بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه بین المللی امام خمینی

IMAM KHOMEINI INTERNATIONAL UNIVERSITY

وزارت علوم ، تحقیقات وفن آوری
دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)
دانشکده علوم پایه

پایان نامه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض (هندسه)

عنوان :

حساب فراکتالی روی زیر مجموعه های اعداد حقیقی ومنیفلدها

نگارنده : صدیقه حقیقت جو

استاد راهنما : آقای دکتر رضا میرزایی

استاد مشاور: آقای دکتر علی آبکار

آذر ۱۳۸۷

بسمه تعالی

دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)

جلسه دفاع از پایان نامه خانم صدیقه حقیقت جو دانشجوی مقطع کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش هندسه منیفلد در مورخ ۸۷/۹/۱۸ تحت عنوان « حساب فراکتالی روی زیر مجموعه های اعداد حقیقی و منیفلدها» در دانشگاه تشکیل گردید و مورد تأیید نهایی هیأت داوران قرار گرفت .

هیأت داوران :

۱- استاد راهنما:

آقای دکتر رضا میرزایی

امضاء

۲- استاد مشاور:

آقای دکتر علی آبکار

امضاء

۳- عضو هیأت علمی به عنوان داور خارجی:

آقای دکتر جعفر شفاف

امضاء

۴- عضو هیأت علمی به عنوان داور داخلی:

آقای دکتر عبدالرحمن رازانی

امضاء

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی:

آقای دکتر عزیزا... عزیزی

امضاء

اداره تحصیلات تکمیلی حوزه آموزشی دانشگاه بین المللی امام خمینی

"سپاس خداوندی را سزاست که، برای هر پدیده ای حد ومرزی قرار داد ، تا برای وجود بی نهایت او همانندی نباشد.اندیشه ها خدا رابه اندازه ها وحرکت ها وآلت ها نمی توانند اندازه گیری نمایند. او پیش از هر نهایت ومدت، وفراتر از هر گونه حساب وشمارش است.والاتر از صفات پدیده ها واندازه ها وقطر هاست که برای موجودات مادی پندارند زیرا حد و مرز واندازه شایسته پد یده هاست وبه غیر خدا تعلق دارد. آن کس که در توصیف پد یده ای با شکل واندازه وابزار مشخص در مانده باشد ، بدون تردید از وصف پروردگارش ناتوان تر،واز شناخت او عاجزتراست ."

فرازی از خطبه ۱۶۳ نهج البلاغه

تقدیم به

واسطه های بخشش هستی ام از طرف خداوند

پدر و مادرم *که نفس گرمشان برایم جان فزاست ووجودشان چو تاجی برسـرم اسـت و وجودم تراوشی است از گوهر وجودشان . در چشمم راه بهشت از رضای آنهـا مـی گـذرد و سخنان حکیمانه شان گره گشای هر مشکلم است .*

تشکر و قدردانی

شایسته است همچون مؤلا ومقتدایمان **امیرالمومنین** که می فرمایند :

"ستایشگر معلمی هستم که بیاموزد اندیشیدن را ، نه اندیشه ها را"

از زحمات استاد محترم جناب آقای دکتررضا میرزایی صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم .

واز استاد گرامی جناب آ قای آبکار که مشاوره این پایان نامه را به عهده داشتند، سپاسگذاری نمایم .

همچنین از مساعدت های کتابخانه مرکزی برای دسترسی سریع به مقالات به ویژه خانم عابدیی و از همراهی دوست عزیزم خانم مهندس حمیده نعمتی که در ویرایش این پایان نامه مرا یاری نمودند، تشکر نمایم .

فهرست

چکیده

دراین پایان نامه قصد داریم حسابان را روی زیر مجموعه های فراکتالی اعداد حقیقی تعریف کنیم .

F را یک زیر مجموعه فراکتالی در $\mathbb{R}$ در نظر می گیریم . برای تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ و هر نقطه $x\in F$ یک مفهوم حد تعریف کرده و آن را $F-$ حد می نامیم . پیوستگی چنین توابعی را نیزتعریف کرده و $F-$ پیوستگی می نامیم .

در این پایان نامه ایده های انتگرال و مشتق از مرتبه α ، $0<\alpha\le 1$ را که اساسش روی مجموعه های فراکتالی است ، فرمول بندی می کنیم و آنها را $F^{\alpha}-$ مشتق و $F^{\alpha}-$ انتگرال می نامیم . $F^{\alpha}-$ مشتق بر خلاف مشتق کسری کلاسیک به طور موضعی تعریف می شود . $F^{\alpha}-$حسابان ، بسیاری از خواص حسابان معمولی را دارد .

مقدمه

فراکتال ها بی قاعده تر از آن هستند که بتوان ساختار دیفرانسیل پذیر همواری را روی آنها تعریف کرد ، لذا یکی از مسایل جالب ، بنیان گذاری یک حسابان مناسب روی فراکتال ها است .

با توجه به ساختار فراکتالها ، توپولوژی فراکتا ل ها با توپولوژی $\mathbb{R}$ متفاوت است . تعریف مشتق به صورت موضعی و همچنین تعریف انتگرال بسیار متفاوت از مشتق و انتگرال معمولی می باشد .

ما در این پایان نامه ، حساب دیفرانسیل جدیدی به نام $F^{\alpha}-$ حسابان را روی فراکتال هایی که زیر مجموعه اعداد حقیقی هستند ، معرفی می کنیم که تا حد زیادی خصوصیات ذاتی حساب معمولی را دارا هستند . به صورت موضعی حد و پیوستگی و مشتق را تعریف می کنیم وسپس انتگرال را معرفی می کنیم .

فصل اول و دوم شامل تعاریف ، مقدمات و مفاهیم لازم در فصل سوم هستند .

در این بخش مجموعه های فراکتالی را شرح داده و به چند مثال ریاضی از فراکتال ها اشاره می کنیم . در بخش بعدی تعریف دقیق فراکتال را ارایه می دهیم ونهایتا " بعد فراکتال " را بیان و بعد هاسدورف و بعد جعبه ای را به تفصیل شرح می دهیم .

در فصل دوم ابتدا به تعریف تابع جرم $\gamma^{\alpha}(F,a,b)$ می پردازیم . تابع جرم بیانگر محتوی مجموعه F در بازه $[a,b]\subset\mathbb{R}$ است . اگر چه تابع جرم $\gamma^{\alpha}(F,a,b)$ یک اندازه نیست ولی می تواند با تعریف اندازه هاسدورف مقایسه شود . تابع پلکانی $S_F^{\alpha}(x)=\gamma^{\alpha}(F,a,x)$ با ثابت فرض کردن a از تابع جرم بدست می آید . عبارت $S_F^{\alpha}(y)-S_F^{\alpha}(x)$ در تعریف $F^{\alpha}-$ انتگرال و $F^{\alpha}-$مشتق به جای فاصله $(y-x)$ برای بازه $[x,y]$ در مشتق وانتگرال معمولی به کار می رود . همچنین تابع جرم منجر به تعریف جدیدی از بعد به نام $\gamma-$ بعد می شود ، که ظریف تر از بعد جعبه ای است اما ظریف تر از بعد هاسدورف نیست . نشان می دهیم که اندازه هاسدورف و تابع جرم برای مجموعه های فشرده یکسان هستند و اگر $F\subset\mathbb{R}$ فشرده باشد آنگاه بعد هاسدورف با $\gamma-$ بعد یکسان است .

در فصل سوم ابتدا به معرفی نمادی برای حد وپیوستگی روی F با متریک القایی از $\mathbb{R}$ می پردازیم .

انتگرال معمولی برای توابعی با تکیه گاه F تعریف نشده و یا در صورت تعریف شده بودن ، برابر صفر است .در این فصل به تعریف $F^{\alpha}-$ مشتق و $F^{\alpha}-$ انتگرال برای چنین توابعی می پردازیم و مشابه قضیه رُل و قانون لایپنیتزرا

بیان واثبات می کنیم و در بخش بعدی رابطه بین F^{α} - مشتق و F^{α}– انتگرال را بـه وسـیله قـضیه اساسـی F^{α}– حسابان بیان و اثبات می کنیم .

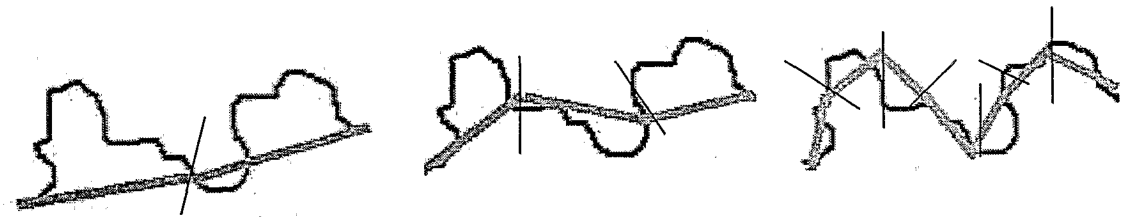
در فصل چهارم به معرفی منحنی کخ به عنوان منیفلد هموار می پردازیم . ابتدا نشان می دهیم که میـان فاصـله بـسته $[0,1]\subset\mathbb{R}$ و منحنی کخ کـه زیـر مجموعـه ای توپولـوژیکی از $\mathbb{R}^2$ اسـت ، همئـو مورفیـسمی موجـود اسـت وایـن همئومورفیسم ساختار منیفلدی هموار وکرانداری را به منحنی کخ می بخشد .

فصل اول

پیش نیازها

۱–۱ تاریخچه

چگونه طول تقریبی شکل زیر را محاسبه می کنید؟



(۱)　　(۲)　　(۳).

فرض کنید خط کشی هایی به طول های S ، $S/۲$ ، $S/۴$ در اختیار داریم . با توجه به شکل (۱) اگر از خط کشی به طول S استفاده کنیم ، طول تقریبی شکل برابر $L_1 = ۲\times S$ است . اگرازخط کشی به طول $S/۲$ استفاده کنیم ، با توجه به شکل (۲) طول تقریبی شکل برابر $L_2 = ۳\times S/۲$ است و اگراز خط کشی به طول $S/۴$ استفاده کنیم با توجه به شکل (۳) طول تقریبی شکل برابر $L_3 = ۷\times S/۴$ است .

داریم $L_1 < L_2 < L_3$.

درنتیجه هرچه مقیاس اندازه گیری کوچکترباشد ، طول شکل را دقیقتر محاسبه کرده ایم .

اگرکمی دقیق به محیط اطراف خود نگاه کنیم درمی یابیم که بسیاری ازاشیاء اطراف ما دارای شکلهایی به صورت فوق و یا حتی دارای پستی وبلندی های بیشترهستند ، مانند شکل قله کوهها ، ابرها ، سواحل دریا ها و رود خانه ها وغیره .

ریاضی دانان برای مدل سازی این گونه اشیاء و مسا ئل طبیعی با ید اشیایی را معرفی می کردند که خواص هندسی آنها وابسته به مقیاس های مورد استفاده نباشد . این مسئله که از سال ۱۹۱۷ از مسائل مطرح بوده است . در سال ۱۹۷۰ مندلبروت[1] ریاضیدان لهستانی پایه گذار هندسه جدیدی شد که آن را " **هندسه بدون اندازه**" یا "**هندسه فراکتال**[2] " می نامند و این هندسه در مدلبندی مسائل طبیعی بسیار مفید است .

مندلبروت کلمه فراکتال را در کتاب درسی لاتین پسرش پیدا کرد که در مقابل آن نوشته شده بود: قطعه قطعه شده – شکسته شده- پخش شده . در زبان فارسی بعضی از افراد واژه فراکتال را "**برخال** " ترجمه کرده اند ، که این واژه تشکیل

Mandelbrot - [1]
Fractal - [2]

شده ازواژه "**برخ**" به معنی "**کسر**" و پسوند" **ال**" به معنی "**هم شکل با**" است . اما ما در سراسر این پایان نامه از واژه فراکتال استفاده می کنیم .

" با به کاربردن فراکتال ها قادریم بسیاری از پدیده ها در طبیعت را با زبان ریاضیات بیان کنیم ."

با توجه به جمله ئ فوق وارد دنیای ریاضیات می شویم وبه چند مثال از فراکتالهای ریاضی می پردازیم.

مثال : یکی از نمونه های بسیار ساده از فراکتالها **مجموعه کانتور**[1] است. مجموعه کانتور با شروع از فاصله $I=[0,1]$ و دنباله ای از حذف کردنهای متوالی ساخته می شود . فرض کنیم C_1 زیر مجموعه ای از I است که از حذف ۳ / ۱ میانی از Iحاصل می شود و C_2 با حذف قطعه ۳ / ۱میانی از هر یک از فاصله های تشکیل دهنده ی C_1بدست می آید و الی آخر.

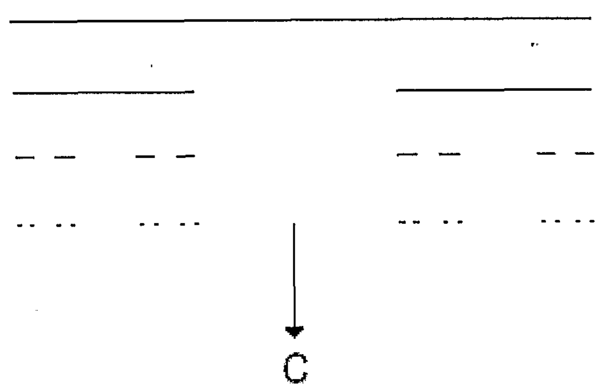
برای هر $k \geq 0$، C_k از 2^k فاصله با طول $\frac{1}{3^k}$ تشکیل شده است و داریم :

$$C_0 \supseteq C_1 \supseteq C_2 \supseteq \dots .$$

وقتی k به بینهایت میل کند ، مجموعه ی C_k به سمت مجموعه ایی به نام C میل می کند که آن را مجموعه کانتور می نامیم . به عبارت دیگر می توان نوشت : $C=\bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$.

می توان نشان داد مجموعه کانتورشامل اعدادی از فاصله $I=[0,1]$است که در بسط اعشار ی نامتناهی آنها در مبنای سه ، رقم یک وجود ندارد . یعنی Cشامل همه اعداد به صورت زیر است :

$$a_1 \times 3^{-1} + a_2 \times 3^{-2} + \dots \qquad a_i = 0,2$$



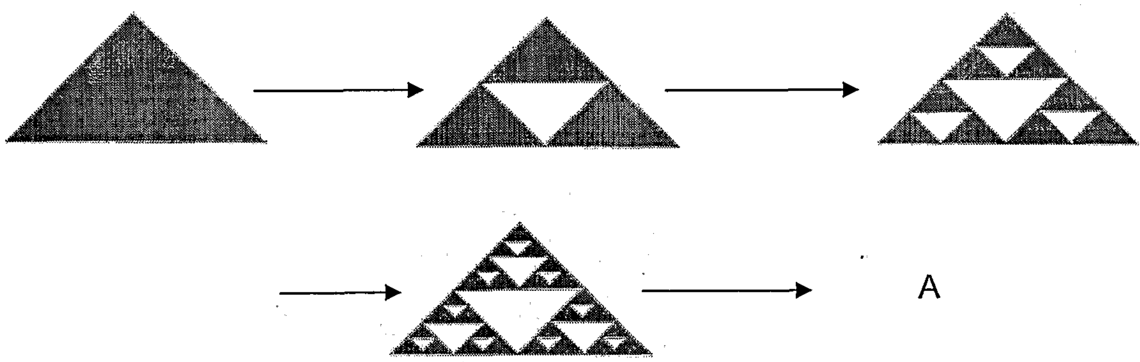
(۴) مجموعه کا نتور

[1] Cantor set -

مثال بعدی **مثلث سر پینسکی**[1] نام دارد وبه این صورت ساخته می شود که از مثلث بسته و متساوی الاضلاع A_0 شروع می کنیم . آن را به چهار مثلث تقسیم بندی می کنیم و نقاط درونی مثلث وسطی را بر می داریم ، تا شکل A_1 شامل سه مثلث متساوی الاضلاع حاصل شود. سپس عمل فوق را برای هر یک از سه مثلث تشکیل دهنده A_1 تکرار می کنیم و الی آخر. وقتی که k به بینهایت میل می کند، A_k به سمت یک شیٔ هندسی میل می کند که آ نرا مثلث سر پینسکی می نامیم و با علامت A نشان می دهیم :

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots .$$

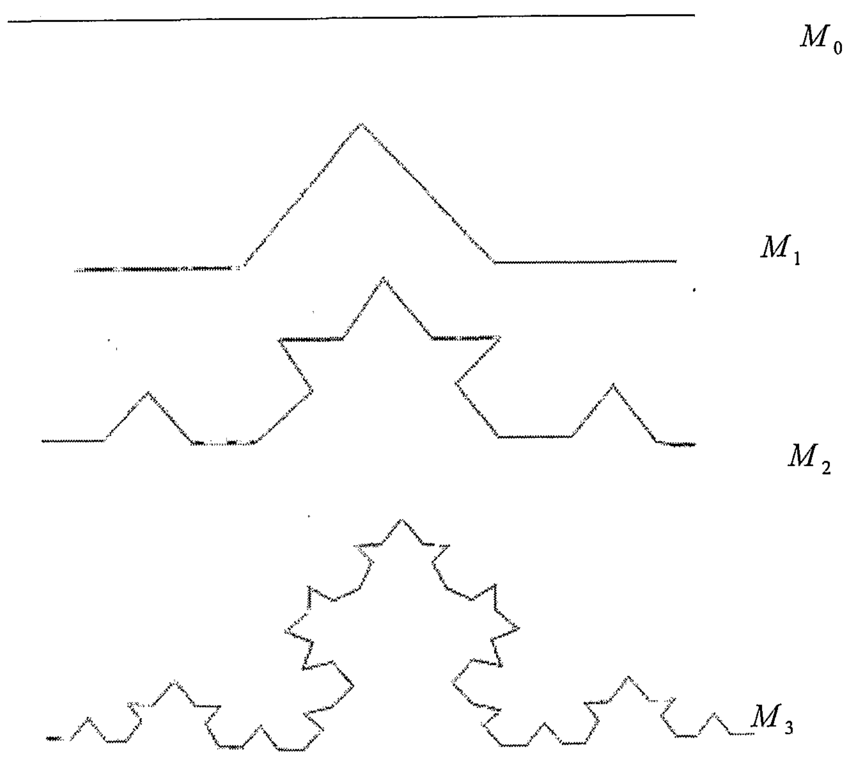
A رامی توان به صورت زیر نیز تعریف کرد $A = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_k$.



(۵) مثلث سرپینسکی

مثال دیگر **منحنی کخ**[2] نام دارد و به این صورت ساخته می شود که پاره خط M_0 به طول یک را در نظر می گیریم و آن را به سه قسمت مساوی تقسیم می کنیم . سپس قسمت میانی را حذف کرده وبه جای قسمت حذف شده دو ضلع یک مثلث متساوی الاضلاع را با آن ضلع جایگزین می کنیم تا M_1 به دست آید . سپس عمل فوق را برای هر یک از پاره خط های تشکیل دهنده ی M_1 تکرار می کنیم تا شکل M_2 بدست آید و الی آخر . وقتی که k به بینهایت میل می کند M_k به سمت شیٔ هندسی M میل می کند ، که آن را منحنی کخ می نامند .

1- Sierpinski triangle
2- Koch curve

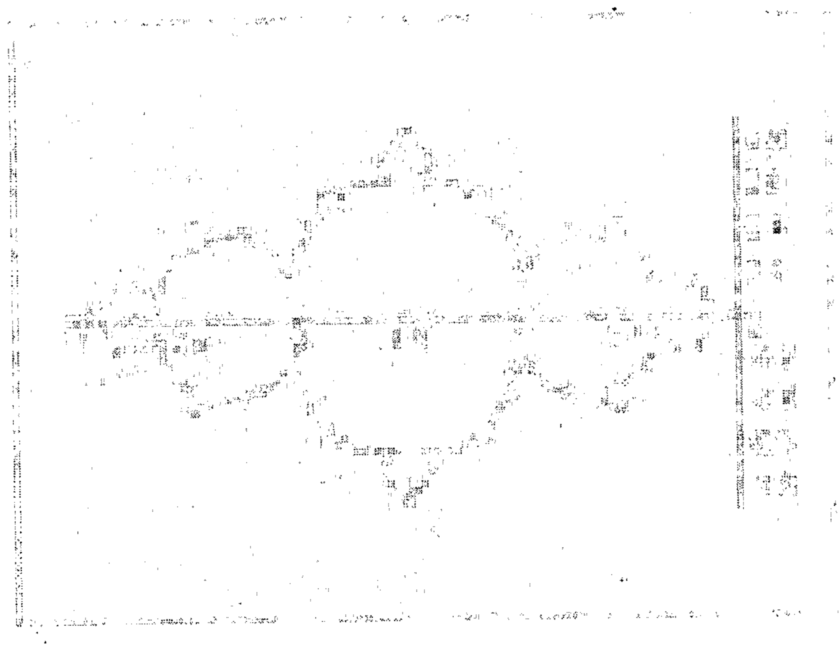


(۶) منحنی کخ

نمونه دیگری از فراکتال ها **مجموعه ژولیا**[1] است .این مجموعه با استفاده از تابع مختلط $f(z)=z^2+c$ که cعدد ثابت است ساخته می شود . اگر A گردایه همه نقطه های z در صفحه مختلط باشد چنانچه $\lim_{k\to\infty}\left(f\circ f\circ\dots\circ f(z)\right)=\infty$ آنگاه مرز A را مجموعه ی ژولیای تابع f می نامیم .

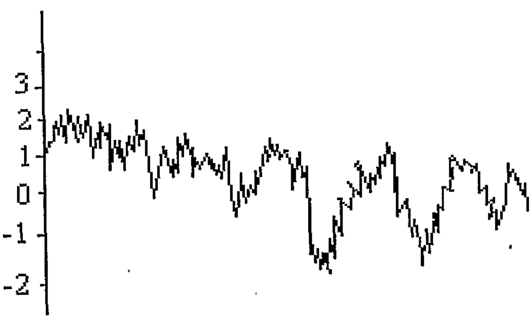
البته تعاریف معادل دیگری نیز برای مجموعه ژولیا وجود دارد . شکل هندسی مجموعه ژولیا کاملاوابسطه به c است .

1 - Julia set



(۷) مجموعه ژولیا

نمودار بعضی از توابع مانند تابع $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{3}{2})^{-\frac{k}{2}}\sin(\frac{3}{2})^{k}t$ نیز خواص فراکتالی دارند .



(۸) نمودار تابع **f(t)**

۱–۲ تعریف فراکتا ل

تعاریف مختلفی برای بعد وجود دارد که در بخشهای بعدی آنها را ذکر می کنیم . از جمله بعد هاسدورف که در بررسی فراکتال ها بسیار مفید است . بعد توپولوژیکی یک مجموعه به طور استقرایی تعریف می شود .

تعریف : مجموعه Aدارای بعد توپولوژیکی صفر است اگر برای هر $p \in A$ همسایگی U موجود باشد ، طوریکه $\partial U \bigcap A = \phi$. مجموعه A دارای بعد توپولوژیکی $k \geq 0$است اگر برای هر $p \in A$همسایگی U برای p موجود باشد چنانکه $\partial U \bigcap A$ دارای بعد $k - 1$ باشد.

مندلبروت تعریف فراکتال را به این صورت ارائه می دهد :

" فراکتال مجموعه ای است که بعد فراکتالی(هاسدورف)[1] آن اکیدا بزرگتر از بعد توپولوژیکی آن است . "

اما این تعریف دارای این ایراد است که مجموعه های زیادی موجودند طوری که بعد هاسدورف آنها بزرگتر از بعد توپولوژیکی آنها نیست ولی بسیاری از خواص فراکتالها رادارند. تعریف های مختلف دیگری را نیزبرای فراکتال ها ارایه شده که هر کدام دارای نواقصی غیر قابل چشم پوشی هستند و تا کنون ریاضی دانان روی یک تعریف مشخص برای فراکتالها اتفاق نظر پیدا نکرده اند.

"کنث فالکونر[2] " در کتاب هندسه فراکتال ها ی خود می نویسد: " به نظرمن بهتراست فراکتال رامانند زیست شناسان که موجود زنده را تعریف می کنند تعریف کنیم . آنها تعریف صریح ودقیقی را از موجود زنده ارایه نمی دهند. ولی ویژگی های یک موجودزنده مانند قابلیت تکثیر، حرکت داشتن وغیره راذکر می کنند. بنابراین خوب است ما هم فراکتال رامجموعه ایی از نقاط تعریف کنیم که یک لیست از ویژگی ها را داشته باشد."

ما نیز براین اساس Fرایک فراکتال می نامیم هر گاه Fدارای خواص زیر باشد .

۱) Fدارای ساختار موضعا مشابه کل باشد . به این معنا که اگر بر بخش کوچکی از آن توجه کنیم وآن بخش را با مقیاس مناسبی بزرگتر کنیم شئ هندسی که بدست می آید ، مشابه شئ اصلی است . مثلا آن قسمت از مجموعه کانتور که در فاصله $[0,1/3]$است ، اگر سه برابر شود مجموعه کانتور حاصل خواهد شد و به طور مشابه ، بخشی از مجموعه کانتور که در فاصله $[0,1/9]$ قرار می گیرد مشابه مجموعه کانتور است که با مقیاس ۱/۹ کوچکتر شده است .

2) Fساختار پیچیده ای دارد ولی معمولا تعریف ریاضی آن ساده است.

---

1 -تعریف بعد فراکتالی (هاسدورف) در بخش بعدی آمده است .
2 - Kenneth falconer

3) تعریف ریاضی F معمولا با روابط بازگشتی امکان پذیر است .

4) ساختار آن با شیوه های کلاسیک قابل توصیف نیست . مثلا نقاط آنها جواب معادلات جبری ساده ای نیستند.

5) مقیاسهای هندسه کلاسیک نظیر طول ومساحت وغیره برای اندازه گیری آن مناسب نیستد . (F بی قاعده تراز آن است که بتوان با هندسه اقلیدسی آنرا توصیف کرد.)

البته بدیهی است که اینگونه تعریف کردن ، ریاضی دانان رابه طور کامل راضی نمی کند .

۱–۳ بعد فراکتا لی

مقدمه

یکی از مهمترین ابزارها ئی که دربررسی فراکتال ها مورد استفاده قرارمی گیردمفهوم "بعد"است . تعاریف مختلفی برای بعد یک مجموعه ارائه شده اند که هر یک بسته به اینکه برای چه منظوری مورد استفاده قرار گیرند ، مفید هستند . یک مجموعه نسبت به تعاریف مختلف ، ممکن است بعد های مختلفی داشته باشد. بنابراین وقتی کلمه بعد را به کار می بریم باید توجه داشته باشیم که کدام تعریف مورد نظر است .

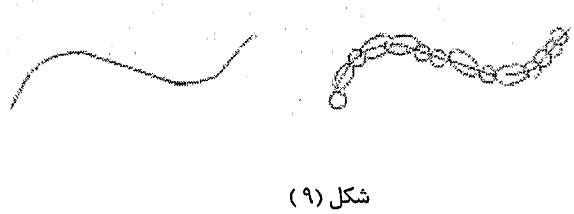
دراین پایان نامه سه تعریف برای بعد ارایه می دهیم . بعد هاسدورف وبعد جعبه ای را در این بخش و γ-بعدرا در بخش بعد معرفی می کنیم .

بعد هاسدورف

یکی از مهمترین تعریفهای بعد ، بعد هاسدورف[1] است . مندلبروت از این تعریف برای معرفی فراکتالها استفاده کرده است . تعریف هاسدورف از نظر ریاضی به سادگی قابل بیان است ، اما محاسبه و حتی تخمین بعد هاسدورف معمولا کار دشواری است . به هر حال برای بحث های نظری و شناخت ریاضیات فراکتالها ، آشنایی با بعد هاسدورف کاملا ضروری است . ابتدا با مثالی ساده ، ایده ای را که در پشت تعریف بعد هاسدورف واقع است بیان می کنیم .

فرض کنیم F یک منحنی به طول L واقع بر صفحه $\mathbb{R}^2$ است . F را به وسیله گردایه شمارای $\{A_i\}$ از نقاط درونی دایره ها می پوشانیم. فرض کنیم قطر A_i برابر d_i است و $d = Sup \ \{d_i\}$. اگر d به سمت صفر میل کند ، یعنی دایره ها کوچک شوند مجموع طول قطر دایره ها به سمت L میل می کند . یعنی :

$$\lim_{d \to 0} \sum d_i \to L$$



شکل (۹)

[1] Hausdorff dimension -