چکیده

نام خانوادگی: نوروزی **نام:** اکرم
عنوان پایان‌نامه: بعد کرول توپولوژیکی
استاد راهنما: دکتر نسرین شیرعلی **استاد مشاور:** دکتر امیدعلی شهنی کرم‌زاده
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی محض **گرایش:** جبر **محل تحصیل:** دانشگاه شهید چمران اهواز **دانشکده:** علوم ریاضی و کامپیوتر **تاریخ فارغ التحصیلی:** ۸۹/۰۹/۲۹ **تعداد صفحات:** ۱۲۵
واژه‌های کلیدی: بعد گلدی، بعد کرول، بعد نویتری، مدول بحرانی، همسایگی‌های صفر، مدول توپولوژی، رادیکال بئر، ایدال پوچ‌توان، زیرمدول بسته.
چکیده: این پایان‌نامه بر اساس مقاله‌های [۲۰]، [۱۸] و [۱۳] می‌باشد و در سه فصل تنظیم شده است. در این پایان‌نامه به بررسی بعد کرول توپولوژیکی مدول‌های توپولوژی می‌پردازیم. بعد کرول مجموعه همه‌ی زیرمدول‌های بسته از یک مدول، بعد کرول توپولوژیکی نامیده می‌شود. در حالت کلی، ممکن است که یک مدول دارای بعد کرول توپولوژیکی باشد، اما بعد کرول نداشته باشد. می‌دانیم که هر مدول با بعد کرول، بعد گلدی متناهی دارد، اما اگر یک مدول بعد کرول توپولوژیکی داشته باشد، لزوما بعد گلدی متناهی ندارد. سپس مدول‌های بحرانی توپولوژی و بعد نویتری توپولوژیکی را تعریف کرده و قضایای مربوط به آن‌ها را بیان می‌کنیم. هم‌چنین حالت توپولوژیکی لم لنگان را بیان می‌کنیم و به بررسی PI-حلقه‌های دارای مدول‌های با بعد کرول توپولوژیکی می‌پردازیم و خواص رادیکال بئر حلقه‌های با بعد کرول توپولوژیکی را بیان می‌کنیم.

فهرست مطالب

پیشگفتار

مفهوم بعد کرول R-مدول‌ها، یکی از ابزارهای اساسی نظریه‌ی حلقه‌های راست نویتری است که اولین بار توسط ریچلر و گابریل برای اعداد طبیعی تعریف شد و سپس توسط کراس برای هر عدد ترتیبی α تعمیم داده شد و به طور اصولی مورد مطالعه‌ی گاردن و رابسون قرار گرفت. دوگان این بعد که اندازه‌ای برای دوری R-مدول‌ها از نویتری بودن می‌باشد، اولین بار توسط دکتر کرم‌زاده، بعد نویتری نامیده شد و به طور وسیعی توسط وی و لمونیه مورد مطالعه قرار گرفت.

در این پایان‌نامه بعد کرول توپولوژیکی مدول‌های توپولوژی و خواص رادیکال بئر مدول‌هایی که دارای بعد کرول توپولوژیکی هستند را که در سال‌های ۲۰۰۴ و ۲۰۰۵ توسط V. V. Tenzina در ۲ مقاله‌ی [۲۰] و [۱۸] بیان شده است و هم‌چنین مقاله‌ی [۱۳] از V. T. Markov را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

این پایان‌نامه در سه فصل تنظیم شده است. در فصل اول ابتدا مفاهیم، تعاریف و قضایای اولیه را بیان می‌کنیم و به صورت کامل به بررسی حلقه‌ها، مدول‌ها و گروه‌های توپولوژی و هم‌چنین همسایگی‌های صفر می‌پردازیم.

در فصل دوم بعد گلدی، بعد کرول، مدول‌های بحرانی و بعد نویتری مدول‌ها را تعریف کرده و قضایای مربوط به آن‌ها را بیان می‌کنیم. هم‌چنین به بررسی مدول‌های α-اتمی که تعمیمی از مدول‌های ۱-اتمی بوده و دوگان مدول‌های α-بحرانی‌اند، می‌پردازیم.

فصل سوم این پایان‌نامه شامل ۷ بخش است. در بخش اول بعد کرول توپولوژیکی مدول‌ها را بررسی می‌کنیم و تمامی قضایای مربوط به بعد کرول مدول‌ها را برای بعد کرول توپولوژیکی مدول‌های توپولوژی بیان می‌کنیم. توجه می‌کنیم که اگر یک مدول بعد کرول داشته باشد، بعد کرول توپولوژیکی نیز دارد. اما در حالت کلی، ممکن است یک مدول بعد کرول توپولوژیکی داشته باشد ولی این مدول، بعد کرول نداشته باشد. برای مثال، حلقه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ (با توپولوژی معمولی) به عنوان یک $\mathbb{Z}$-مدول بعد کرول ندارد، اما دارای بعد کرول توپولوژیکی است.

در بخش دوم مدول‌های بحرانی توپولوژی، مدول‌های اتمی توپولوژی و بعد نویتری توپولوژیکی را بررسی می‌کنیم.

در بخش سوم نشان می‌دهیم که اگر یک مدول بعد کرول توپولوژیکی داشته باشد، الزاما بعد گلدی متناهی ندارد و مثالی از مدولی با بعد کرول توپولوژیکی ارائه می‌کنیم که شامل یک مجموع مستقیم نامتناهی از زیرمدول‌های بسته می‌باشد. در بخش چهارم یک توپولوژی روی حلقه‌ی $R[x]$ با بعد کرول توپولوژیکی راست، تعریف می‌کنیم و نشان می‌دهیم که در این صورت حلقه‌ی R نویتری توپولوژی از راست است. در بخش پنجم حالت توپولوژیکی لم لنگان را بیان می‌کنیم و در بخش ششم PI-حلقه‌هایی که دارای مدول‌های با بعد کرول توپولوژیکی هستند را

بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اگر یک مجموعه‌ی مرتب خطی بعد نویتری متناهی داشته باشد، یک دنباله‌ی هم‌پایان در آن وجود دارد. مارکف در مقاله‌ی [۱۲] ثابت می‌کند که رادیکال بئر از یک PI-حلقه که دارای یک مدول وفادار با بعد کرول است، یک ایدال پوچ‌توان می‌باشد. ما در این بخش حالت توپولوژیکی آن را بیان می‌کنیم. در بخش پایانی به بررسی خواص رادیکال بئر حلقه‌های با بعد کرول توپولوژیکی می‌پردازیم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱.۱ نظریه مجموعه‌ها

تعریف ۱.۱.۱. *رابطه $\leq$ را که در مجموعه ناتهی A تعریف شده است، یک ترتیب جزئی می‌نامیم، هرگاه شرایط زیر به ازای هر $a, b, c \in A$ برقرار باشند*

۱. $a \leq a$ (*خاصیت بازتابی*).

۲. *اگر* $a \leq b$ *و* $b \leq a$*، آن‌گاه* $a = b$ (*خاصیت پادتقارنی*).

۳. *اگر* $a \leq b$ *و* $b \leq c$*، آن‌گاه* $a \leq c$ (*خاصیت ترایایی*).

اگر $\leq$ یک رابطه‌ی ترتیب جزئی در A باشد، می‌گوییم A تحت $\leq$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب است، هم‌چنین رابطه‌ی $\leq$ در مجموعه‌ی ناتهی A را یک ترتیب کلی می‌نامیم، هرگاه برای هر دو عنصر $a, b \in A$ یکی از دو رابطه‌ی $a \leq b$ و $b \leq a$ برقرار باشد. اگر $\leq$ یک ترتیب کلی در A باشد، می‌گوییم A تحت $\leq$ یک مجموعه‌ی کاملا مرتب است. مجموعه‌ی مرتب A با ترتیب $\leq$ را به شکل $(A, \leq)$ می‌نویسیم.

تعریف ۲.۱.۱. *اصل خوش ترتیبی:*
هر زیر مجموعه‌ی ناتهی A در X دارای کوچک‌ترین عضو است. یعنی

$$\exists\, a \in A,\ \forall x \in A \quad a \leq x$$

تعریف ۳.۱.۱. عناصر $a, b \in A$ را قابل مقایسه گوییم، اگر $a \leq b$ یا $b \leq a$.

تعریف ۴.۱.۱. فرض می‌کنیم $(A, \leq)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. $F \subset A$ را یک زنجیر می‌نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in F$ داشته باشیم $a \leq b$ یا $b \leq a$.

لم ۵.۱.۱. (تسورن) فرض می‌کنیم $(A, \leq)$ یک مجموعه‌ی جزئاً مرتب باشد. اگر هر زنجیر در A کران بالا داشته باشد، آن‌گاه A حاوی دست کم یک عنصر ماکسیمال است و اگر هر زنجیر در A کران پایین داشته باشد، آن‌گاه A حاوی دست کم یک عنصر مینیمال است.

برهان: به [۴] صفحه‌ی ۱۵۱، مراجعه شود.

تعریف ۶.۱.۱. دو مجموعه A و B را هم‌توان (هم‌عدد) می‌نامیم و می‌نویسیم $A \sim B$، هرگاه بین A و B یک تناظر یک به یک $f : A \longrightarrow B$ وجود داشته باشد.

تعریف ۷.۱.۱. می‌گوییم دو مجموعه‌ی خوش ترتیب $(A, \leq)$ و $(B, \leq')$ هم‌ریخت ترتیبی هستند، هرگاه یک تابع دوسویی مانند $f : A \longrightarrow B$ وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $a_1, a_2 \in A$ و $a_1 \leq a_2$ داشته باشیم: $f(a_1) \leq' f(a_2)$. تابع f را یک هم‌ریختی ترتیبی می‌نامیم. اگر دو مجموعه‌ی $(A, \leq)$ و $(B, \leq')$ هم‌ریخت ترتیبی باشند، می‌نویسیم $(A, \leq) \approx (B, \leq')$ و یا به طور ساده $A \approx B$.

تعریف ۸.۱.۱. اعداد ترتیبی را معمولا با حروف یونانی α و β و γ نشان می‌دهیم.
α را یک عدد ترتیبی می‌گوییم، اگر α یک مجموعه‌ی خوش ترتیب باشد و برای هر $x \in \alpha$ داشته باشیم

$$S(x) = \{y \in \alpha : y < x\} = x$$

مثال ۹.۱.۱. هر عدد طبیعی مانند n یک عدد ترتیبی است. زیرا برای هر $m \in n$،

$$S(m) = \{0, 1, 2, \dots, m-1\} = m$$

و ω کوچک‌ترین عدد ترتیبی نامتناهی است، زیرا به ازای هر $n \in \omega$، $S(n) = n$ است.

توجه: برای هر $x \in \alpha$، تعریف می‌کنیم $x < \alpha$.

خواص اعداد ترتیبی

لم ۱۰.۱.۱. *هر عنصر یک عدد ترتیبی، یک عدد ترتیبی است.*

برهان: واضح است که $y < \alpha$، خوش تعریف است. حال باید نشان دهیم که

$$\forall\, x \in y,\, y < \alpha \quad \Rightarrow \quad S(x) = \{t \in y : t < x\} = x$$

اما می‌دانیم که α یک عدد ترتیبی است، پس $S'(x) = \{t \in \alpha : t < x\} = x$ و از طرفی

$$S'(x) = \{t \in \alpha : t < x < y\} = \{t \in \alpha : t < y, t \in y\}$$

$$\Rightarrow x = S'(x) = \{t \in y : t < x\}. \bullet$$

لم ۱۱.۱.۱. *اگر α و β دو عدد ترتیبی باشند و $\alpha \sim \beta$، آن‌گاه $\alpha = \beta$ است.*

برهان: اگر $\alpha \sim \beta$ آن‌گاه یک تابع دوسویی مانند f وجود دارد، که

$$\begin{cases} f : \alpha \longrightarrow \beta \\ x \leq x' \iff f(x) \leq f(x') \quad \forall x, x' \in \alpha \end{cases}$$

کافی است، ثابت کنیم که برای هر $x \in \alpha$، $f(x) = x$ می‌باشد (به عبارت دیگر $f(\alpha) = \alpha = \beta$). فرض (خلف) می‌کنیم عضوی مانند x در α وجود دارد که $f(x) \neq x$. قرار می‌دهیم

$$A = \{x \in \alpha : x \neq f(x)\}$$

چون α یک مجموعه‌ی خوش ترتیب است و $A \subseteq \alpha$، پس A نیز چنین است. فرض کنیم $x_0 \in A$ کوچک‌ترین عضو در A باشد، پس $f(x_0) \neq x_0$. از طرفی به ازای هر $y \in S(x_0)$، $y < x_0$ و بنا به انتخاب x_0، $y \notin A$ و $f(y) = y$. بنابراین $f(S(x_0)) = S(x_0)$. اما x_0 یک عدد ترتیبی است، پس $S(x_0) = x_0$ است و در نتیجه $f(S(x_0)) = f(x_0) = x_0$ که منجر به تناقض می‌شود و بنابراین حکم اثبات می‌شود. $\bullet$

لم ۱۲.۱.۱. *اگر α و β دو عدد ترتیبی باشند، آن‌گاه یا $\alpha = \beta$ یا $\alpha \in \beta$ یا $\beta \in \alpha$.*

برهان: چون اعداد ترتیبی مجموعه‌های خوش ترتیب هستند، پس با رابطه $(\leq)$ مرتب کامل می‌باشند. پس یا عضوی مانند y در β وجود دارد که $\alpha \sim S(y) = y \in \beta$ یا عضوی مانند x در α وجود دارد که $\alpha \in x = S(x) \sim \beta$ و یا $\beta \sim \alpha$. بنابراین $\beta \in y \sim \alpha$ یا $\alpha \in x \sim \beta$ و یا $\beta \sim \alpha$ و بنا به لم قبل، نتیجه می‌شود که $\beta \in y = \alpha$ یا $\alpha \in x = \beta$ و یا $\beta = \alpha$ است. •

توجه: اگر α یک عدد ترتیبی باشد، آن‌گاه قرار می‌دهیم $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$.

لم ۱۳.۱.۱. *α^+ یک عدد ترتیبی است.*

برهان: برای هر $x \in \alpha^+$ داریم $x \in \alpha$ یا $x = \alpha$. اگر $x \in \alpha$، آن‌گاه $S(x) = x$؛ زیرا هر عضو یک عدد ترتیبی است و اگر $x = \alpha$، در این صورت $S(\alpha) = \alpha$؛ زیرا α یک عدد ترتیبی است. •

تعریف ۱۴.۱.۱. *α^+ را تالی α می‌گوییم.*

لم ۱۵.۱.۱. *اگر A یک مجموعه از اعداد ترتیبی باشد، آن‌گاه $\gamma = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ یک عدد ترتیبی است.*

برهان: به [۴] صفحه ۱۹۳، مراجعه شود. •

توجه ۱۶.۱.۱. همواره $\alpha < \alpha^+$؛ زیرا $\alpha \in \alpha^+$.

توجه ۱۷.۱.۱. *به ازای هر مجموعه از اعداد ترتیبی، عدد ترتیبی وجود دارد که از تمام اعداد ترتیبی آن مجموعه بزرگ‌تر است.*

برهان: فرض می‌کنیم A یک مجموعه از اعداد ترتیبی باشد، قرار می‌دهیم $\beta = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$. با توجه به لم (۱۵.۱.۱)، β یک عدد ترتیبی است و داریم

$$\forall \alpha \in A\ ,\ \alpha \in \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha \leq \beta$$

چون $\beta < \beta^+$، پس به ازای هر $\alpha \in A$، $\alpha < \beta^+$. •

لم ۱۸.۱.۱. *با توجه به مفهوم اعداد ترتیبی، قاعده‌های زیر برقرار است*

الف) *به هر مجموعه‌ی خوش ترتیب $(A, \leq)$ یک عدد ترتیبی که آن را عدد ترتیبی A می‌نامیم، نسبت می‌دهیم و با $ord(A, \leq)$ نشان می‌دهیم و اگر α یک عدد ترتیبی باشد، یک مجموعه‌ی خوش ترتیب $(A, \leq)$ وجود دارد به قسمی که $ord(A, \leq) = \alpha$.*

ب) *اگر $(A, \leq)$ و $(B, \leq')$ دو مجموعه‌ی خوش ترتیب باشند، آن‌گاه*

$$(A, \leq) \approx (B, \leq') \text{ اگر و تنها اگر } ord(A, \leq) = ord(B, \leq')$$

ج) *$ord(A, \leq) = 0$ اگر و تنها اگر $A = \varnothing$.*

د) *اگر مجموعه‌ی خوش ترتیب $(A, \leq)$ به قسمی باشد که برای هر عدد طبیعی k، $A = \{1, 2, \ldots, k\}$ آن‌گاه $ord(A, \leq) = k$.*

عدد ترتیبی مجموعه‌ی اعداد طبیعی $\mathbb{N}$، با رابطه‌ی کوچک‌تر یا مساوی معمولی را معمولا با حرف ω، نشان می‌دهیم.

$$\omega = ord\{1, 2, 3, \ldots\}$$

تعریف ۱۹.۱.۱. *عدد ترتیبی α را یک عدد اصلی می‌گوییم، هرگاه α با هیچ عدد ترتیبی کمتر از خود هم‌توان نباشد. مهمترین قاعده‌های اعداد اصلی عبارتند از*

الف) *هر مجموعه‌ی A به یک عدد اصلی مربوط است، که با $|A|$ یا $Card(A)$ نمایش داده می‌شود و برای هر عدد اصلی a یک مجموعه‌ی A وجود دارد به طوری که $|A| = a$.*

ب) *عدد اصلی مجموعه‌ی A صفر است اگر و تنها اگر $A = \varnothing$.*

ج) *اگر A یک مجموعه‌ی متناهی ناتهی باشد، یعنی $k \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که $A = \{1, 2, \ldots, k\}$، آن‌گاه $|A| = k$.*

د) *برای هر مجموعه‌ی A و B، $|A| = |B|$ اگر و تنها اگر $A \sim B$.*

توجه: عدد اصلی مجموعه‌ی اعداد طبیعی را با نماد $\aleph_0$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲۰.۱.۱. *برای هر دو عدد اصلی a و b جمع $a+b$، عدد اصلی مجموعه‌ی $A \cup B$ است که در آن $a = |A|$ و $b = |B|$ و A و B مجزا هستند و حاصل‌ضرب ab، عدد اصلی حاصل‌ضرب دکارتی $A \times B$ است که در آن $a = |A|$ و $b = |B|$.*

$$|A \times B| = ab$$
$$|A \cup B| = a + b$$

به همین شکل عمل جمع و ضرب اعداد اصلی برای تعداد نامتناهی عامل نیز تعریف می‌شود.
جمع و ضرب اعداد اصلی خاصیت تعویض‌پذیری و شرکت‌پذیری دارند و هم‌چنین عمل ضرب نسبت به جمع خاصیت توزیع‌پذیری دارد.

تعریف ۲۱.۱.۱. *اگر A و B دو مجموعه باشند، می‌گوییم $|A|$ کوچک‌تر یا مساوی $|B|$ است، هرگاه مجموعه‌ی A با یک زیرمجموعه‌ی B هم‌توان باشد؛ که در این صورت می‌نویسیم $|A| \leq |B|$ و اگر $|B| \leq |A|$ و $|A| \neq |B|$، آن‌گاه می‌نویسیم $|B| > |A|$.*

لم ۲۲.۱.۱. *اگر a و b دو عدد اصلی باشند به طوری که بزرگ‌ترین آن‌ها نامتناهی و کوچک‌ترین آن‌ها ناصفر باشد، آن‌گاه $a + b = a.b = \max\{a, b\}$.*

برهان: به [۴] صفحه ۱۶۴، مراجعه شود. •

تعریف ۲۳.۱.۱. *فرض می‌کنیم $(A, \leq)$ یک مجموعه‌ی خوش ترتیب باشد، به طوری که $ord(A, \leq) = \alpha$. در این صورت $ord(A \cup \{A\}, \leq') = \alpha^+$ را تالی عدد ترتیبی α می‌نامیم و با $\alpha + 1$ نمایش می‌دهیم. باید تذکر دهیم که برای هر عنصر $a \in A$ داریم $a \leq' A$ و هم‌چنین اگر $a, b \in A$، آن‌گاه $a \leq' b$ اگر و تنها اگر $a \leq b$.*

عدد ترتیبی β را یک عدد ترتیبی تالی می‌گوییم، هرگاه عدد ترتیبی α وجود داشته باشد به طوری که $\beta = \alpha^+$ و اگر چنین عدد ترتیبی وجود نداشته باشد، β را یک عدد ترتیبی حدی می‌گوییم.

مثال ۲۴.۱.۱. *0 یک عدد ترتیبی حدی است.*

مثال ۲۵.۱.۱. ω یک عدد ترتیبی حدی است.

تعریف ۲۶.۱.۱. اگر α یک عدد ترتیبی باشد، هم‌پایانی α را این گونه تعریف می‌کنیم کوچک‌ترین عدد ترتیبی β، به طوری که نگاشت یک به یک و صعودی $f : \beta \longrightarrow \alpha$ وجود داشته باشد که در α هم‌پایان باشد. یعنی برای هر عدد ترتیبی $\gamma \in \alpha$ عدد ترتیبی $\varepsilon \in \beta$ وجود داشته باشد، به طوری که $\gamma \leq f(\varepsilon)$؛ یعنی

$$\forall \gamma \in \alpha, \ \exists \varepsilon \in \beta \quad \gamma \leq f(\varepsilon)$$

و با $cof\,\alpha$ نمایش می‌دهیم.
توجه می‌کنیم که برای هر عدد ترتیبی α، $cof(\alpha) \leq \alpha$؛ چون نگاشت همانی یک نگاشت هم‌پایان است.
هم‌چنین برای هر عدد ترتیبی α، $cof(\alpha+1) = 1$؛ چون $f : 1 \longrightarrow \alpha+1$ و $f(0) = \alpha$ یک نگاشت هم‌پایان در $\alpha + 1$ است.

تعریف ۲۷.۱.۱. عدد اصلی نامتناهی α را منظم می‌نامیم، هرگاه $\{A_i : i \in I\}$ گردایه‌ای از مجموعه‌ها با شرط $|A_i| < \alpha$ برای هر $i \in I$ باشد و اگر $|I| < \alpha$ آن‌گاه $|\cup_{i\in I} A_i| < \alpha$، در غیر این صورت آن را تکین می‌نامیم.
عدد اصلی c را ناحدی می‌نامیم، اگر برای یک عدد ترتیبی α، $c = N_{\alpha+1}$.

مثال ۲۸.۱.۱. $\aleph_0$ یک عدد اصلی منظم است.

تعریف ۲۹.۱.۱. عدد اصلی k را غیر قابل دسترس (دست نیافتنی) می‌گوییم اگر و تنها اگر شرایط زیر را دارا باشد

الف) $k > \aleph_0$ (یعنی k ناشمارا باشد).

ب) k حدی باشد.

ج) k منظم باشد.

توجه ۳۰.۱.۱. $\aleph_1$ کوچک‌ترین عدد اصلی نامتناهی بزرگ‌تر از $\aleph_0$ است و به همین ترتیب $\aleph_\alpha$ کوچک‌ترین عدد اصلی نامتناهی است که با $\aleph_\beta$، برای هر β کوچک‌تر از α، متفاوت است.

قضیه ۳۱.۱.۱. اگر $\alpha \in \beta$، آن‌گاه $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

برهان: به [۴] صفحه ۲۱۳، مراجعه شود. ●

قضیه ۳۲.۱.۱. *هر عدد اصلی نامتناهی به شکل $\aleph_\alpha$ است که α یک عدد ترتیبی می‌باشد.*

برهان: به [۴] صفحه ۲۱۳، مراجعه شود. ●

قضیه ۳۳.۱.۱. *برای هر عدد ترتیبی α، $\aleph_{\alpha+1}$ یک عدد اصلی منظم است.*

برهان: به [۴] صفحه ۲۵۸، مراجعه شود. ●

تعریف ۳۴.۱.۱. *مجموعه‌ی مرتب A را هم‌پایان با زیرمجموعه‌ی B از خودش می‌نامیم، اگر برای هر $x \in A$، $y \in B$ موجود باشد که $x \leq y$.*

مثال ۳۵.۱.۱. *مجموعه‌ی اعداد حقیقی با مجموعه‌ی اعداد صحیح هم‌پایان است.*

۲.۱ جبر

تعریف ۱.۲.۱. *یک حلقه عبارت است از یک مجموعه‌ی ناتهی R به انضمام دو عمل $+$ و $\cdot$ (مرسوم به جمع و ضرب) به طوری که*

۱. *R با عمل جمع یک گروه آبلی است.*

۲. *برای هر a, b, c متعلق به R، $(ab)c = a(bc)$.*

۳. *عمل ضرب نسبت به عمل جمع توزیع‌پذیر است؛ یعنی*

$$\forall\, a, b, c \in R \quad : \quad a(b+c) = ab + ac\ ,\ (b+c)a = ba + ca$$

به علاوه اگر برای هر $a, b \in R$، $ab = ba$، R را حلقه‌ی تعویض‌پذیر می‌گوییم و اگر برای هر $a \in R$، $1_R a = a 1_R = a$، R را حلقه‌ی یک‌دار می‌نامیم.

تعریف ۲.۲.۱. *فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد و S زیرمجموعه‌ی ناتهی از R که تحت عمل‌های ضرب و جمع در R بسته است. اگر S با این عمل‌ها حلقه باشد، S را زیرحلقه می‌نامیم.*

زیرحلقه‌ی I از R را ایدال چپ می‌نامیم، اگر	$\forall r \in R, \forall x \in I : rx \in I$
زیرحلقه‌ی I از R را ایدال راست می‌نامیم، اگر	$\forall r \in R, \forall x \in I : xr \in I$

I را ایدال R می‌نامیم، اگر ایدال چپ و راست باشد؛ یعنی

$$\forall r \in R,\ \forall x \in I : rx \in I,\ xr \in I$$

تعریف ۳.۲.۱. *ایدال (چپ یا راست) M در R را ماکسیمال می‌گوییم، اگر $M \neq R$ و برای هر ایدال N از R، که $M \subseteq N \subseteq R$، یا $M = N$ یا $N = R$.*

تعریف ۴.۲.۱. *اگر R و S دو حلقه باشند؛ $\phi : R \longrightarrow S$ را هم‌ریختی حلقه‌ها می‌گوییم، اگر برای هر $a, b \in R$ داشته باشیم*

$$\phi(ab) = \phi(a) \cdot \phi(b)$$
$$\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$$
$$\phi(1_R) = 1_S$$

تعریف ۵.۲.۱. *فرض می‌کنیم R یک حلقه باشد. گروه آبلی جمعی M همراه با یک نگاشت $M \times R \longrightarrow M$ با ضابطه‌ی $mr \longrightarrow (m,r)$ را یک R-مدول (راست) می‌نامیم، هرگاه برای $r, s \in R$ و هر $m, n \in M$ داشته باشیم*

۱. $(m+n)r = mr + nr$

۲. $m(r+s) = mr + ms$

۳. $(mr)s = m(rs)$

اگر R یک‌دار باشد، رابطه‌ی زیر برقرار است و در این حالت M را یک R-مدول یکانی می‌گوییم.

۴. *به ازای هر $m \in M$، $m1_R = m$ (۱ عضو واحد حلقه‌ی R است).*

تعریف ۶.۲.۱. یک R-مدول M *بدیهی است، اگر برای هر* $r \in R$ و $m \in M$، $rm = 0$.

مثال ۷.۲.۱. *اگر* $\{M_i\}_{i\in I}$ *یک خانواده از* R-*مدول‌ها باشند،*

$$\oplus M_i = \{\{a_i\} \in \Pi M_i : \text{فقط تعداد متناهی از } a_i \text{ها ناصفرند}\}$$

$\bigoplus_{i\in I} M_i$ *یک* R-*مدول است.*

مطالب زیر را در نظریه‌ی مدول‌ها داریم:

۱. فرض می‌کنیم K حلقه‌ای تعویض‌پذیر و یک‌دار باشد، یک K-جبر (یا جبر روی K) M، حلقه‌ی M است، چنان که

الف) $(M, +)$، K-مدول (راست) یکانی باشد.

ب) به ازای هر $x \in K$ و به ازای هر $m, n \in M$: $(mn)x = m(nx) = m(xn)$.

۲. فرض می‌کنیم R یک حلقه، M یک R-مدول و N یک زیرمجموعه‌ی ناتهی M باشد. N را یک زیرمدول M می‌گوییم، هرگاه N یک زیرگروه جمعی M باشد و برای هر $r \in R$ و $n \in N$ داشته باشیم $nr \in N$. در این صورت می‌نویسیم $N \le M$.

۳. مدول M را ساده می‌گوییم، هرگاه 0 و M تنها زیرمدول‌های آن باشند.

۴. فرض می‌کنیم M یک R-مدول و N زیرمدول M باشد، می‌گوییم N یک جمع‌وند مستقیم M است، هرگاه (حداقل) یک زیرمدول N' از M موجود باشد، به طوری که $M = N \oplus N'$.

۵. فرض می‌کنیم M و M' دو R-مدول باشند، یک تابع $f : M \longrightarrow M'$ را یک R-هم‌ریختی می‌نامیم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد

الف) به ازای هر x, y متعلق به M، $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

ب) به ازای هر $r \in R$ و هر $x \in M$، $f(r.x) = r.f(x)$.

۶. یک R-همریختی را یک R-بروریختی می‌نامیم، اگر پوشا باشد و یک R-همریختی را یک R-تک‌ریختی می‌گوییم، هرگاه یک به یک باشد و آن را R-یک‌ریختی می‌نامیم، هرگاه یک به یک و پوشا باشد.

۷. اگر X یک زیرمجموعه از R-مدول M باشد، آن‌گاه اشتراک همه‌ی زیرمدول‌های M که شامل X هستند را زیرمدول تولید شده توسط X می‌گوییم و با $< X >$ نمایش می‌دهیم. اگر یک زیرمجموعه‌ی متناهی از مدول M مانند X وجود داشته باشد که M را تولید نماید، آن‌گاه مدول M را متناهیا تولید شده می‌گوییم.

۸. اگر M یک R-مدول راست و N زیرمدولی از M باشد، آن‌گاه

$$\frac{M}{N} = \{m + N : m \in M\}$$

با روابط زیر، یک R-مدول راست است.

$$(m + N) + (m' + N) = (m + m') + N \ , \ \ (m + N)a = ma + N$$

که در آن $N = 0 + N$ عضو همانی جمع و $-(m + N) = -m + N$ معکوس جمعی است. به R-مدول راست $\frac{M}{N}$ یک مدول خارج‌قسمتی از R-مدول راست M می‌گوییم.

۹. اگر F یک R-مدول باشد، $S = \{e_i\} \subseteq F$ را یک پایه برای F می‌نامیم، هرگاه

الف) F به وسیله‌ی S تولید شود؛ یعنی، $F =< S >$.

ب) اگر $\sum_{i=1}^{n} r_i e_i = 0$، که $r_i \in R$، آن‌گاه برای هر $1 \leq i \leq n$، $r_i = 0$.

۱۰. هرگاه مدولی دارای یک پایه باشد، مدول آزاد است.

گزاره ۸.۲.۱. *اگر $\{M_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مدول‌ها باشد، چنان که جمع آن‌ها مستقیم و $\{N_i\}$ خانواده‌ای از مدول‌ها باشد که برای هر $i \in I$، $N_i \leq M_i$ (می‌دانیم که جمع N_iها نیز مستقیم است)، آن‌گاه*

$$\frac{\oplus M_i}{\oplus N_i} = \oplus \frac{M_i}{N_i}$$

برهان: *تابع $f : \frac{\oplus M_i}{\oplus N_i} \longrightarrow \oplus \frac{M_i}{N_i}$ با ضابطه‌ی زیر را تعریف می‌کنیم*

$$f(\overline{m_1 + \cdots + m_n}) = \overline{m_1} + \cdots + \overline{m_n}$$

f خوش تعریف است، زیرا اگر

$$\overline{m_1+\cdots+m_n}=\overline{m'_1+\cdots+m'_n} \ \Rightarrow\ m_1-m'_1+\cdots+m_n-m'_n\in\bigoplus_{i\in I}N_i$$

و بنا به خواص جمع مستقیم، داریم

$$\begin{aligned}&m_1-m'_1\in N_1,\dots,m_n-m'_n\in N_n\\ &\Rightarrow\ m_1+N_1=m'_1+N_1,\dots,m_n+N_n=m'_n+N_n\\ &\Rightarrow\ \overline{m_1}+\cdots+\overline{m_n}=\overline{m'_1}+\cdots+\overline{m'_n}\end{aligned}$$

لذا f خوش تعریف است. f به وضوح یک هم‌ریختی پوشا است. ادعا می‌کنیم که یک به یک نیز می‌باشد؛ زیرا فرض می‌کنیم $f(\overline{m_1+\cdots+m_n})=0$، آن‌گاه $\overline{m_1}+\cdots+\overline{m_n}=0$ و در نتیجه $m_1\in N_1,\dots,m_n\in N_n$. پس $m_1+\cdots+m_n\in\oplus N_i$؛ زیرا

$$\bigoplus_{i=1}^{n}N_i\in\bigoplus_{i\in I}N_i$$

و در نتیجه $\overline{m_1+\cdots+m_n}=0$. پس f یک‌ریختی است. •

تعریف ۹.۲.۱. *می‌گوییم R-مدول M دارای شرط زنجیر فزاینده (ش.ز.ف) روی زیرمدول‌ها است، هرگاه برای هر زنجیر اکیدا فزاینده $M_1\subseteq M_2\subseteq\cdots$ از زیرمدول‌های M، یک عدد طبیعی n وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $i\geq n$ داشته باشیم $M_i=M_n$.*

R-مدول M را نویتری می‌گوییم، هرگاه شرط زنجیر فزاینده روی زیرمدول‌هایش وجود داشته باشد.

قضیه ۱۰.۲.۱. *فرض می‌کنیم M یک R-مدول باشد، آن‌گاه شرایط زیر هم ارزند*

۱. *M نویتری است.*

۲. *هر زیرمدول M، متناهیا تولید شده است.*

۳. *هر خانواده‌ی ناتهی از زیرمدول‌های M دارای عنصر ماکسیمال است.*

برهان: به [۷] مراجعه شود. •

تعریف ۱.۲.۱۱. *حلقه‌ی R را نویتری می‌نامیم، هرگاه شرط زنجیر فزاینده روی ایدال‌های R وجود داشته باشد.*

مثال ۱.۲.۱۲. *$\mathbb{Z}$ یک حلقه‌ی نویتری است.*

تعریف ۱.۲.۱۳. *گوییم R-مدول M دارای شرط زنجیر کاهنده (ش.ز.ک) روی زیرمدول‌ها است، هرگاه برای هر زنجیر اکیدا نزولی $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$ از زیرمدول‌های M، یک عدد طبیعی n وجود داشته باشد، به طوری که برای هر $i \geq n$ داشته باشیم $M_i = M_n$.*

R-مدول M را آرتینی می‌گوییم، هرگاه شرط زنجیر کاهنده روی زیرمدول‌هایش وجود داشته باشد.

قضیه ۱.۲.۱۴. *هرگاه M یک R-مدول باشد، آن‌گاه شرایط زیر معادلند*

۱. *M آرتینی است.*

۲. *هر خانواده‌ی ناتهی از زیرمدول‌های M دارای عنصر مینیمال است.*

تعریف ۱.۲.۱۵. *حلقه‌ی R را آرتینی می‌گوییم، هرگاه شرط زنجیر کاهنده روی ایدال‌های R وجود داشته باشد.*

مثال ۱.۲.۱۶. *هر R-مدول متناهی M هم نویتری است و هم آرتینی.*

قضیه ۱.۲.۱۷. *اگر M یک R-مدول نویتری (آرتینی) باشد، آن‌گاه هر زیرمدول M و هر مدول خارج‌قسمت M نویتری (آرتینی) است.*

قضیه ۱.۲.۱۸. *اگر M یک R-مدول باشد و $N \leq M$ و M/N هر دو نویتری (آرتینی) باشند، آن‌گاه M نیز نویتری (آرتینی) است.*

گزاره ۱.۲.۱۹. *در هر حلقه یک‌دار R، ایدال‌های (راست) ماکسیمال وجود دارند. در حقیقت هر ایدال (راست) در R (به جز خود R) در یک ایدال (راست) ماکسیمال قرار دارد.*

برهان: به [۷] صفحه‌ی ۱۲۸، مراجعه شود. •

تعریف ۲۰.۲.۱. *اشتراک تمام ایدال‌های ماکسیمال از حلقه‌ی R را رادیکال جیکوبسن R نامیده و با $J(R)$ نمایش می‌دهیم.*

تعریف ۲۱.۲.۱. *یک عنصر a از حلقه‌ی R پوچ‌توان است اگر به ازای عدد صحیح مثبتی چون n، $a^n = 0$.*

تعریف ۲۲.۲.۱. *ایدال I از حلقه‌ی R پوچ است اگر هر عنصر I پوچ‌توان باشد؛ ایدال I پوچ‌توان است اگر به ازای عدد صحیحی مانند n، $I^n = 0$.*

تعریف ۲۳.۲.۱. *فرض می‌کنیم S یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از حلقه‌ی R باشد، در این صورت مجموعه‌ی $\{r \in R : sr = 0\ \forall s \in S\}$ را پوچ‌ساز راست S می‌نامیم و آن را با $rA(S)$ نشان می‌دهیم، پوچ‌ساز چپ S را به طریق مشابه به وسیله‌ی مجموعه‌ی $\{r \in R : rs = 0\ s \in S\}$ تعریف کرده و با $lA(S)$ نشان می‌دهیم. اگر $S = \{c\}$، آن‌گاه به جای $rA\{(S)\}$ و $lA\{(S)\}$ از نمادهای $rA(c)$ و $lA(c)$ استفاده خواهیم کرد.*

توجه ۲۴.۲.۱. *فرض می‌کنیم M یک R-مدول و I ایدالی از R باشد، به طوری که $I \subseteq A(M)$. در این صورت ضرب اسکالر عناصر $\frac{R}{I}$ در M، M را به یک $\frac{R}{I}$-مدول تبدیل می‌کند.*

فرض کنیم I یک ایدال راست R باشد، I را ایدال پوچ‌ساز راست می‌نامیم، اگر یک زیرمجموعه‌ی ناتهی R مانند S وجود داشته باشد به طوری که $I = rA(S)$. ایدال پوچ‌ساز چپ نیز به طریق مشابه تعریف می‌گردد.

تعریف ۲۵.۲.۱. *عنصر c از حلقه‌ی R را یک عنصر منظم راست می‌نامیم، هرگاه $rA(c) = (0)$ و آن را عنصر منظم چپ می‌نامیم، هرگاه $lA(c) = (0)$ و آن را عنصر منظم می‌نامیم، هرگاه $lA(c) = rA(c) = (0)$.*

تعریف ۲۶.۲.۱. *ایدال سره‌ی P از حلقه‌ی R را یک ایدال اول می‌نامیم، هرگاه برای هر ایدال A و B از R*

$$AB \subseteq P \quad \Longrightarrow \quad A \subseteq P \text{ یا } B \subseteq P$$

حلقه‌ی R را یک حلقه‌ی اول می‌نامیم، اگر (0) یک ایدال اول R باشد.

تعریف ۲۷.۲.۱. اشتراک همه‌ی ایدال‌های اول حلقه‌ی R را رادیکال اول R می‌نامیم و آن را با $N(R)$ نشان می‌دهیم.
R را یک حلقه‌ی نیم‌اول می‌نامیم، هرگاه $N(R) = 0$.

توجه ۲۸.۲.۱. می‌دانیم که $N(R)$ برابر اشتراک تمام ایدال‌های اول مینیمال R است و شامل تمام عناصر قوی-پوچ‌توان R می‌باشد. واضح است که $N(R)$ شامل تمام ایدال‌های پوچ‌توان R است.

تعریف ۲۹.۲.۱. ایدال I را نیم‌اول می‌نامیم، هرگاه اشتراک ایدال‌های اول باشد.
حلقه‌ی R را نیم‌اول می‌نامیم، هرگاه ایدال (0) نیم‌اول باشد.

توجه ۳۰.۲.۱. حلقه‌ی R نیم‌اول است، هرگاه برای هر ایدال I از R و هر عدد صحیح مثبت n، اگر $I^n = (0)$ آن‌گاه $I = (0)$، به عبارت دیگر R فاقد ایدال پوچ‌توان ناصفر باشد.

تعریف ۳۱.۲.۱. R-مدول M را توسیع اساسی زیرمدول N می‌نامیم، اگر برای هر زیرمدول غیر صفر $K \subset M$، $K \cap N \neq 0$. در این صورت، N را زیرمدول اساسی M می‌نامیم و آن را با $N \leq_e M$ نمایش می‌دهیم. اگر $N \lneqq_e M$، آن‌گاه به M توسیع اساسی سره N می‌گوییم.

نکته ۳۲.۲.۱. زیرمدول N از M، در M اساسی است اگر و فقط اگر برای هر $0 \neq x \in M$ وجود داشته باشد $r \in R$، به طوری که $0 \neq xr \in N$.

تعریف ۳۳.۲.۱. M را توسیع اساسی ماکسیمال N می‌نامیم، هرگاه $N \leq_e M$ و N در هیچ توسیع محض M، اساسی نباشد.

مثال ۳۴.۲.۱. چون هر دو $\mathbb{Z}$-زیرمدول از $\mathbb{Q}$ دارای اشتراک ناصفر هستند، تمام $\mathbb{Z}$-زیرمدول‌های $\mathbb{Q}$ اساسی می‌باشند. برای مثال $\mathbb{Z} \leq_e \mathbb{Q}$.

توجه ۳۵.۲.۱. در هر حلقه‌ی نیم‌اول، $A_R(I) = 0$ اگر و تنها اگر I اساسی باشد.