دانشکدهٔ علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

کد کردن شارهای ژئودزیکی روی سطوح ریمانی

از

ساناز لامعی جوان

استاد راهنما

دکتر داود احمدی دستجردی

اسفند ۱۳۹۰

تقدیم به

خانواده عزیزم

به خاطر همه مهربانی‌ها و حمایت‌های ارزشمندشان

تقدیر

خداوند را شکر می‌کنم که بر من منت نهاد و انسانهای بسیار عزیز و بزرگواری را در طول زندگی همراهم کرد.

از خانواده مهربانم متشکرم که با حمایت و دلسوزی فراوان تشویقم کردند و در این مسیر با فداکاری همراهم بودند.

از استاد عزیزم جناب آقای دکتر داود احمدی دستجردی تشکر می‌کنم که در طول تحصیل با دلسوزی، فداکاری و بزرگواری حمایتم کردند و من در طول این مدت مطالب بسیار ارزنده‌ای از ایشان آموختم و همیشه خداوند را به خاطر داشتن چنین استاد بزرگواری شکر می‌کنم.

از جناب آقای دکتر شهشهانی و سرکار خانم دکتر قانع به عنوان داوران خارجی و از جناب آقای دکتر حسین سهله به عنوان داور داخلی پایان نامه کمال تشکر را دارم.

از اساتید عزیزم مخصوصاً در دانشکده ریاضی دانشگاه گیلان تشکر می‌کنم که با محبت فراوان حمایتم کردند.

به جرات می‌گویم که لحظات زیبای زندگیم را مدیون همه شما عزیزان هستم و از خداوند سلامتی و سعادت روزافزون شما را خواستارم.

فهرست مطالب

فهرست جدول‌ها

فهرست شکل‌ها

چکیده:

کد کردن شارهای ژئودزیکی روی سطوح ریمانی

ساناز لامعی جوان

سیستم دینامیکی کدپذیر، سیستمی غنی و شناخته شده است. مساله اصلی در این سیستم‌ها، معرفی مجموعه‌ای از سمبول‌ها به عنوان الفبا و بیان چگونگی ارتباط آنها برای تشکیل کلمه‌هاست. متاسفانه، کار چندانی برای سطوح غیر فشرده انجام نشده است. در این پایان نامه، کد شارهای ژئودزیکی روی سطح مدولار که سطحی غیرفشرده است را با استفاده از کسر مسلسل منفی بدست آورده و دینامیک آن را بررسی می‌کنیم. سپس فراوانی اعداد حقیقی که ضرایب کسرمسلسل منفی آنها از مجموعه‌ای داده شده انتخاب می‌شود را با استفاده از بعد هاسدورف بیان می‌کنیم. علاوه بر آن، تقریبی برای آنتروپی سیستم‌های کدپذیر معین و همچنین فرمالیسم ترمودینامیک بعضی از سیستم‌های کدپذیر مارکوف برای سطوح غیر فشرده ارایه می‌دهیم. برای سطوح فشرده، کد شارهای ژئودزیکی روی سطوح بیضوی را فرمول بندی کرده‌ایم که مساله کد کردن شارهای ژئودزیکی روی سطوح فشرده را بطور کامل حل می‌کند.

کلید واژه :
سطح مدولار، کد کردن، بعد هاسدورف، شار ژئودزیکی، شار ویژه، آنتروپی، فرمالیسم ترمودینامیک، فشار توپولوژیکی.

Abstract:

Coding Geodesic Flows on Riemann Surfaces

Sanaz Lamei Javan

A coded system is a rich dynamical system and much is known about them. The main problem for these systems is to know a set of characters together with how they are allowed to perform a word. Unfortunately, not much is done for non-compact surfaces. In this thesis, we find and study the geodesic flows on the modular surface, a non-compact surface, and this is done by the exploitation of minus continued fractions. Then the abundance of real numbers with some given set of partial quotients for minus and positive continued fractions will be considered by the use of Hausdorff dimension. Moreover, estimates for entropy for some coded systems and thermodynamic formalism of some Markov coded systems has been worked out, all for codes on non-compact systems. For compact surfaces, we find the codes for geodesic flows on elliptic surfaces; this completely solves the coding of geodesic flows on compact surfaces.

Keywords:
modular surface, coding, geodesic flow, special flow, Hausdorff dimension, entropy, thermodinamic formalism, topological pressure.

پیشگفتار

در سال ۱۸۹۸ هنگامی که هادامارد (Hadamard) سطوح غیر فشرده با انحنای ثابت منفی را در $\mathbb{R}^{۳}$ بررسی می‌کرد دریافت که ژئودزیها روی این سطوح را می‌توان از طریق کد کردن و ارایه دنباله‌ای از سمبولها نمایش داد. ایده وی توسط مورس (Morse) [۶۳] و هدلاند (Hedlund) در [۳۲] و [۳۳] در ۱۹۲۰ و ۱۹۳۰ گسترش یافت. از آن زمان به بعد دینامیک سمبولیک به عنوان ابزار مهمی در مطالعه سیستمهایی با رفتار پیچیده و آشوبناک مورد استفاده قرار گرفت که شارهای ژئودزیکی روی منیفلدهای ریمانی با انحنای ثابت منفی کلاس مهمی از مثالهایی در این زمینه‌اند. در واقع داشتن کد، مطالعه سیستم را به مطالعه سیستم سمبولیک کاهش می‌دهد که در مورد اخیر اطلاعات فراوانی در دست است. کارهای این افراد با تکنیکها و سوالهای جدیدی توسط هاف (Hopf)، بوون (Bowen)، سیریز (Series)، آدلر (Adler)، فلتو (Flatto)، گربینر (Grabiner)، لاگاریاز (Lagarias)، کاتوک (S. Katok)، اوگارکوویچی (Ugarcovici) و ... در مراجع [۱]، [۲]، [۳]، [۱۱]، [۱۲]، [۱۴]، [۲۲]، [۲۸]، [۳۲]، [۳۳]، [۳۴]، [۳۵]، [۳۶]، [۴۵]، [۴۶]، [۴۷]، [۴۸]، [۴۹]، [۶۳]، [۷۴] و [۷۵]، ... ادامه یافت. اگر چه کارهای قابل توجهی در این زمینه انجام گرفته است ولی هنوز سوالهای زیادی در خصوص ساده‌ترین سطوح ریمانی، مثل سطوح حاصل از عمل یک گروه روی دیسک پوانکاره یا نیم‌صفحه بالایی در حالتی که سطح حاصل فشرده یا غیرفشرده باشد، باقی مانده است. هدف ما در این پایان نامه دادن زمینه لازم و طرح بعضی از مسائل موجود می‌باشد.

در فصل اول پایان نامه به بعضی از تعاریف و قضایای مقدماتی که در فصل‌های آتی استفاده می‌شود پرداخته‌ایم. این تعاریف در فصل‌های دیگر تکرار نشده است ولی در پیوست، راهنمای صفحات تعاریف موجود است.

در فصل دوم دینامیک شارهای ژئودزیکی روی سطح حاصل از عمل گروه $PSL(۲,\mathbb{Z})$ روی نیم‌صفحه بالایی را بررسی می‌کنیم. سطح خارج قسمتی حاصل، سطح مدولی نامیده می‌شود و یکی از معروف‌ترین سطوح غیرفشرده با انحنای منفی است. این سطح شامل یک نقطه تکین، یک نقطه بیضوی و یک نقطه سهموی است. مورس روشی کلی برای کد کردن شارها روی سطوح مختلف بر اساس انتخاب مرزهای ناحیه اصلی سطح خارج قسمتی حاصل از عمل گروه روی صفحه هذلولوی به عنوان سطح مقطع معرفی کرد. بر این اساس، کاتوک و اوگارکوویچی با شمردن تعداد دفعاتی که یک ژئودزی جهتدار، تصاویر سطح مقطع را تحت تبدیلات گروه روی فضای پوششی قطع می‌کند، شرطی کافی برای کد شارهای ژئودزیکی ارایه دادند. به این صورت که اگر $[..., n_{-۱}, n_{۰}, n_{۱}, ...]$ نمایش دنباله‌ای از اعداد صحیح ناصفر باشد که به ازای هر $i \in \mathbb{Z}$، $\left|\frac{۱}{n_i} + \frac{۱}{n_{i+۱}}\right| \leq \frac{۱}{۲}$، در آنصورت این دنباله کد یک ژئودزی روی سطح مدولی است [۴۸]. از آنجا که تقریبا همه ژئودزی‌ها سطح مقطع را بینهایت در زمان‌های گذشته و آینده قطع می‌کنند، این روش برای بدست آوردن کد شارها عملا غیر کاربردی است. ما در این فصل با ارایه تکنیکی جدید، ژئودزی‌ها را در فضای پارامتری در نظر گرفته و الگوریتمی برای کد کردن این شارها ارایه دادیم. با استفاده از این الگوریتم می‌توان زیر فضاهای k–گام از فضای کد شارهای ژئودزیکی روی سطح مدولی را یافت و به عنوان مثال در انتهای فصل دوم نشان می‌دهیم که اگر $۱ < |n_i|$ آنگاه برای هر $k \geq ۲$، بزرگترین زیرفضای مارکوف k–گام با بزرگترین زیرفضای مارکوف ۱–گام یکسان است.

گورویچ (Gurevich) و کاتوک آنتروپی برخی از زیرفضاهای بسیار خاص ۱–گام از شارهای ژئودزیکی را با استفاده از فرمولی که در مقالات ساوچنکو (Savchenko) [۷۳] و پولیاکوف (Polyakov) [۶۶] که هر دو از دانشجویان گورویچ بودند محاسبه کردند ولی این فرمول که تنها فرمول موجود برای

محاسبه آنتروپی شارها در حالت نامتناهی سمبول است، فقط برای حالتی قابل استفاده است که تعداد بلوک‌های غیرمجاز در فضای کدها متناهی بوده و طول آنها یک باشد. ولی همانطور که در فصل‌های ۲ و ۳ نشان می‌دهیم هنگامی که اعداد -۲، -۱، ۱ و ۲ در کد بکار رفته باشند آنگاه تعداد بلوک‌های حذف شده نامتناهی است. بنابراین در فصل سوم روشی جدید برای محاسبه فرمول آنتروپی شارهای ویژه روی نوعی از فضاهای مارکوف شمارا که تعمیمی از یک SFT ۱−گام به حالت نامتناهی سمبول است بدست می‌آوریم. مهمترین تکنیک شناخته شده برای محاسبه حدود آنتروپی همان روش پولیاکوف بود ولی این فرمول ما را قادر کرد که حدود آنتروپی سیستم‌های مهمی که تا به حال شناخته شده بوده است را ارتقا داده و به عنوان مثال در مثال‌های ۱ و ۲ از بخش دوم فصل ۳ نشان می‌دهیم که وجود چهار عدد فوق الذکر در کد، آنتروپی را به صورت محسوسی بالا می‌برد.

این تاثیر در بعد هاسدورف نقاط حدی گروه مدولی که رابطه تنگاتنگی با فضای کد ژئودزی‌ها دارد و متناظر با نقاط انتهایی ژئودزی‌هاست نیز دیده می‌شود. هنگامی‌که ژئودزی‌ها از سطح مدولی به فضای پوششی که همان نیم‌صفحه بالایی است بالا برده شوند، نقاط انتهایی ژئودزی‌ها متناظر با کسر مسلسل منفی با ضرایب کد ژئودزی است. در مراجعی که در فصل ۴ آورده شده است روش‌هایی برای تخمین بعد هاسدورف کسرهای مسلسل مثبت موجود است. در این فصل روشی برای تخمین بعد هاسدورف کسرهای مسلسل منفی با ضرایب مثبت بدست می‌آوریم که متفاوت با روشهای قبلی است. در این فصل حدس تکسان (Texan) را برای کسرهای مسلسل منفی در بازه $[\circ, \frac{1}{۲}]$ اثبات می‌نمائیم که برای کسرهای مسلسل مثبت نیز قابل استفاده است.

در فصل ۵ پایان نامه که بر اساس مقالاتی از آدلر، فلتو، بووِن و سیریز است، کد شارهای ژئودزیکی روی سطوح فشرده با انحنای منفی را بررسی کرده‌ایم. کد کردن شارهای ژئودزیکی روی سطوح فشرده با انحنای منفی هنگامی که دارای هیچ نقطه انشعابی نباشد در [۳] بررسی شده است. ما در فصل ۵، با استفاده از نتایج بووِن و سیریز و تلفیق آن با تکنیک‌های آدلر قادر شدیم کد کردن را به حالت کلی تعمیم داده و مساله کد کردن شارهای ژئودزیکی روی سطوح فشرده با انحنای منفی را به طور کامل حل کنیم. علاوه بر آن روشی برای محاسبه دقیق آنتروپی توپولوژیکی این شارها و همچنین تخمینی برای محاسبه آنتروپی بر اساس نشانِ این سطوح داده شده است.

در فصل ششم پس از بیان تعریف و خواص فشار توپولوژیکی کلاسیک، فشار توپولوژیکی ψ−القایی را در بخش سوم این فصل تعریف کرده و خواص آن را بررسی کردیم. این تعریف در اصل تغییر نیز صدق می‌کند. در قضیه ۷.٦ نشان دادیم که این تعریف از فشار، در نقاط بحرانی با فشار توپولوژیکی که توسط مالدین (Mauldin) و اوربانسکی (Urbanski) در [٦٢] تعریف شد یکسان است. همچنین فشار ψ−القایی با تحدید به شرایط فشار گورویچ و آنتروپی ساوچنکو، این فرمول‌ها را نتیجه می‌دهد. در بخش آخر فصل ٦ نیز تعریف آنتروپی شارهای ویژه را با استفاده از تعریف فشار ψ−القایی تعمیم دادیم.

مقالات استخراج شده از این پایان نامه به ترتیبِ فصل‌های پایان نامه عبارتند از [۷] [٦]، [۴]، [۵]، و [۴۰].

در این پایان نامه، شماره همه عناوین در هر فصل همچون تعاریف، قضایا، لمها و ... بصورت متوالی آمده است و به طور مثال شماره ٦.۲ به معنی ششمین عنوان در فصل دوم است. همچنین برای برگردان فارسی اصطلاحات لاتین از واژه نامه ریاضی و آمار انجمن ریاضی ایران استفاده شده است.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

تعاریف و قضایای این فصل از مراجع [۴۶] و [۶۵] آورده شده است.

۱—۱ سیستم‌های دینامیکی

بطور کلی یک سیستم دینامیکی (dynamical system) ، قانون چگونگی تغییرات فضای حالت با گذشت زمان طبق قانون ثابتی است. در واقع زوج مرتب (X, T) یک سیستم دینامیکی است هرگاه نگاشت $T : X \to X$ حالت‌های سیستم را با تحول زمان نشان دهد. T می‌تواند یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر باشد. همچنین T متناسب با فضای حالت می‌تواند پیوسته، همسانریخت، دیفیومورفیسم، اندازه‌پذیر و ... باشد. تعریف دقیق‌تر با استفاده از عمل گروه یا نیم گروه روی مجموعه داده می‌شود.

تعریف ۱.۱ فرض کنیم $(G, \cdot)$ یک گروه یا نیم‌گروه و X یک مجموعه باشد. در اینصورت عمل G از چپ روی X، عملگر دوتایی $o : G \times X \to X$ است که در خواص زیر صدق می‌کند:

الف) به ازای هر $g, h \in G$ و $x \in X$ داشته باشیم $(g \cdot h)\, o\, x = g\, o\, (h\, o\, x))$.

ب) به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم $e\, o\, x = x$.

تعریف ۲.۱ (X, g, o) یک سیستم دینامیکی نامیده می‌شود که در آن X فضای حالت، G گروه یا نیم گروه و $o : G \times X \to X$ یک عمل است.

زمان در سیستم دینامیکی می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد. در حالتی که زمان گسسته است حالت سیستم بصورت $x_{n+1} = T(x_n)$ نمایش داده می‌شود که $x = x_0$. مجموعه $\{x, T(x), T^2(x) = T(T(x)), T^3(x), \ldots\}$، که از تکرارهای (iterate) تابع بدست می آید، T—مدار (T-orbit) یا مدار (orbit) نقطه x تحت T نامیده می‌شود. در حالتی که زمان پیوسته است، معمولاً قانون با $\varphi : G \times X \to X$ نشان داده می‌شود و وضعیت یک نقطه چون $x = x(0)$ در زمان t، $x(t) = \varphi^t(x(0))$ است. در اینجا گروه G معمولا $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{R}^+$ است و نگاشت φ^t به ترتیب شار (flow) یا نیم‌شار (semi-flow) نام دارد. مدار $x = x(0)$ برای شار یا نیم‌شار به ترتیب $\{\varphi^t(x(0)) : t \in \mathbb{R}\}$ یا $\{\varphi^t(x(0)) : t \in \mathbb{R}^+\}$ است.

مـــثال ۳.۱ فرض کنید $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ و نگاشت پیوسته $T : X \to X$ با ضابطه

$$T(x) = \begin{cases} ۲x & ۰ \leq x < \frac{۱}{۲} \\ ۲x - ۱ & \frac{۱}{۲} \leq x \leq ۱. \end{cases}$$

را در نظر بگیرید. آنگاه (X, T) یک سیستم دینامیکی است.

تعـــریف ۴.۱ فرض کنید $\mathcal{A}$ یک مجموعه با تعداد k حرف الفبا و $\Sigma \subseteq \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : x_n \in \mathcal{A}\}$ باشد. برای دو عضو $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ و $y = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ از Σ قرار دهید

$$N(x, y) = \min\{|N| \geq ۱ : x_N \neq y_N\}.$$

می‌توان متریک زیر را روی این فضا تعریف کرد.

$$d(x,\, y) = \begin{cases} (\frac{۱}{۲})^{N(x,y)} & x \neq y \\ ۰ & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

اگر $\mathcal{A}$ دارای تعداد متناهی عضو باشد، با این متریک فضای $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ فشرده است.

نگاشت تغییر جا (shift map) روی Σ بصورت $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ با ضابطه $\sigma(x_i) = x_{i+۱}$ تعریف می‌شود و $(X,\, \sigma)$ یک سیستم دینامیکی است که سیستم سمبولیک (symbolic dynamics) نامیده می‌شود. نمادگذاری‌های این سیستم از [۶۵] انتخاب شده است. به دنباله‌ای متناهی از حروف الفبا مانند $x_۱$، $x_۲$، ... و x_n که قطعه‌ای از دنباله‌ای چون $\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : x_n \in \mathcal{A}\}$ باشد یک بلوک مجاز (admissible block) گفته می‌شود و معمولاً با $[x_۱,\, x_۲,\, \cdots,\, x_n]$ نمایش داده می‌شود. در غیر اینصورت $[x_۱,\, x_۲,\, \cdots,\, x_n]$، یک بلوک غیر مجاز (non admissible block) است. اگر تعداد و طول بلوک غیرمجاز از الفبا متناهی باشد آنگاه σ، نگاشت زیرتغییرجا از نوع متناهی (subshift of finite type) (SFT) نامیده می‌شود. در این حالت، ماتریسی $k \times k$ چون A متناظر با تبدیل σ موجود است و

$$\Sigma = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \;:\; A(x_n, x_{n+۱}) = ۱\right\}.$$

ماتریس A را غیر متناوب (aperiodic) می‌نامیم اگر $N > ۰$ موجود باشد بطوریکه به ازای هر $۱ \leq i, j \leq k$ داشته باشیم $A^N(i, j) \geq ۱$.

تعـــریف ۵.۱ همسانریختی‌ها یا توابع پیوسته $T : X \to X$ و $S : Y \to Y$ با هم مزدوج (conjugate) هستند هرگاه همسانریختی $h : X \to Y$ چنان موجود باشد که $h \circ T = S \circ h$.

توجه شود که شرط $h \circ T = S \circ h$ نشان می‌دهد که نگاشت h مدار نقاط در X و Y تحت توابع T و S را به هم مرتبط می‌سازد. بدین معنی که به ازای هر $x \in X$ و $n \geq ۰$ (یا $n \in \mathbb{Z}$ برای حالتی که T و S همسانریخت باشند)، $h(x) \in Y$ و $h(T^n(x)) = S^n(hx)$.

۱—۱—۱ آنتروپی

یکی از مسائل مورد توجه در سیستم‌های دینامیکی، طبقه‌بندی سیستم‌هایی است که رفتار دینامیکی مشابه دارند یا به عبارت دیگر مزدوج هستند. یکی از پایاهای مزدوج که در بررسی یک سیستم دینامیکی مورد توجه قرار می‌گیرد آنتروپی سیستم (entropy) است که شاخصی برای تشخیص سیستم‌های دینامیکی غیر مزدوج است. در اینجا دو تعریف از آنتروپی (توپولوژیکی و اندازه‌ای) و رابطه آنها را بیان می‌کنیم. فرض کنید X یک فضای متری فشرده باشد. اگر $\xi = \{A_1, \cdots, A_n\}$ و $\eta = \{B_1, \cdots, B_k\}$ دو پوشش متناهی از X باشند در آنصورت تظریف (refinement) آنها بصورت

$$\xi \vee \eta = \{A_i \cap B_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k\}$$

تعریف می‌شود.

آنتروپی توپولوژیکی پوشش ξ را برابر با $H(\xi) = \log N(\xi)$ تعریف می‌نماییم که در آن $N(\xi)$ کمترین تعداد مجموعه‌ای است که می تواند در زیرپوششی برای پوشش متناهی ξ موجود باشد. فرض کنید $T : X \to X$ نگاشت پیوسته روی فضای X باشد. آنتروپی توپولوژیکی T نسبت به پوشش ξ برابر است با:

$$h(T, \xi) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} H(\bigvee_{i=0}^{n-1} T^{-i}\xi)$$

و آنتروپی توپولوژیکی (topological entropy) T برابر است با:

$$h(T) = \sup\{h(T, \xi) \ : \ \text{یک پوشش متناهی است} \quad \xi\}.$$

قضیــــه ۱.۶ فرض کنید A یک ماتریس غیر متناوب $k \times k$ با درایه‌های صفر یا یک باشد. فرض کنید $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ نگاشت زیرتغییرجا از نوع متناهی نظیر ماتریس A بوده و λ بزرگترین مقدار ویژه A باشد. در اینصورت $h(\sigma) = \log \lambda$.

برهان. مرجع [۶۵] را ببینید. □

فرض کنید $(X, \mathcal{B}, \mu)$ یک فضای احتمال بوده و $\alpha = \{A_i\}_{i \in I}$ یک افراز شمارا از مجموعه‌های اندازه‌پذیر روی X باشد. آنتروپی افرازی چون α بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(\alpha) = -\sum_{A \in \alpha} \mu(A) \log \mu(A).$$

اگر $T : X \to X$ یک نگاشت حافظ اندازه روی فضای احتمال $(X, \mathcal{B}, \mu)$ باشد آنتروپی نظریه اندازه‌ای (measure theoretic entropy) نگاشت $T : X \to X$ بصورت

$$h_\mu(T) = \sup_{\{\alpha:\ H(\alpha) < \infty\}} h(T, \alpha)$$

تعریف می‌شود.

رابطه این دو آنتروپی به صورت زیر است:

قضیــــه ۷.۱ فرض کنید $(X,\mathcal{B},\mu)$ یک فضای احتمال بوده و $T:X\to X$ تابع پیوسته روی فضای متری فشرده X باشد. در آنصورت

$$h(T)=\sup\{h_\mu(T):\ \text{اندازه احتمال است}\quad \mu\}.$$

برهان. مرجع [۶۵] را ببینید. □

۱ـ۲ ایزومتری‌های حافظ جهت روی $\mathcal{H}$

در این پایان نامه از دو مدل استاندارد زیر برای نمایش سطوح جهتدار با انحنای منفی استفاده می‌کنیم که در حد کانفرمال یکی می‌باشند.

الف) نیم صفحه بالایی (upper half plane): مجموعه

$$\mathcal{H}=\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}\,(z)>0\}$$

با متریک $ds=\frac{\sqrt{dx^2+dy^2}}{y}$ نیم صفحه بالایی نامیده می‌شود. خطوط راست یا ژئودزیها در این مدل نیم دایره‌های عمود بر محور xها یا خطوط راست $x=a$ هستند. گروه ایزومتری‌های روی $\mathcal{H}$ توسط مجموعه

$$\left\{T(z)=\frac{az+b}{cz+d}:\ a,b,c,d\in\mathbb{R},\ ad-bc=1\right\}\tag{۱}$$

که تبدیلات حافظ جهت هستند و تبدیل

$$z\mapsto-\overline{z}$$

تولید می‌شود.

ب) دیسک پوانکاره (Poincare disk): دیسک پوانکاره، دیسکی یکه با تعریف

$$\mathbb{D}=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$$

و با متریک $ds=\frac{2\sqrt{dx^2+dy^2}}{1-|z|^2}$ است. گروه ایزومتری‌های روی $\mathbb{D}$ توسط تبدیلات

$$\left\{z\mapsto\frac{az+\overline{c}}{cz+\overline{a}}:\ a,c\in\mathbb{C},\ a\overline{a}-c\overline{c}=1\right\}$$

که تبدیلات حافظ جهت هستند و همچنین انعکاس

$$z\mapsto-\overline{z}$$

تولید می‌شود.

تبدیلات

$$\mathcal{M}=\left\{T(z)=\frac{az+b}{cz+d}:\ a,b,c,d\in\mathbb{R},\ ad-bc\neq ۰\right\}$$

تبدیلات موبیوس (Mobius transformation) نامیده می‌شوند. این تبدیلات با توجه به رد (trace) ماتریس متناظر با تبدیل که با tr نمایش می‌دهیم به سه دسته زیر تقسیم می‌شوند:

الف) اگر $|\mathrm{tr}|>2$ باشد تبدیل هذلولوی (hyperbolic) نام دارد. هر تبدیل هذلولوی $T\in PSL(۲,\mathbb{R})$ دارای دو نقطه ثابت جاذب و دافع در $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ است. ژئودزی روی $\mathcal{H}$ که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند محور (axis) تبدیل T نامیده می‌شود و آن را با $C(T)$ نمایش می‌دهیم. تبدیل T، ژئودزی $C(T)$ را به روی خودش می‌نگارد و $C(T)$ تنها ژئودزی با این خاصیت است. از آنجا که مشتق برابر با $T'(z)=(cz+d)^{-۱}$ است، طول اقلیدسی نقاط تحت این تبدیل ثابت می‌ماند اگر و تنها اگر $|cz+d|=۱$. به دایره $|cz+d|=۱$ دایره طولپای (isometric circle) گفته می‌شود. فاصله اقلیدسی نقاط داخل و خارج این دایره تحت T به ترتیب افزایش و کاهش می‌یابد و نقاط روی این دایره تنها نقاطی از نیم‌صفحه بالایی هستند که طول اقلیدسی و طول هذلولوی آنها تحت T ثابت می‌ماند. تبدیل هذلولوی با تبدیل $z\mapsto\lambda z$ مزدوج است که $|\lambda|\neq ۱$.

ب) اگر $|\mathrm{tr}|<2$ باشد تبدیل بیضوی (elliptic) نام دارد و دارای یک نقطه ثابت در داخل $\mathcal{H}$ است. این تبدیل با تبدیل $z\mapsto\lambda z$ مزدوج است. در این حالت $|\lambda|=۱$ است.

ج) اگر $|\mathrm{tr}|=2$ باشد تبدیل سهموی (parabolic) نام دارد. این تبدیل دارای یک نقطه ثابت در $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ است و با تبدیل $z\mapsto z+k$ که $k\in\mathbb{Z}$ مزدوج است.

مدل نیم صفحه بالایی بوسیله ایزومتری $f(z)=\frac{iz+۱}{z+i}$ به دیسک پوانکاره نگاشته می‌شود.

گروه همه ماتریسهای ۲×۲ با دترمینان ۱ که درایه‌های آن از $\mathbb{R}$ انتخاب می‌شود با $PSL(۲,\mathbb{R})$ نمایش داده می‌شود. زیرگروه‌های گسسته $PSL(۲,\mathbb{R})$، گروه فوکسی (Fuchsian group) نام دارند. به گروه همه تبدیلات چون

$$\left\{\frac{az+b}{cz+d}:\ a,b,c,d\in\mathbb{Z},\ ad-bc=۱\right\}$$

گروه مدولی (modular group) گفته می‌شود که زیرمجموعه‌ای از ایزومتری‌های حافظ جهت روی $\mathcal{H}$ در رابطه (۱) است. گروه مدولی با $PSL(۲,\mathbb{Z})$ یکریخت است [۴۹]. از آنجا که $PSL(۲,\mathbb{Z})$، یک زیر گروه گسسته از $PSL(۲,\mathbb{R})$ است؛ بنابراین، گروه مدولی یک گروه فوکسی است.

۱—۳ ناحیه اصلی

گروه G روی X بطور ناپیوسته (discontinuously) عمل می‌کند هرگاه مدار هیچ نقطه $x\in X$ دارای نقطه تجمعی در X نباشد.

فرض کنید X یک فضای متریک بوده و G گروه ایزومتری‌هایی باشد که به طور ناپیوسته روی X عمل می‌کنند. ناحیه بسته $F\subset X$ یک ناحیه اصلی (fundamental region) برای G است هرگاه

الف) $\bigcup_{T\in G} T(F) = X$،

ب) به ازای هر $T \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}$ داشته باشیم $F^\circ \cap T(F^\circ) = \emptyset$ که در اینجا نماد $\circ$، نماینده درون مجموعه است.

مجموعه $\partial F = F - F^\circ$ مرز F و مجموعه $\{T(F) : T \in G\}$ کاشی کاری (tesselation) X نامیده می‌شود.

قضیـــــه ۸.۱ هر گروه فوکسی دارای یک کاشی کاری همبند و محدب است [۴۶].

فرض کنید Γ یک گروه فوکسی دلخواه بوده و $p \in \mathcal{H}$ توسط هیچ عضوی از $\Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\}$ ثابت نماند. ناحیه دیریکله (Dirichlet region) برای گروه Γ با مرکز p به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_p(\Gamma) = \{z \in \mathcal{H} :\ \rho(z,p) \leq \rho(z, T(p)),\ \forall T \in \Gamma\}.$$

قضیـــــه ۹.۱ اگر p تحت هیچ عضوی از $\Gamma \setminus \{\mathrm{Id}\}$ ثابت نماند، آنگاه $D_p(\Gamma)$ یک ناحیه اصلی همبند برای Γ است.

یک گروه فوکسی هم فشرده (cocompact) نامیده می‌شود هرگاه فضای خارج قسمتی $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ فشرده باشد.

قضیـــــه ۱۰.۱ اگر گروه فوکسی Γ دارای ناحیه دیریکله فشرده باشد، آنگاه Γ دارای هیچ عضو سهموی نیست.

قضیـــــه ۱۱.۱ فرض کنید $\{T_i\}$ زیر مجموعه‌ای از Γ متشکل از اعضایی باشد که اضلاع یک ناحیه دیریکله ثابت را دو به دو به هم می‌نگارند. آنگاه $\{T_i\}$ یک مجموعه مولد برای Γ است.

قضیـــــه ۱۲.۱ (زیگل (Siegel) [۴۶]). اگر برای گروه Γ، مساحت $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ متناهی باشد آنگاه ناحیه دیریکله $F = D_p(\Gamma)$ دارای تعداد متناهی ضلع است.

قضیـــــه ۱۳.۱ فضای خارج قسمتی $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ یک گروه فوکسی چون Γ، فشرده است اگر و تنها اگرهر ناحیه دیریکله برای Γ فشرده باشد.

دو نقطه در $\mathcal{H}$ همنهشت (congruent) هستند هرگاه در یک $\Gamma-$مدار باشند. اگر دو نقطه در یک ناحیه اصلی همنهشت باشند آنگاه آن دو نقطه متعلق به مرز F هستند. فرض کنید F یک ناحیه دیریکله برای Γ باشد. رئوسی از F که با هم همنهشت هستند تشکیل یک دور (cycle) می‌دهند. اگر راس u توسط عضو بیضوی از Γ چون T_1 ثابت بماند آنگاه راس $v = T_2 u$ توسط عضو بیضوی از Γ چون $T_2 T_1 T_2^{-1}$ ثابت می‌ماند. به چنین دوری یک دور بیضوی و به این رئوس، رئوس بیضوی (elliptic vertices)، و به نقطه

متناظر با این رئوس روی $\Gamma\backslash\mathcal{H}$، نقطه بیضوی (elliptic point) گفته می‌شود. تعداد دورهای بیضوی با تعداد رئوس غیرهمنهشت در F برابر است. اگر راس u توسط T_1 ثابت بماند و $T_1^n F = F$، در آنصورت n، مرتبه (order) راس بیضوی u و نقطه بیضوی متناظر با u روی $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ نامیده می‌شود. اگر راس u از F توسط تبدیل سهموی از Γ ثابت بماند آنگاه u، راس سهموی (parabolic vertex) و نقطه سهموی متناظر با u در $\Gamma\backslash\mathcal{H}$، نقطه سهموی (parabolic point) با مرتبه ∞ نام دارد. به مجموعه رئوس و نقاط بیضوی و سهموی به ترتیب رئوس و نقاط انشعاب (ramification) نیز گفته می‌شود و مرتبه آنها، عدد انشعاب (ramification number) نام دارد.

اگر برای گروه فوکسی Γ، $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ یک g-گونا با r نقطه انشعاب با مرتبه m_1 تا m_r باشد که $1 < m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_r \leq \infty$، آنگاه گوییم Γ دارای نشانِ $(g;\, m_1, \cdots, m_r)$ است.

قضیه ۱۴.۱ فرض کنید برای گروه فوکسی Γ، $\Gamma\backslash\mathcal{H}$ دارای نشانِ $(g;\, r,\, m_1, \cdots, m_r)$ باشد. فرض کنید همه نقاط انشعاب بیضوی باشند. آنگاه

$$\mu(\Gamma\backslash\mathcal{H}) = 2\pi \left[(2g-2) + \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right)\right]$$

که μ مساحت هذلولوی است.

قضیه ۱۵.۱ (پوانکاره (Poincare)). فرض کنید $g \geq 0$، $r \geq 0$ و $1 < m_1 \leq m_2 \leq \cdots \leq m_r <$ ∞. اگر

$$(2g-2) + \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 0,$$

آنگاه یک گروه فوکسی با نشانِ $(g;\, r,\, m_1, \cdots, m_r)$ موجود است.

نگاشت $f : X \to Y$ کانفرمال (conformal) است اگر حافظ جهت و اندازه زوایای بین بردارها باشد. اگر U زیرمجموعه بازی از صفحه مختلط باشد آنگاه نگاشت $f : U \to \mathbb{C}$ کانفرمال است اگر و تنها اگر تحلیلی بوده و مشتق آن همه جا روی U غیرصفر باشد.

سطح ریمانی (Riemann surface) X یک منیفلد مختلط با بعد مختلط ۱ است. یعنی، X یک فضای توپولوژیک هاسدورف با یک اطلس است. بنابراین برای هر $x \in X$، همسایگی شامل x، هلومورفیک با نیم صفحه بالایی است. همچنین نگاشت گذر بین دو چارت اطلس این منیفلد که دامنه‌های آنها با هم اشتراک دارند باید هلومورفیک باشد. (نگاشتهایی که ساختار صفحه مختلط را به منیفلد منتقل می‌کنند چارت نامیده می‌شوند.)

۱ــ۴ شار ژئودزیکی

شار ژئودزیکی (geodesic flow) $\{\tilde{\varphi}^t\}$ روی $\mathcal{H}$ از عمل $\mathbb{R}$ روی بردارهای یکه $T^1\mathcal{H}$ بدست می‌آید. بدین ترتیب که اگر $v \in T^1\mathcal{H}$ و γ_v ژئودزیکی باشد که v بر آن مماس است، آنگاه $\tilde{\varphi}^{t_0}(v)$ برداری چون

$w_{t_\circ} \in T^\text{۱}\mathcal{H}$ است بطوریکه $w_s \in T^\text{۱}\mathcal{H}$، $\circ \leq s \leq t_\circ$ و مماس بر γ_v باشد. فضای $T^\text{۱}\mathcal{H}$ با فضای $PSL(\text{۲},\mathbb{R})$ یکریخت است یعنی اگر $(z,v) \in T^\text{۱}\mathcal{H}$ باشد، آنگاه تبدیل یکتای $g \in PSL(\text{۲},\mathbb{R})$ موجود است به قسمی که $z = g(i)$ و $v = g'(z)\imath$ که $\imath$ بردار یکه مماس بر محور موهومی و در جهت مثبت است [۴۹]. قرار دهید $M = \Gamma\backslash\mathcal{H}$. شار ژئودزیکی $\{\tilde{\varphi}^t\}$ روی $\mathcal{H}$ توسط نگاشت تصویری $\pi : T^\text{۱}\mathcal{H} \to T^\text{۱}M$ به شار ژئودزیکی $\{\varphi^t\}$ روی $T^\text{۱}\Gamma\backslash\mathcal{H}$ تصویر می‌شود.