دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض گرایش آنالیز

مشخص‌سازی‌های توابع شبه‌محدب و محدب‌نما و کاربردهای آن‌ها

استاد راهنما:

دکتر محبوبه رضایی

استاد مشاور :

دکتر جعفر زعفرانی

پژوهشگر:

سید ایمان رسولی هسنیجه

چکیده

این پایان‌نامه شامل سه فصل است که در فصل اول ابتدا مفاهیم مقدماتی و قضایایی که در سراسر پایان‌نامه مورد نیاز است را بیان می‌کنیم.
در فصل دوم نگاشت‌های یکنوا و تعمیم‌های آن‌ها را تعریف می‌کنیم سپس انواع توابع تعمیم‌یافته محدب را نسبت به این نگاشت‌ها مشخص‌سازی می‌کنیم. در بخش پایانی کاربردهای از مطالب فصل در نابرابری‌های تغییراتی بیان می‌شود.
فصل سوم شامل تعمیم‌های فصل دوم در حالت محدب‌پایایی نسبت به زیرمشتق حدی در فضاهای آسپلند می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: توابع شبه‌محدب، توابع محدب‌نما، محدب‌پایایی، زیرمشتق حدی، فضای آسپلند.

مقدمه

آنالیز محدب یکی از شاخه‌های ریاضیات است که به دلیل کاربردهای فراوانی که در علوم مختلف از جمله اقتصاد، علوم مهندسی، نظریه احتمال و غیره دارد از دیرباز مورد توجه بوده است. یکی از دلایل مورد توجه بودن این شاخه از ریاضیات این است که رده توابع محدب خواص بسیار خوبی دارند. از جمله این خواص این است که هر مینیمم موضعی این توابع یک مینیمم سراسری است، مشتق جهتی این توابع همواره وجود دارد، این توابع روی اعداد حقیقی توابعی پیوسته هستند و مشتق آن‌ها یک تابع یکنوا می‌باشد. انواع مختلف تعمیم‌های توابع محدب که در نیمه دوم قرن بیستم معرفی شدند توابعی هستند که حداقل یکی از این خواص را دارند. چون توابع محدب و تعمیم‌های آن‌ها توابعی ناهموار می‌باشند، ابزارهای آنالیز ناهموار به‌کار گرفته می‌شوند. در این مقوله زیرمشتق‌ها معرفی می‌شوند. زیرمشتق‌ها نگاشت‌هایی مجموعه مقدار هستند به همین دلیل نگاشت‌های مجموعه مقدار یکنوای تعمیم‌یافته برای مطالعه خواص توابع محدب تعمیم‌یافته معرفی شده‌اند.

توابع شبه‌محدب اولین بار توسط فنتی [۱] [۹]در سال ۱۹۴۹ معرفی شدند و پس از

[۱] Feneti

آن توسط محققان زیادی مشخص‌سازی شدند که می توان به لوک[۲] [۱۳]، پی‌نت[۳] [۱۷] ، اسل[۴] [۱] و دنیل‌دیس[۵] و هاجی‌ساواز[۶] [۵] و [۴] اشاره کرد. دنیل‌دیس و هاجی‌ساواز [۵] نگاشت‌های یکنوای‌دوری و یکنوای‌سره را معرفی کردند و توابع محدب تعمیم‌یافته را نسبت به این نگاشت‌ها مشخص‌سازی کردند. نتایجی که در این سال‌ها به‌دست می‌آمد اغلب نسبت به زیرمشتق کلارک و کلارک-راکفلر بود تا این‌که هاجی‌ساواز [۱۰] در سال ۲۰۰۵ نتایجی که تا آن زمان به‌دست آمده بود را جمع‌بندی کرد و همه را نسبت به یک زیرمشتق بزرگتر که زیرمشتق‌های دیگر را دربر می‌گرفت بیان کرد. در سال ۲۰۰۷ سلیمانی‌دامنه [۲۱] برای اولین بار از زیرمشتق حدی برای مشخص‌سازی توابع شبه‌محدب و محدب‌نما روی $\mathbb{R}^n$ و سپس در سال ۲۰۰۹ در [۲۲] روی یک فضای آسپلند استفاده کرد.

یکی از مهمترین مفاهیم تعمیم‌یافته تحدب، محدب‌پایایی است که اولین بار توسط هانسن[۷] [۱۱] در سال ۱۹۸۱ معرفی شد. مشابه حالت محدب، توابع محدب‌پایا و انواع تعمیم‌های آن‌ها تعریف و توسط محققان مشخص‌سازی شدند. یانگ[۸]، یانگ[۹] و تهو[۱۰] در مقاله‌هایی که در سال‌های ۲۰۰۱، ۲۰۰۳ و ۲۰۰۵

[۲] Dinh The Luc

[۳] Penot

[۴] Aussel

[۵] Daniilidis

[۶] Hadjisavvas

[۷] Hanson

[۸] Yang. X. M

[۹] Yang X. Q

منتشر کردند ([۲۳]، [۲۵] و [۲۴]) نگاشت‌های یکنواپایا را معرفی کردند و رابطه محدب‌پایایی و یکنواپایایی را روی $\mathbb{R}^n$ برای توابع مشتق‌پذیر بررسی کردند. جبروتیان و زعفرانی [۱۲] یک مشخص‌سازی کامل از توابع محدب‌پایای تعمیم‌یافته ناهموار نسبت به زیرمشتق کلارک در فضاهای باناخ ارائه دادند. سلیمانی‌دامنه نتایجی که جبروتیان و زعفرانی به‌دست آورده بودند را نسبت به زیرمشتق حدی در فضاهای آسپلند گسترش داد و کاربردهایی از آن‌ها را در مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی بیان کرد. اویسی‌ها و زعفرانی برخی از نتایجی که اسل در [۱] به‌دست آورده بود را تعمیم دادند و کاربردهایی از محدب‌پایایی را در نابرابری‌های تغییراتی و مسائل بهینه‌سازی‌برداری بیان کردند.

ما در این پایان‌نامه با استفاده از مراجعی که در بالا ذکر شد ابتدا توابع شبه‌محدب، محدب‌نما و تعمیم‌های آن‌ها را در فضای باناخ و سپس توابع محدب‌پایا و تعمیم‌های آن‌ها را در فضای آسپلند مشخص‌سازی می‌کنیم.

[۱۰] Teo. K. L

فهرست مطالب

فصل ۱

مفاهیم و تعاریف اولیه

در این فصل تعاریف و قضایایی که در سراسر این پایان‌نامه نیاز داریم را بیان می‌کنیم. این‌جا X یک فضای باناخ با دوگان X^* است که $\langle\ ,\ \rangle$ دوگانگی آن‌ها را نشان می‌دهد. هر کجا خلاف این باشد ذکر خواهد شد.

۱.۱ مفاهیم مقدماتی آنالیز محدب

تعریف ۱.۱.۱. زیر مجموعه A از X را محدب می‌گوییم اگر به ازای هر $x, y \in X$ و هر $\lambda \in [۰, ۱]$ داشته باشیم

$$\lambda x + (۱ - \lambda) y \in A.$$

تعریف ۲.۱.۱. اگر A یک زیر مجموعه X باشد، کوچکترین زیرمجموعه محدب شامل A را غلاف محدب A می‌گوییم و با $convA$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۳.۱.۱. اگر A یک زیرمجموعه X باشد آن‌گاه

$$convA = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ : \ x_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

تعریف ۴.۱.۱. به ازای هر $x, y \in X$ قطعه خط گذرنده از x و y به‌صورت

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda) y \ : \ 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

و مجموعه (x, y) به‌صورت

$$(x, y) = [x, y] \setminus \{x, y\},$$

تعریف می‌شوند. مجموعه‌های $[x, y)$ و $(x, y]$ نیز به طریق مشابه تعریف می‌شوند.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. f را روی X

۱. محدب[1] (CX) گوییم اگر به ازای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

۲. محدب‌اکید[2] (SCX) گوییم اگر به ازای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$ و هر $\lambda \in (0, 1)$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y).$$

۳. شبه‌محدب[3] (QCX) گوییم اگر به ازای هر $x, y \in X$ و $\lambda \in [0, 1]$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (1 - \lambda) y) \leq max\{f(x), f(y)\}.$$

[1] convex

[2] strictly convex

[3] quasiconvex

۴. شبه‌محدب‌اکید[۴] (SQCX) گوییم اگر به ازای هر $x, y \in X$ که $x \neq y$ و هر $\lambda \in (0, 1)$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < max\{f(x), f(y)\}.$$

۵. نیم‌اکیدشبه‌محدب[۵] (SSQCX) گوییم اگر به ازای هر $x, y \in X$ که $f(x) \neq f(y)$ و به ازای هر $\lambda \in (0, 1)$ داشته باشیم

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < max\{f(x), f(y)\}.$$

از تعریف بالا واضع است که هر تابع محدب، شبه‌محدب نیز می‌باشد. هم‌چنین هر تابع محدب‌اکید، محدب و هر تابع شبه‌محدب‌اکید، شبه‌محدب و نیم‌اکیدشبه‌محدب می‌باشد. مثال‌های زیر نشان می‌دهد که عکس این مطالب درست نیست.

مثال ۶.۱.۱. هر تابع ثابت روی مجموعه اعداد حقیقی یک تابع محدب و شبه‌محدب است که محدب‌اکید و شبه‌محدب‌اکید نیست.

مثال ۷.۱.۱. تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x) = \sqrt{|x|}$ یک تابع شبه‌محدب است که محدب نیست.

مثال ۸.۱.۱. تابع $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} |x - 1| & |x| \geq 1 \\ 0 & |x| < 1 \end{cases}$$

[۴] strictly quasiconvex

[۵] semistrictly quasiconvex

یک تابع نیم‌اکیدشبه‌محدب است که شبه‌محدب‌اکید نیست.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ یک تابع باشد.

۱. دامنه ی f عبارت‌است از

$$domf = \{x \in X \ : \ f(x) < \infty\}.$$

۲. f را سره گوییم اگر به ازای هر $x \in X$، $f(x) > -\infty$ و

$$domf \neq \emptyset.$$

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنید $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد.

۱. نمودار f عبارت‌است از

$$grf = \{(x, f(x)) \ : \ x \in X\}.$$

۲. زبرنمودار f عبارت‌است از

$$epif = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \ : \ f(x) \leq r\}.$$

۳. به ازای $\lambda \in \mathbb{R}$ زیرسطح f به‌صورت زیر است.

$$S_\lambda f = \{x \in X \ : \ f(x) \leq \lambda\}.$$

۴. به ازای $\lambda \in \mathbb{R}$ زیرسطح اکید f به‌صورت زیر است.

$$S_\lambda^< f = \{x \in X \ : \ f(x) < \lambda\}.$$

گزاره ۱۱.۱.۱. فرض کنید $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد. دراین‌صورت عبارت‌های زیر معادل‌اند.

۱. f محدب است.

۲. $epi f$ محدب است.

اثبات. به [۱۹] مراجعه شود. □

گزاره ۱.۱.۱۲. فرض کنید $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد. دراین‌صورت عبارت‌های زیر معادل‌اند.

۱. f شبه‌محدب است.

۲. به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$، $S_\lambda f$ محدب است.

۳. به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$، $S_\lambda^< f$ محدب است.

اثبات. به [۱۹] مراجعه شود. □

بنابراین یک تابع محدب است اگروتنهااگر زبرنمودار آن محدب باشد. در واقع توابع محدب رده توابعی هستند که زبرنمودار آن‌ها محدب است. هم‌چنین یک تابع شبه‌محدب است اگروتنهااگر هر زیرسطح آن محدب باشد. پس توابع شبه‌محدب رده توابعی هستند که زیرسطح محدب دارند.

تعریف ۱.۱.۱۳. تابع $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ را در x_0 نیم‌پیوسته‌پایینی گوییم اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ همسایگی U از x_0 وجود داشته باشد به‌گونه‌ای‌که به ازای هر $x \in U$ داشته باشیم

$$f(x) \leq f(x_0) + \epsilon.$$

f را روی X نیم‌پیوسته‌پایینی گوییم اگر در هر نقطه از X نیم‌پیوسته‌پایینی باشد. هم‌چنین f را در x نیم‌پیوسته‌بالایی گوییم اگر $-f$ در x نیم‌پیوسته‌پایینی باشد.

گزاره ۱۴.۱.۱. تابع $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ در x پیوسته است اگروتنهااگر در x هم نیم‌پیوسته‌پایینی و هم نیم‌پیوسته‌بالایی باشد.

گزاره ۱۵.۱.۱. اگر $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع نیم‌پیوسته‌پایینی در x باشد آن‌گاه

$$\liminf_{y \to x} f(y) \geq f(x).$$

اثبات. به [۱۹] مراجعه شود. $\square$

باتوجه به گزاره قبل نتیجه زیر را می‌توان بیان کرد.

گزاره ۱۶.۱.۱. فرض کنید $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع باشد. دراین‌صورت عبارت‌های زیر معادل‌اند.

۱. f روی X نیم‌پیوسته‌پایینی است.

۲. $epi f$ بسته است.

۳. به ازای هر $\lambda \in \mathbb{R}$، $S_\lambda f$ بسته است.

اثبات. به [۱۹] مراجعه شود. $\square$

با توجه به گزاره بالا f یک تابع نیم‌پیوسته‌پایینی است اگروتنهااگر مجموعه $\{x \in X : f(x) \leq \lambda\}$ بسته باشد. پس f یک تابع نیم‌پیوسته‌بالایی است اگروتنهااگر مجموعه $\{x \in X : -f(x) \leq \lambda\}$ بسته باشد و یا متمم این مجموعه که همان زیرسطح اکید f است باز باشد. بنابراین نتیجه زیر را می‌توان بیان کرد.

نتیجه ۱۷.۱.۱. تابع $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ نیم‌پیوسته‌بالایی است اگروتنهااگر هر زیرسطح اکید f باز باشد.

تعریف ۱۸.۱.۱. تابع $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ را در نزدیکی $x \in X$ لیپشیتز گوییم اگر عدد ثابت $k > 0$ (ثابت لیپشیتز) و همسایگی U از x وجود داشته باشد به‌گونه‌ای‌که به ازای هر $y \in U$ داشته باشیم

$$|f(x) - f(y)| \leq k\|x - y\|.$$

در صورتی که f در نزدیکی هر نقطه X لیپشیتز باشد f را روی X موضعی‌لیپشیتز می‌گوییم.

تعریف ۱۹.۱.۱. گوی باز به مرکز $a \in X$ و شعاع $\epsilon > 0$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$B(a, \epsilon) = \{x \in X \ : \ \|x - a\| < \epsilon\}.$$

تعریف ۲۰.۱.۱. فرض کنید A یک زیر مجموعه X باشد. درون جبری A با $corA$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$corA = \{x_0 \in A : \forall x \in X, \exists t_x > 0, \forall t \in [0, t_x], x_0 + tx \in A\}.$$

گزاره ۲۱.۱.۱. اگر A یک زیرمجموعه محدب و بسته X باشد آن‌گاه درون‌جبری A و درون‌توپولوژیکی A یکی هستند.

اثبات. به [۱۹] مراجعه شود. □

تعریف ۲۲.۱.۱. تابع $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ را در $a \in domf$ شعاعی‌پیوسته گوییم اگر به ازای هر $d \in X$ تابع $f_{a,d} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ که به‌صورت $f_{a,d}(t) = f(a + td)$ تعریف می‌شود در صفر پیوسته باشد.

در پایان این بخش دامنه نگاشت‌های مجموعه‌مقدار را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲۳.۱.۱. دامنه نگاشت مجموعه‌مقدار $T : X \longrightarrow ۲^{X^*}$ با $D(T)$ نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$D(T) = \{x \in X : T(x) \neq \emptyset\}.$$

۲.۱ زیرمشتق‌ها

گزاره ۱.۲.۱. اگر $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع محدب سره باشد آن‌گاه مشتق جهتی fدر هر نقطه $x_۰ \in domf$ و در هر جهت $d \in X$ یعنی

$$f'(x_۰, d) = \lim_{t \downarrow ۰} \frac{f(x_۰ + td) - f(x_۰)}{t}, \qquad (۱.۱)$$

در $[-\infty, +\infty]$ وجود دارد.

اثبات. به [۱۹] مراجعه شود. $\square$

هنگامی که fمحدب نباشد، مشتق جهتی ممکن است وجود نداشته باشد.

مثال ۲.۲.۱. تابع شبه محدب $f : (-۱, ۱) \longrightarrow \mathbb{R}$ که به‌صورت

$$f(x) = \begin{cases} ۰ & -۱ < x \leq ۰ \\ -\frac{۱}{۲^{n+۱}} & \frac{۱}{۲^{n+۱}} \leq x < \frac{۱}{۲^n}, n = ۰, ۱, ... \end{cases},$$

تعریف می‌شود در $x = ۰$ مشتق جهتی ندارد. زیرا اگر $t_n = \frac{۱}{۲^{n+۱}}$ آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(۰ + t_n d) - f(۰)}{t_n} = -۱,$$

و اگر $t_n = \frac{۱}{۲^{n+\frac{۱}{۲}}}$ آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(۰ + t_n d) - f(۰)}{t_n} = -۲^{\frac{۱}{۲}}.$$

بنابراین مشتق جهتیf در جهت $d = ۱$ وجود ندارد. به طریق مشابه می‌توان نشان داد $f'(۰, d)$ به ازای هر $d \neq ۰$ وجود ندارد.

چون هنگامی که تابع محدب نباشد مشتق جهتی وجود ندارد، انواع دیگری از تعمیم‌های مشتق جهتی معرفی شده‌اند. این مشتق‌های تعمیم‌یافته به دو صورت می‌توانند تعریف شوند. اول این‌که به جای حد در ۱.۱ از حد بالایی ($\limsup$) یا حد پایینی ($\liminf$) استفاده شود. دوم این‌که در ۱.۱ $x_۰$ و d با x و d' جایگزین شوند و x به $x_۰$ و d به d' میل کند.

تعریف ۱.۲.۳. [۱۰] اگر $f : X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع نیم‌پیوسته‌پایینی، $x_۰ \in domf$ و $d \in X$ باشد آن‌گاه

۱. مشتق بالایی[۶] و پایینی دینی[۷] f در $x_۰$ و در جهت d به ترتیب به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f^{D^+}(x_۰, d) = \limsup_{t\downarrow ۰} \frac{f(x_۰ + td) - f(x_۰)}{t},$$

[۶] upper Dini derivative

[۷] lower Dini derivative

$$f^{D^-}(x_\circ, d) = \liminf_{t\downarrow\circ} \frac{f(x_\circ + td) - f(x_\circ)}{t}.$$

۲. مشتق کلارک-راکفلر[۸] f در $x_\circ$ و در جهت d به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f^{CR}(x_\circ, d) = \sup_{\epsilon>\circ} \limsup_{x\xrightarrow{f}x_\circ, t\downarrow\circ} \inf_{d'\in B(d,\epsilon)} \frac{f(x + td') - f(x)}{t}.$$

(نماد $x \xrightarrow{f} x_\circ$ به این معناست که $x \to x_\circ$ و $f(x) \to f(x_\circ)$)

۳. اگر f موضعی لیپشیتز باشد مشتق تعمیم یافته کلارک[۹] f در $x_\circ$ و در جهت d به‌صورت زیر است.

$$f^{\circ}(x_\circ, d) = \limsup_{x\to x_\circ, t\downarrow\circ} \frac{f(x + td) - f(x)}{t}.$$

۴. مشتق دگ[۱۰] f به‌صورت زیر است.

$$f^{\dagger}(x_\circ, d) = \limsup_{t\downarrow\circ, x\xrightarrow{f}x_\circ} \frac{f(x + t(d + x_\circ - x)) - f(x)}{t}.$$

نکته ۱.۲.۴. اگر f یک تابع موضعی لیپشیتز باشد آن‌گاه مشتق کلارک-راکفلر f و مشتق تعمیم یافته کلارک آن با هم مساویند.

اثبات. به [۲] مراجعه شود. $\square$

[۸] Clarke-Rockafellar derivative

[۹] Clarke generalized derivative

[۱۰] dag derivative

تعریف ۱.۲.۵. [۱] یک زیرمشتق مجرد هر نگاشت ∂ است به‌طوری‌که هر تابع نیم‌پیوسته‌پایینی $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ و هر $x \in X$ را با یک زیر مجموعه ی $\partial f(x)$ از X^* مربوط می‌کند و دارای خواص زیر است.

۱. اگر f محدب باشد آن‌گاه

$$\partial f(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, y - x \rangle + f(x) \leq f(y)\}.$$

۲. اگر f در $x \in domf$ یک مینیمم موضعی داشته باشد آن‌گاه

$$۰ \in \partial f(x).$$

۳. اگر g یک تابع حقیقی مقدار، محدب، پیوسته و $\partial-$مشتق‌پذیر در x باشد آن‌گاه

$$\partial(f + g)(x) \subseteq \partial f(x) + \partial g(x).$$

منظور از این‌که g در x، $\partial-$ مشتق پذیراست یعنی این‌که $\partial g(x)$ و $\partial(-g(x))$ هر دو ناتهی هستند. هم‌چنین تابع f را در x، $\partial-$زیرمشتق پذیر گوییم هرگاه $\partial f(x)$ ناتهی باشد.

تعریف ۱.۲.۵ مفهوم مجرد زیرمشتق را بیان می‌کند. به عنوان مثال زیرمشتق‌هایی که در تعریف بعد معرفی می‌شوند در شرایط این تعریف صدق می‌کنند. برای بررسی این مطلب می‌توان به مراجع [۳] و[۲] مراجعه کرد.

تعریف ۱.۲.۶. به ازای هر مشتق تعمیم یافته $f^\circ(x, d)$ که $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع نیم‌پیوسته‌پایینی، $x \in domf$ و $d \in X$ است زیرمشتق متناظر یک نگاشت مجموعه

مقدار $\partial^\diamond f(x) : X \to 2^{X^*}$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\partial^\diamond f(x) = \{x^* \in X^* : \langle x^*, v\rangle \leq f^\diamond(x,v), \forall v \in X\}.$$

اگر $x \notin domf$ قرار می‌دهیم

$$\partial^\diamond f(x) = \emptyset.$$

بنابراین $\partial^{CR} f(x)$، $\partial^C f(x)$، $\partial^{D^+} f(x)$، $\partial^{D^-} f(x)$ و $\partial^\dagger f(x)$ طبق تعریف ۶.۲.۱ تعریف می‌شوند و به ترتیب آن‌ها را زیرمشتق کلارک-راکفلر، زیرمشتق کلارک، زیرمشتق دینی بالایی، زیرمشتق دینی پایینی و زیرمشتق دگ f در x می‌نامیم.

گزاره ۷.۲.۱. اگر f یک تابع نیم‌پیوسته‌پایینی باشد، آن‌گاه

$$\partial^{CR} f \subseteq \partial^\dagger f,$$
$$\partial^{D^-} f \subseteq \partial^{D^+} f \subseteq \partial^\dagger f.$$

اثبات. به [۱]و [۱۰] مراجعه شود. □

یکی از مهمترین ابزار در آنالیز هموار و ناهموار قضیه مقدار میانگین [۱۱] (MVT) است. در آنالیز ناهموار این قضیه نسبت به زیرمشتق‌ها بیان می‌شود. زیرمشتق‌هایی که این قضیه در مورد آن‌ها برقرار است را زیرمشتق MVT می‌نامیم. تعریف زیر این مطلب را بیان می‌کند.

تعریف ۸.۲.۱. [۱۰] فرض کنید $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ یک تابع نیم‌پیوسته‌پایینی باشد. یک زیرمشتق مجرد ∂ را زیرمشتق MVT می‌نامیم اگر به ازای هر $x, y \in X$ که

[۱۱] Mean Value Thorem

$f(y) > f(x)$ **نقطه** $z \in [x, y)$ **و دنباله‌های** $\{x_n\} \subseteq domf$ و $\{x_n^*\} \subseteq X^*$ **وجود** داشته باشند به‌طوری‌که $x_n \to z$، $x_n^* \in \partial f(x_n)$ و به ازای هر $t > \circ$ داشته باشیم

$$\langle x_n^*, z + t(y - z) - x_n \rangle > \circ. \tag{۲.۱}$$

در حالت خاص رابطه ۲.۱ نتیجه می‌دهد، به ازای هر $v \in (z, y]$

$$\langle x_n^*, v - x_n \rangle > \circ. \tag{۳.۱}$$

قضیه ۹.۲.۱. ∂^{CR} در هر فضای باناخ، ∂^{D^-} در هر فضای تفکیک پذیر و ∂^{D^+} در هر فضای بازتابی MVT می‌باشند.

اثبات. به [۱] مراجعه شود. □

۳.۱ مفاهیم مقدماتی محدب‌پایایی

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید X یک فضای برداری باشد. زیر مجموعه S از X را نسبت به نگاشت $\eta : S \times S \longrightarrow X$ محدب‌پایا گوییم هرگاه به ازای هر $x, y \in S$ و $t \in [\circ, ۱]$

$$x + t\eta(y, x) \in S.$$

اکنون چند شرط معرفی می‌کنیم که به‌طورمکرر از آن‌ها استفاده می‌شود.

هرگاه S نسبت به η محدب‌پایا و $f : S \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$، آن‌گاه به ازای هر $x, y \in S$، شرایط A، B، C و D به‌صورت زیر درنظر گرفته می‌شوند.

شرط **A**:

$$f(y + \eta(x, y)) \leq f(x).$$