی را نشان می دهد.

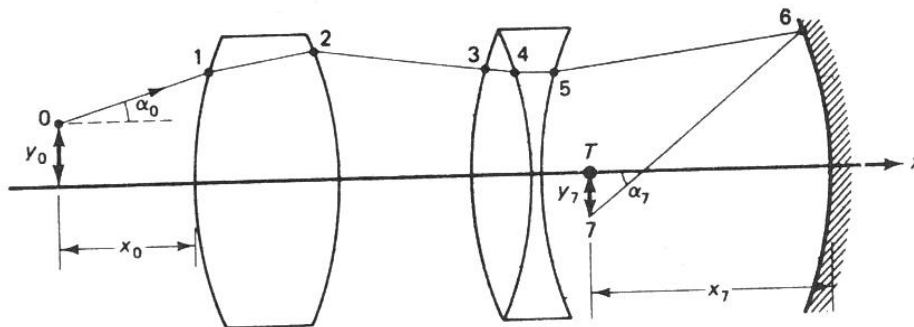
## ۱-۱ روش ماتریسی

وقتی دستگاه اپتیکی شامل چند عنصر باشد، احتیاج به رهیافتی نظامند داریم که تحلیل را آسان کند. اگر در تحلیل خود تنها پرتوهای پیرامحوری را در نظر بگیریم، این رهیافت نظامند به خوبی باروش ماتریسی قابل حصول است. روشی را برای بررسی تشکیل تصویر ارائه می کنیم که در آن از ماتریس ها برای توصیف تغییرات در ارتفاع و زاویه پرتوی استفاده می شود که با شکست ها و بازتاب های متوالی از دستگاه اپتیکی عبور می کند. می توان نشان داد که در تقریب پیرامحوری تغییرات در ارتفاع و راستای پرتو را می توان با معادله هایی بیان کرد که خطی هستند و این رهیافت ماتریسی را ممکن می سازند. از ترکیب ماتریس هایی که شکست ها و بازتاب های انفرادی را نمایش می دهند، می توان یک دستگاه اپتیکی معین را بایک ماتریس منفرد نمایش داد که از آن خواص اساسی دستگاه اپتیکی مرکب قابل استنتاج است. این روش کاملاً برای فنون رایانه ای در ردیابی پرتوی که از دستگاه اپتیکی با پیچیدگی اختیاری می گذرد، مناسب است.

شکل (۱-۱) پیشروی پرتو منفردی را در یک دستگاه اپتیکی اختیاری نشان می دهد. این پرتو در فاصله  $x_0$  از اولین سطح شکست بر حسب ارتفاع  $y_0$  و زاویه شیب  $\alpha_0$  نسبت به محور اپتیکی توصیف شده است. تغییر زاویه در هر شکست، همچون در نقاط 1 تا 5 و در هر بازتاب، همچون در نقطه 6 روی می دهد.



ارتفاع پرتوی گذارهای بین این نقاط تغییر می‌کند. می‌خواهیم راهی پیدا کنیم تا بتوانیم ارتفاع و شیب پرتو را در هر نقطه در دستگاه اپتیکی، مثلاً در نقطه T به فاصله  $x_7$  از آینه محاسبه کنیم به عبارت دیگر با داشتن داده‌های ورودی  $y_0$  و  $\alpha_0$  در نقطه 0 می‌خواهیم مقادیر  $y_7$  و  $\alpha_7$  در نقطه 7 را به عنوان داده‌های خروجی پیش‌بینی کنیم.



شکل (۱-۱): مراحل ردیابی پرتو در دستگاه اپتیکی. پیشروی پرتو می‌توان با تغییرات ارتفاع و راستای آن توصیف کرد.

## ۲-۱ ماتریس انتقال

انتقال ساده پرتو در یک محیط همگن، مانند آنچه در شکل (۲-۱) نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم. پیشروی محوری پرتو مطابق شکل L لحاظ می‌کنیم به طوری که در نقطه 1 ارتفاع و راستای پرتو به ترتیب با مختصات  $y_1$  و  $\alpha_1$  داده می‌شوند. واضح است که

$$\alpha_1 = \alpha_0 \quad , \quad y_1 = y_0 + L \tan \alpha_0$$

این معادله‌ها را می‌توان به صورتی مرتب در آورده که در آن تقریب پیرامحوری  $\alpha_0 \approx \tan \alpha_0$  به کار برده شده است:

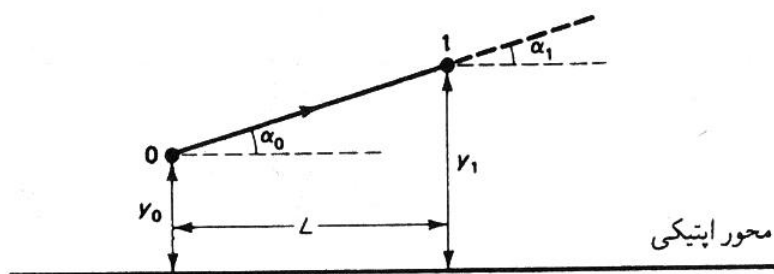
$$y_1 = (1)y_0 + (L)\alpha_0 \quad (1-1)$$

$$\alpha_1 = (0)y_0 + (1)\alpha_0$$

این دو معادله در نمادگذاری ماتریسی به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

بدیهی است که ماتریس تبدیل پرتو  $2 \times 2$  در رابطه بالا اثر انتقال روی پرتو نشان می‌دهد. داده‌های ورودی  $(y_0, \alpha_0)$  توسط ماتریس تبدیل تغییر می‌کنند و داده‌های خروجی درست  $(y_1, \alpha_1)$  به دست می‌آیند. [۲],[۱]



شکل (۲-۱): انتقال ساده یک پرتو

### ۳-۱ ماتریس شکست

اکنون شکست پرتو در یک سطح کروی جداکننده محیط هایی با ضرایب شکست  $n$  چنانکه در شکل (۳-۱) نشان داده شده است، در نظر می گیریم باید مختصات پرتو  $(\hat{y}, \hat{\alpha})$  پس از شکست را به مختصات قبل از شکست  $(y, \alpha)$  مربوط کنیم چون شکست در یک نقطه صورت می گیرد تغییر ارتفاع روی نمی دهد و  $\hat{y}=y$ . از طرف دیگر، برای زاویه های  $\alpha$  و  $\hat{\alpha}$  با توجه به شکل (۳-۱) داریم:

$$\hat{\alpha} = \theta - \phi = \theta - \frac{y}{R} \quad , \quad \alpha = \theta - \phi = \theta - \frac{y}{R}$$

با استفاده از صورت پیرامحوری قانون اسنل، یعنی

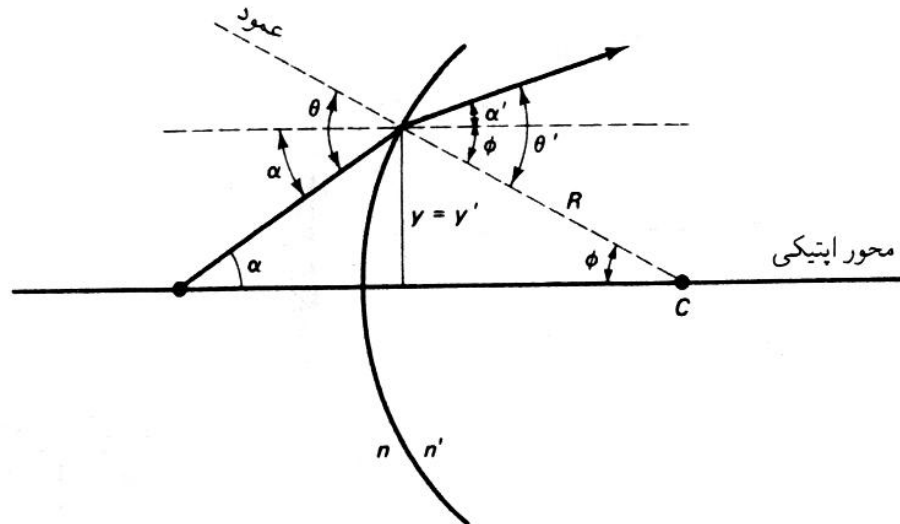
$$n \theta = n' \hat{\theta}$$

به دست می آوریم:

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{n}{n'}\right) \theta - \frac{y}{R} = \left(\frac{n}{n'}\right) \left(\alpha + \frac{y}{R}\right) - \frac{y}{R}$$

یا

$$\hat{\alpha} = \left(\frac{1}{R}\right) \left(\frac{n}{n'} - 1\right) y + \left(\frac{n}{n'}\right) \alpha$$



شکل (۳-۱): شکست پرتو در سطح جدایی

بنابراین، معادله های خطی لازم عبارتند از:

$$\hat{y} = (1)y + (0)\alpha \quad (۳-۱)$$

$$\hat{\alpha} = \left[ \left( \frac{1}{R} \right) \left( \frac{n}{n'} - 1 \right) \right] y + \frac{n}{n'} \alpha$$

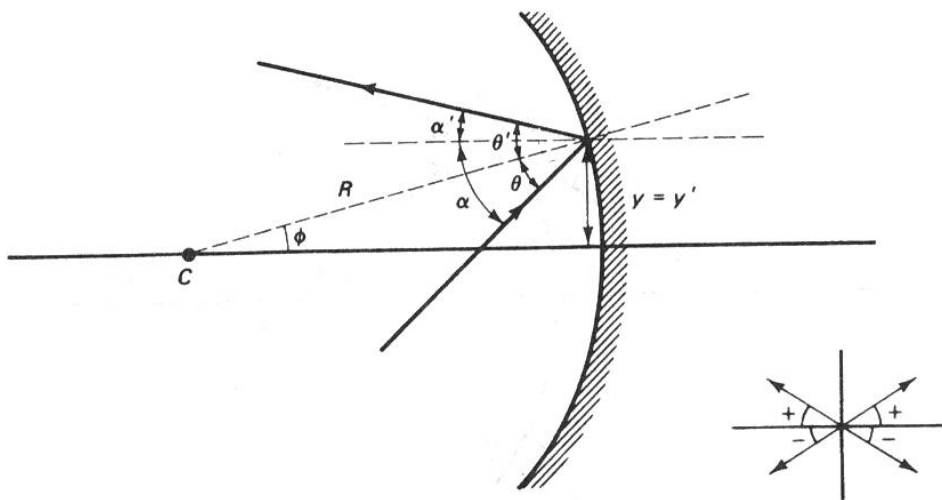
یا به صورت ماتریسی داریم

$$\begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \left( \frac{1}{R} \right) \left( \frac{n}{n'} - 1 \right) & \frac{n}{n'} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (۴-۱)$$

بر اساس قرارداد علامت، اگر سطح مقعر باشد،  $R$  منفی می شود. به علاوه به ازای  $R \rightarrow \infty$  ماتریس شکست مربوط به سطح جدایی تخت به دست می آید  $[1], [2]$

### ۴-۱ ماتریس بازتاب

در این بخش بازتاب در سطح کروی را چنانکه در شکل (۴-۱) دیده می شود، در نظر می گیریم در این مورد که آینه مقعر است  $R$  منفی است



شکل (۴-۱): بازتاب پرتو در سطح کروی. قرارداد علامت برای زاویه پرتو در پایین شکل نمایش داده شده است.

قرارداد علامت برای زاویه هایی که جهت های پرتوها را تعیین می کنند، این گونه در نظر می گیریم که زاویه های پرتوهایی که جهت آنها به سمت بالا است مثبت گرفته و زاویه های پرتوهایی را که جهت آنها به سمت پایین است منفی می گیریم این قرارداد علامت در پایین شکل (۴-۱) نمایش داده شده است از هندسه شکل (۴-۱)، در حالی که  $\alpha$  و  $\alpha'$  هر دو مثبت اند داریم [۱]

$$\alpha = \theta + \phi = \theta + \frac{y}{-R} \quad , \quad \alpha' = \theta - \phi = \theta - \frac{y}{-R}$$

با استفاده از این روابط همراه با قانون بازتاب  $\theta = \hat{\theta}$  به دست می آوریم:

$$\hat{\alpha} = \hat{\theta} + \frac{y}{R} = \theta + \frac{y}{R} = \alpha + \frac{2y}{R}$$

و دو معادله خطی لازم عبارت انداز:

$$\hat{y} = (1)y + (0)\alpha \quad (5-1)$$

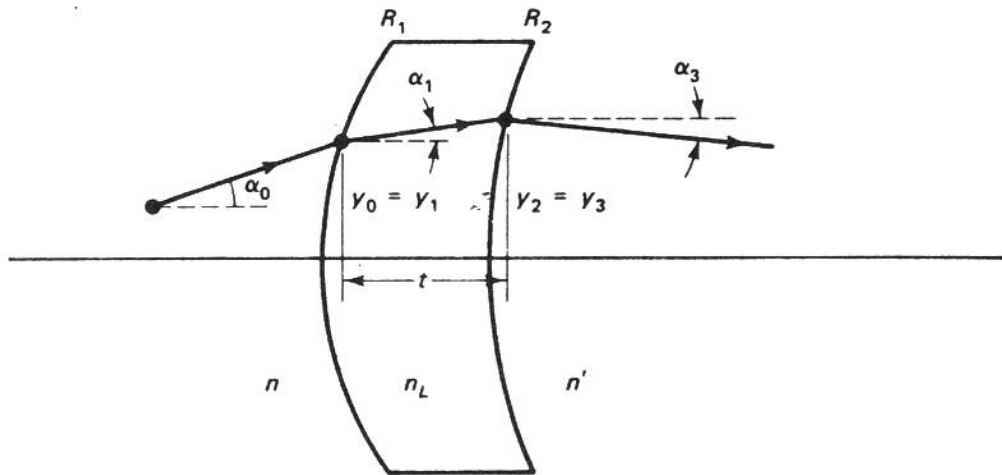
$$\hat{\alpha} = \left(\frac{2}{R}\right)y + (1)\alpha$$

به صورت ماتریسی داریم:

$$\begin{bmatrix} \hat{y} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (6-1)$$

### ۵-۱ ماتریس های عدسی ضخیم و عدسی نازک

اکنون ماتریسی می سازیم که کنش عدسی ضخیم روی پرتو نور نمایش می دهد. به عنوان یک مورد کلی فرض می کنیم محیط های دو طرف عدسی متفاوت اند و همچنان که در شکل (۵-۱) نشان داده شده است، ضرایب شکست آنها  $n$  و  $\hat{n}$  هستند پرتو در عبور از عدسی متحمل دو شکست و یک انتقال می شود. [۱]، [۲]



شکل (۵-۱): پیشروی پرتو نور برای عدسی ضخیم

باتوجه به شکل (۵-۱) که در آن برای سادگی یک عدسی باشعاع های انحنای مثبت انتخاب کرده ایم، می توانیم

بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} = M_1 \begin{bmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

برای شکست اول

$$\begin{bmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = M_2 \begin{bmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix}$$

برای انتقال

$$\begin{bmatrix} y_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = M_3 \begin{bmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

برای شکست دوم

از ادغام این معادله های ماتریسی به دست می آوریم:

$$\begin{bmatrix} y_3 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = M_3 M_2 M_1 \begin{bmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}$$

بدیهی است که تمام عدسی ضخیم را می توان با یک ماتریس  $M = M_3 M_2 M_1$  نمایش داد. با یادآوری این که ضرب ماتریس ها خاصیت انجمنی دارد اما خاصیت جابه جایی ندارد، ترتیب ماتریس ها در ضرب باید حفظ شود. ماتریس های انفرادی روی پرتو نور با همان ترتیبی عمل میکنند که کنش های اپتیکی متناظر پرتو نور طی عبور از دستگاه اثر می گذارند. با تعمیم این بحث، معادله ماتریسی مربوط به تعداد  $N$  انتقال، باز تاب و شکست به این صورت می باشد:

$$\begin{bmatrix} y_f \\ \alpha_f \end{bmatrix} = M_N M_{N-1} \dots M_2 M_1 \begin{bmatrix} y_0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix} \quad (7-1)$$

و ماتریس انتقال پرتو نمایشگر تمام دستگاه اپتیکی عبارت است از:

$$M = M_N M_{N-1} \dots M_2 M_1 \quad (8-1)$$

این نتیجه را ابتدا برای عدسی ضخیم شکل (۵-۱) به کار می بریم که ضریب آن  $n_L$  و ضخامت آن برای پرتوهای پیرا محوری  $t$  است. آنگاه تقریب درست برای عدسی نازک از حد گیری  $Q \rightarrow t$  به دست می آید. ماتریس مربوط به عدسی ضخیم بنا به معادله (۸-۱) ماتریس مرکب زیر است

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_L - \hat{n}}{\hat{n} R_2} & \frac{n_L}{\hat{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n - n_L}{n_L R_1} & \frac{n}{n_L} \end{bmatrix} \quad (9-1)$$

رابطه را با در نظر گرفتن موردی که در  $\hat{t}$  قابل چشم پوشی است ( $t = 0$ ) و عدسی با محیط یکسانی از هر طرف احاطه شده است ( $n = \hat{n}$ ) ساده تر می کنیم



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_L - n}{nR_2} & \frac{n_L}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n - n_L}{n_L R_1} & \frac{n}{n_L} \end{bmatrix} \quad (10-1)$$

پس از ضرب کردن به دست می آوریم:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_L - n}{n} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) & 1 \end{bmatrix} \quad (11-1)$$

عنصر ماتریس در سطر دوم و ستون اول را می توان با استفاده از فرمول عدسی سازان بر حسب فاصله کانونی نوشت

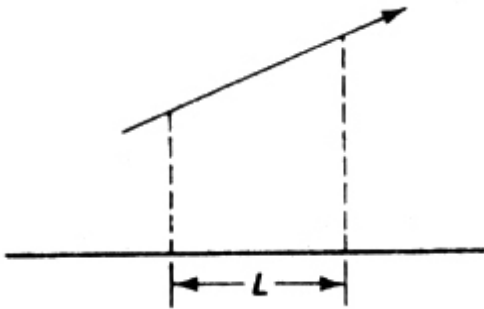
$$\frac{1}{f} = \frac{n_L - n}{n} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

که در نتیجه ماتریس تبدیل پرتو عدسی نازک به صورت زیر در می آید:

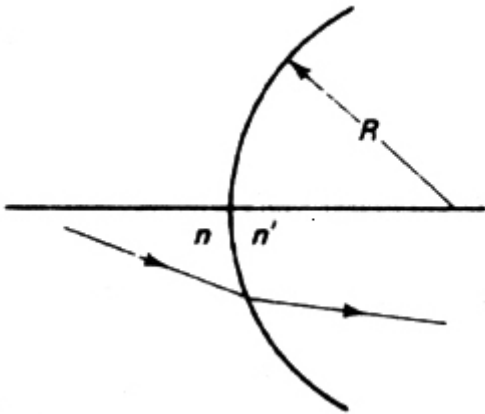
$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$$

طبق معمول برای عدسی محدب مثبت و برای عدسی مقعر منفی گرفته می شود. این ماتریس و ماتریس هایی که قبلاً به دست آمدند در جدول (۱-۱) خلاصه نویسی شده است [۱]

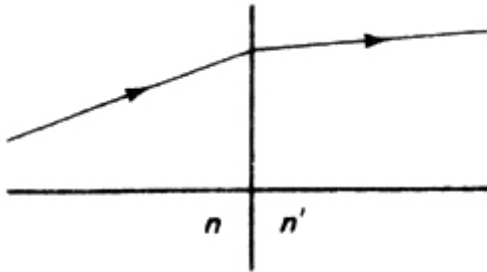
جدول ۱-۱ خلاصه چند ماتریس تبدیل پرتو



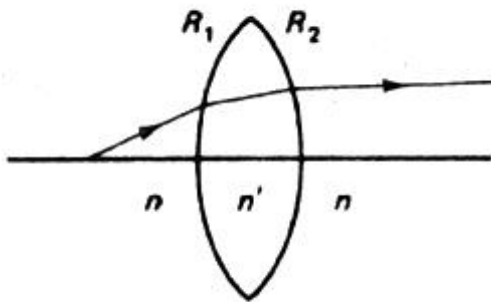
ماتریس انتقال  $M = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



ماتریس شکست  $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n-n'}{Rn} & \frac{n}{n'} \end{bmatrix}$   
 سطح جدایی کروی محدب (+R، مقعر -R)

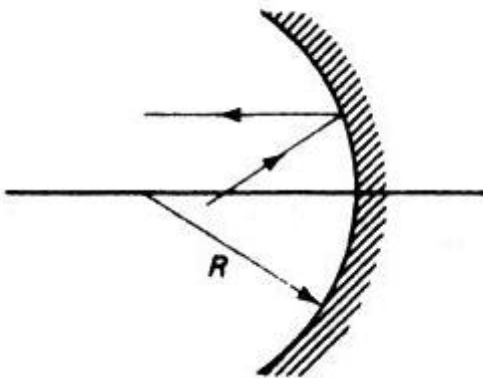


ماتریس شکست:  $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n}{n'} \end{bmatrix}$   
 سطح جدایی تخت



ماتریس عدسی نازک  $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}$   
 (محدب +f، مقعر -f)

$$\frac{1}{f} = \frac{n' - n}{n} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



ماتریس آینه کروی  $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{R} & 1 \end{bmatrix}$

### ۶-۱ ماتریس تبدیل پرتو دستگاه

از ترکیب ماتریس های انفرادی لازم با ترتیب مناسب مطابق معادله (۸-۱) می توان هر دستگاه اپتیکی با تنها یک ماتریس  $2 \times 2$ ، که آن را ماتریس دستگاه می نامند، بیان کرد. خواص مربوط به دستگاه اپتیکی با عنصرهای این ماتریس تبدیل پرتو مرکب، که معمولاً به صورت نمادین زیر نشان داده میشود، توصیف می شوند: [۲]

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

باید توجه کرد که مقادیر خاص عناصر ماتریس دستگاه بستگی به موقعیت پرتو در ورودی و خروجی دارد. در هر صورت دترمینان ماتریس دستگاه خاصیت بسیار مفیدی دارد:

$$Det M = AD - BC = \frac{n_0}{n_f} \quad (12-1)$$

که در آن  $n_0$  و  $n_f$  ضرایب شکست محیط های اولیه نهایی دستگاه اپتیکی هستند اثبات این رابطه مبتنی بر این است که اولاً مقدار دترمینان تک تک ماتریسهای تبدیل پرتو در جدول ۱-۱ چنان که دیده می شود یا  $n/n$  است یا یک است و ثانیاً دترمینان حاصل ضرب چند ماتریس برابر است با حاصل ضرب دترمینانهای هر یک از ماتریسها. به طوری که اگر  $M = M_1 M_2 M_3 \dots M_N$  آنگاه

$$Det (M) = (Det M_1)(Det M_2)(Det M_3) \dots (Det M_N) \quad (13-1)$$

با جایگذاری دترمینان های ماتریس های انتقال پرتو در حاصل ضرب بالا تمام ضرایب شکست میانی یکدیگر را حذف می کنند و چنانکه در معادله (۱۲-۱) بیان شده است، تنها نسبت  $n_0/n_f$  باقی می ماند. در اکثر موارد  $n_0$  و  $n_f$  مربوط به هوا هستند و  $Det(M)$  برابر بیک است.