بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی گرایش محض

تحلیل تزریقی گرنشتاین و تحلیل یکدست گرنشتاین مدول ها روی حلقه های گرنشتاین

استاد راهنما :
دکتر رضا انشایی

پژوهشگر :
رویا امامی

مهر ماه ۱۳۸۶

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش محض خانم رویا امامی

تحت عنوان:

تحلیل تزریقی گرنشتاین و تحلیل یکدست گرنشتاین مدول ها روی حلقه های گرنشتاین

در تاریخ ۸۶/۷/۲۸ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....بسیار خوب...... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکتر رضا انشایی با مرتبه علمی استادیار امضاء

۲- استاد داور داخل گروه دکتر ملیحه یوسف زاده با مرتبه علمی استادیار امضاء

۳- استاد داور خارج گروه دکتر جواد اسدالهی با مرتبه علمی دانشیار امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

سپاسگذاری

سپاس و شکر خداوند مهربان که مرا از دریای لطف و کرم خویش بهره مند ساخت تا امکان به پایان رساندن فصل دیگری از زندگی دانشجوئیم با همت و یاری استادان گرامی ودوستان بزرگوار فراهم گردد.

در ابتدا از استاد بزرگوار و ارجمندم جناب آقای دکتر رضا انشایی سپاسگزاری می نمایم. اگر چه می دانم که توانایی ادای دین و جبران این زحمات را نخواهم داشت. ولی با فروتنی بسیار این زحمات و کمک ها را سپاس داشته و از خداوند بزرگ سلامتی بهروزی و کامیابی ایشان را خواهانم .

همچنبن بر خود واجب می دانم از زحمات و راهنمایی های اساتید ارجمندم آقایان دکتر شکرالله سالاریان و دکتر جواد اسدالهی تشکر و قدر دانی کنم.

همچنین از سرکار خانم فرهمند که در تهیه منابع این رساله بسیار مرا یاری دادند قدردانی می کنم و برای ایشان خواهان سلامتی و توفیق روز افزون می باشم.

در خاتمه لازم می دانم از دوستانم تشکر و قدر دانی کنم و برای آنها آرزوی موفقیت و کامیابی دارم .

تقدیم به

آنان که دوستشان دارم و در مسیر زندگی همراهیم و با شبنمی از محبت معشوق ازلی بر بال زیبای تفکر به پرواز در می آییم.

چکیده

فرض کنید R یک حلقه ی جابجایی، یکدار و نوتری و همه ی R- مدول ها یکانی باشند. در جبر همولوژی کلاسیک، بعد های گرنشتاین از مفاهیم اساسی می باشند. از مهمترین پایا ها، بعد تصویری برای R- مدول ها ست. در سال ۱۹۶۹ اسلاندر و بریدگر[۱]، بعد گرنشتاین که با (G-dim) نشان داده می شود را روی مدول هایی با تولید متناهی تعریف کردند و به این نتیجه رسیدند که همان گونه که بعد تصویری با منظم پذیری R، در ارتباط است، بعد گرنشتاین با خاصیت گرنشتاین بودن حلقه رابطه دارد. هم چنین مدول های با بعد گرنشتاین صفر در بسیاری از خواص با مدول های تصویری با تولید متناهی، مشترک اند، بنابراین این مدول ها تصویری گرنشتاین نامیده شدند. ایناکس و جندا[2] در سال ۱۹۹۶ مدول های تصویری گرنشتاین، یکدست گرنشتاین و تزریقی گرنشتاین و بعد های همولوژی مرتبط با آن ها را تعریف کردند. آن ها ثابت کردند که در واقع برای مدول های با تولید متناهی، بعد تصویری گرنشتاین با بعد گرنشتاین اسلاندر یکسان است. پایا های معرفی شده توسط ایناکس و جندا تعمیمی از بعد های معمولی، یعنی بعد تصویری، یکدست و تزریقی است. مشخصه های زیادی از حلقه های گرنشتاین از لحاظ بعد های همولوژیکی مدول هایشان وجود دارند. به عنوان مثال ایناکس و جندا با در نظر گرفتن حلقه ی گرنشتاین، نتایج جالبی برای بعد های تصویری گرنشتاین، تزریقی گرنشتاین و یکدست گرنشتاین به دست آوردند. ما در این پایان نامه، با استفاده از بعد های تزریقی گرنشتاین و یکدست گرنشتاین، حلقه های گرنشتاین را توصیف می کنیم. همچنین توصیف هایی از مدول های تزریقی گرنشتاین، روی حلقه های گرنشتاین از لحاظ تحلیل های یکدست گرنشتاین آن ها و نیز مشخصه هایی از مدول های یکدست گرنشتاین، از لحاظ تحلیل های تزریقی گرنشتاین، ارائه می کنیم.

کلید واژه : تزریقی گرنشتاین، تصویری گرنشتاین، حلقه ی گرنشتاین، یکدست گرنشتاین.

---

1 Auslander, Bridger

2 Enochs , Jenda

فهرست مطالب

پیشگفتار

بعد های گرنشتاین اولین بار در سال ۱۹۶۹ توسط اسلاندرو بریدگر روی مدول‌ها ی با تولید متناهی معرفی شدند [۲]. از آن تاریخ به بعد تلاش های زیادی برای تعریف بعدهای گرنشتاین روی مدول‌ها یی که با تولید متناهی نیستند، صورت گرفت. ایناکس و جندا در سال ۱۹۹۶ مفهوم مدول‌های گرنشتاین و نیز بعدهای گرنشتاین روی مدول هایی که با تولید متناهی نیستند را بیان کردند و به این نتیجه رسیدند که این پایاها تعمیمی از بعدهای معمولی یعنی بعد تزریقی و تصویری و یکدست می باشند [۶]. همچنین با استفاده از هم ارزی فاکسبی [۱]. برای بعد تصویری، تزریقی و یکدست گرنشتاین روی حلقه های کوهن - مکالی نتایج جالبی توسط ایناکس و همکاران در سال ۱۹۹۶ [۹:۱۹۹۶]، فاکسبی در سال ۱۹۹۴ [۱۰] و آورامو [۲] و فاکسبی در سال ۱۹۹۷ [۳] مطرح شده است.

این پایان نامه در ۴ فصل تنظیم شده است.

فصل اوّل

شامل تعاریف و قضیه‌های مقدماتی است که در ۲ بخش تنظیم شده است. در بخش اوّل مطالب جبری مورد نیاز، تعاریف و قضایای مقدماتی در باره‌ی حلقه‌ها، ضرب تانسوری و مدول‌های تزریقی، تصویری و یکدست آمده است که در این بخش از منابع [۱۶]، [۱۳] و [۸] استفاده شده است. در بخش دوّم تعاریف و قضایای مقدماتی در مورد جبر همولوژی، مفاهیم و قضایای مرتبط با Ext و Tor و نیز مفاهیم بعدهای

---

[۱] Foxby

[۲] Avramov

همولوژی بیان شده است که در این بخش نیز از منابع ۱٦| و ۸| استفاده شده است.

فصل دوّم

این فصل در ۲ بخش تنظیم شده است. در بخش اوّل این فصل، یادآوری هایی از مدول‌های گرنشتاین (یکدست، تصویری و تزریقی گرنشتاین) و بعد های همولوژی مرتبط با آن‌ها و نیز برخی قضایای مرتبط صورت گرفته است. در این بخش از منابع ۸|، ۱۱|، ۴|، و ۵| استفاده شده است. در بخش دیگر این فصل به بیان و اثبات چند لم و قضیه‌ی مهم پرداخته شده است که در اثبات بسیاری از قضایای مهم این پایان نامه نقش مهم و اساسی دارند. همچنین در این بخش از منابع ۱|، ۱۱| و ۱۲| استفاده شده است.

فصل سوم

این فصل یکی از مهمترین فصول این پایان نامه می باشد که تنها در یک بخش تنظیم گردیده است. در ابتدای این فصل به یاد آوری چند لم و قضیه‌ی اساسی پرداخته شده است. در اولین قضیه‌ی مهم این فصل ثابت شده است که هر حلقه‌ی کوهن - مکالی از بعد تزریقی گرنشتاین متناهی، گرنشتاین می باشد. این قضیه در اثبات بسیاری از قضایای دیگر این پایان نامه نقش مهم و اساسی دارد. همچنین در این فصل با ارائه لم‌ها و قضایایی، ثابت شده است که مدول‌های یکدست گرنشتاین روی حلقه‌های گرنشتاین، دارای تحلیل های تزریقی گرنشتاین با ساختار خاصی می باشند. در این فصل از منابع ۴|، ۱۰|، ۱۵| و ۱۱| استفاده شده است.

فصل چهارم

این فصل به عنوان آخرین فصل به بررسی و اثبات برخی نتایج مرتبط با تحلیل های یکدست گرنشتاین مدول‌ها روی حلقه‌های گرنشتاین پرداخته است. قضیه‌ی ۱۰.۴ یکی از مهمترین قضایای این فصل می باشد. در این بخش نیز از منابع [۱]، [۱۱] و [۷] استفاده شده است.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱–۱ تعاریف و قضایای مورد نیاز جبری

در این بخش برخی تعاریف و قضایای مقدماتی جبری را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۱ . فرض کنید R یک حلقه باشد. یک R – مدول (چپ)، گروهی آبلی و جمعی مانند A است همراه با تابعی مانند $R \times A \longrightarrow A$ (نقش (r, a) با ra نشان داده می‌شود) به طوری که به ازای هر $r, s \in R$ و $a, b \in A$،

(یک) $r(a+b) = ra + rb$،

(دو) $(r+s)a = ra + sa$،

(سه) $r(sa) = (rs)a$.

هرگاه R یکدار باشد و

(چهار) به ازای هر $a \in A$، $a1_R = 1_R a = a$،

دراین صورت گوییم A یک $R-$ مدول یکانی است. به همین نحو، یک $R-$ مدول راست (یکانی) نیز با تابعی چون $A \times R \longrightarrow A$ تعریف می‌شود که به ازای هر $a \in A$ و $r \in R$، با $(a,r) \longmapsto ar$ نشان داده می‌شود که در خواص متناظر با (یک) تا (چهار) صدق می‌کند. هر مدول A روی حلقه‌ی جابجایی R، هم مدول چپ است و هم مدول راست، که در آن به ازای هر $a \in A$ و $r \in R$، $ar = ra$ (مگر آن که خلافش تصریح شود.)

تعریف ۲.۱ . فرض کنید R یک حلقه و A یک $R-$ مدول باشد. زیر مجموعه‌ی ناتهی B یک زیر مدول A است، مشروط بر این که B یک زیر گروه جمعی A باشد وبه ازای هر $b \in B$ و $r \in R$، $rb \in B$.

تعریف ۳.۱ . فرض کنید A و B مدول‌هایی روی حلقه‌ی R باشند. تابع $f : A \longrightarrow B$ یک همریختی $R-$ مدولی است مشروط بر این که به ازای هر $a, c \in A$ و $r \in R$،

$$f(ra) = rf(a) \qquad , \qquad f(a+c) = f(a) + f(c).$$

تعریف ۴.۱ . دنباله‌ای از $R-$ مدول‌ها و $R-$ همریختی های

$$\cdots \longrightarrow M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_0 \xrightarrow{\varphi_0} M_{-1} \xrightarrow{\varphi_{-1}} M_{-2} \longrightarrow \cdots$$

را دقیق گوییم هرگاه $Im\varphi_{i+1} = Ker\varphi_i$ باشد.

تعریف ۵.۱ . فرض کنید A، B و C، R — مدول و $\psi : B \to C$ و $\varphi : A \to B$ همریختی‌های R — مدولی باشند، در این صورت اگر دنباله‌ی

$$\circ \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow \circ$$

دقیق باشد، آن را یک دنباله‌ی دقیق کوتاه گوییم.

تعریف ۶.۱ . فرض کنید $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ رسته‌ی مدول‌ها باشد. تابعگون هموردا $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ دقیق چپ است هر گاه برای هر دنباله دقیق کوتاه

$$\circ \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

در رسته $\mathcal{C}$، دنباله

$$\circ \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

در رسته $\mathcal{D}$، دقیق باشد. تابعگون F دقیق راست است، هرگاه برای هر دنباله دقیق کوتاه

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \circ$$

در رسته $\mathcal{C}$، دنباله

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow \circ$$

دقیق باشد. حال اگر تابعگون F پادورد باشد، گوییم F، دقیق چپ است هرگاه برای هر دنباله‌ی دقیق کوتاه

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \circ$$

در رسته‌ی $\mathcal{C}$، دنباله‌ی

$$0 \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A)$$

دقیق باشد و دقیق راست است هرگاه برای هر دنباله‌ی دقیق

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C$$

در رسته $\mathcal{C}$، دنباله‌ی

$$F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A) \longrightarrow 0$$

دقیق باشد. اگر تابعگون F دقیق راست و چپ باشد، آن را دقیق گوییم.

قضیه ۷.۱ . (لم پنج کوتاه) فرض کنید

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 & \xrightarrow{f_2} & A_3 & \xrightarrow{f_3} & A_4 & \xrightarrow{f_4} & A_5 \\
{\scriptstyle t_1}\downarrow & & {\scriptstyle t_2}\downarrow & & {\scriptstyle t_3}\downarrow & & {\scriptstyle t_4}\downarrow & & {\scriptstyle t_5}\downarrow \\
B_1 & \xrightarrow{h_1} & B_2 & \xrightarrow{h_2} & B_3 & \xrightarrow{h_3} & B_4 & \xrightarrow{h_4} & B_5
\end{array}$$

نمودار جابجایی از R − مدول‌ها و R − همریختی های مدولی باشد، با این ویژگی که هر دو سطر آن دنباله‌ی دقیق باشند.در این صورت

(یک) اگر t_2, t_4 بروریختی و t_5 تکریختی باشند، t_3 نیز بروریختی است.

(دو) اگر t_2, t_4 تکریختی و t_1 بروریختی باشند، t_3 نیز تکریختی است.

(سه) اگر t_1, t_2 و t_5 یکریختی باشند، t_3 نیز یکریختی است.

اثبات . به لم ۳.۳۲ از [۱۶] رجوع کنید.■

تعریف ۸.۱ . دنباله دقیق کوتاه $\circ \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \circ$ شکافنده نامیده می شود، هر گاه Imf، جمعوند مستقیمی از B باشد.

قضیه **۹.۱** . فرض کنید B, A و C، R − مدول باشند. اگر

$$\circ \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \circ$$

دنباله‌ی دقیق کوتاه باشد، شرایط زیر معادل‌اند:

(یک) دنباله دقیق شکافنده است.

(دو) همریختی R − مدولی $f' : B \longrightarrow A$ موجود است که $f'f = 1_A$،

(سه) همریختی R − مدولی $g' : C \longrightarrow B$ موجود است که $gg' = 1_C$.

اثبات . به قضیه‌ی ۱۵.۲.۱ از [۸] رجوع کنید. ■

تعریف ۱۰.۱ . مدول F را روی حلقه R آزاد گوییم، هر گاه دارای یک پایه باشد.

قضیه **۱۱.۱** . فرض کنید R حلقه‌ای یکدار باشد. برای R − مدول یکانی F شرایط زیر معادل‌اند:

(یک) F دارای پایه‌ای ناتهی است،

(دو) F مجموع مستقیم داخلی خانواده‌ای از R − مدول‌های دوری است که هر یک به عنوان R − مدول چپ با R یکریخت است،

(سه) F به عنوان یک R − مدول با مجموع مستقیم نسخه‌هایی از R − مدول چپ R یکریخت است،

(چهار) مجموعه‌ی ناتهی X و تابع $i : X \longrightarrow F$ با خاصیت زیر وجود دارد. به ازای هر

R — مدول یکانی A و تابع $f : X \longrightarrow A$ همریختی R — مدولی منحصر به فردی مانند $\overline{f} : F \longrightarrow A$ وجود دارد به طوری که $\overline{f}i = f$.

اثبات . به قضیه‌ی ۱.۲ از [۱۳] رجوع کنید. ■

تعریف ۱۲.۱ . مدول P را روی حلقه‌ی R تصویری گوییم، اگر به ازای هر نمودار

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

از همریختی‌های R — مدولی که سطر پایینِ آن دقیق باشد (یعنی g برروریختی باشد)، یک همریختی R — مدولی مانند $h : P \longrightarrow A$ وجود داشته باشد، به‌طوری که نمودار

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "h"'] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

جابجایی باشد (یعنی $gh = f$).

قضیه ۱۳.۱ . شرایط زیر برای R — مدول P معادل‌اند:

(یک) P، R — مدولی تصویری است.

(دو) $Hom_R(P, -)$ دقیق راست است.

(سه) دنباله دقیق کوتاه $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$ شکافنده است.

(چهار) P، جمعوند مستقیمی ازیک R — مدول آزاد است.

اثبات . به قضیه‌ی ۲.۱.۲ از [۸] رجوع کنید. ■

گزاره ۱۴.۱ . اگر M یک R — مدول روی حلقه‌ی جابجایی ویکدار R باشد، در این صورت M و $\mathrm{Hom}_R(R,M)$ به عنوان دو R — مدول یکریختند.

اثبات . به گزاره ۵.۲.۱ از [۸] رجوع کنید. ■

قضیه ۱۵.۱ . فرض کنید B و $\{A_i : i \in I\}$، مدول‌ها یی روی حلقه‌ی R باشند، در این صورت یکریختی های $\mathbb{Z}$ — مدولی زیر وجود دارند،

(یک) $\mathrm{Hom}_R(B,\prod_{i\in I} A_i) \cong \prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(B,A_i)$، که در این جا منظور از $\prod_{i\in I} A_i$، حاصل ضرب خانواده‌ی R — مدول‌های A_i است.

(دو) $\mathrm{Hom}_R(\bigoplus_{i\in I} A_i, B) \cong \prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(A_i,B)$، که در این جا منظور از $\bigoplus_{i\in I} A_i$، حاصل جمع مستقیم خانواده‌ی R — مدول‌های A_i است.

اثبات . به گزاره‌ی ۶.۲.۱ و ۷.۲.۱ از [۸] رجوع کنید.■

تذکر ۱۶.۱ . اگر $\{A_i : i \in I\}$، خانواده ای از R — مدول‌هایی روی حلقه‌ی R باشد و مجموعه‌ی اندیس I متناهی باشد، آن‌گاه $\prod_{i\in I} A_i = \coprod_{i\in I} A_i$.

گزاره ۱۷.۱ . هر گاه R حلقه‌ی یکدار و A یک R — مدول راست و B یک R — مدول چپ یکانی باشند، آن گاه یکریختی های R — مدولی زیر وجود دارند،

$$A \otimes_R R \cong A \qquad , \qquad R \otimes_R B \cong B.$$

اثبات . به گزاره ۲۱.۲.۱ از [۸] رجوع کنید.■

گزاره ۱۸.۱ . فرض کنید R یک حلقه و A، $\{A_i : i \in I\}$ خانواده‌ای از R — مدول‌های راست و B، $\{B_i : i \in I\}$ خانواده‌ای از R — مدول‌های چپ باشد. در این

صورت یکریختی های $\mathbb{Z}$ – مدولی زیر وجود دارند:

$$(\coprod_{i\in I} A_i)\otimes_R B \cong \coprod_{i\in I}(A_i\otimes_R B) \quad , \quad A\otimes_R (\coprod_{i\in I} B_i)\cong \coprod_{i\in I}(A\otimes_R B_i)$$

اثبات . به گزاره ۲۲.۲.۱ از [۸] رجوع کنید.■

قضیه ۱۹.۱ . (یکریختی الحاقی) فرض کنید R و S دو حلقه باشند و A یک R – مدول چپ، ${}_SB_R$ یک (دو) مدول و C، یک S – مدول راست باشد. در این صورت یکریختی زیر از $\mathbb{Z}$ – مدول‌ها وجود دارد:

$$\tau : \mathrm{Hom}_S(B\otimes_R A, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C))$$

همچنین برای حالت $(A_R, {}_RB_S, C_S)$ یکریختی زیر موجود است:

$$\tau' : \mathrm{Hom}_S(A\otimes_R B, C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)).$$

اثبات . به قضیه‌ی ۱۰.۱.۲ از [۸] رجوع کنید.■

تعریف ۲۰.۱ . R – مدول راست N را یکدست نامیم، اگر به ازای هر دنباله‌ی دقیق کوتاه از R – مدول‌ها مانند

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

دنباله‌ی

$$0 \longrightarrow N\otimes_R A \longrightarrow N\otimes_R B \longrightarrow N\otimes_R C \longrightarrow 0$$

یک دنباله‌ی دقیق کوتاه از $\mathbb{Z}$ – مدول‌ها باشد. به همین صورت یکدست بودن را برای R – مدول چپ M، تعریف می‌کنیم.