فهرست مطالب

مقدمه

به منظور بررسی اهمیت موضوع این پایان نامه، پاسخ دادن به دو سوال ضروری است.

(۱) چرا **آنالیز غیر هموار**؟

(۲) چرا آنالیز غیر هموار **روی خمینه های ریمانی** ؟

پاسخ به سوال اول به معنی بررسی اهمیت آنالیز غیر هموار است و پاسخ سوال دوم به مفهوم یافتن تفاوت و کاربردها و اهمیت آنالیز غیر هموار روی خمینه های ریمانی است.

در جهان طبیعی قابل دیدن و فهم است که بسیاری از توابعی که با آن ها سر و کار داریم توابع مشتق پذیر و حتی پیوسته نیستند. هم چنین بسیاری از مجموعه های اطراف ما مرزهای هموار ندارند. تا پیش از معرفی مفهوم آنالیز غیر هموار در بسیاری از علوم کاربردی و مهندسی، توابع را هموار در نظر می گرفتند و سپس در جایی که تابع هموار نبود سعی می کردند با در نظر گرفتن تقریب به نتیجه دلخواه برسند. حال آنکه استفاده از روش های تقریب بسیار مشکل بود و آنچنان که نیاز بود دقیق و کارآمد نبود. این مسئله تا حدی اهمیت و دلیل به وجود آمدن آنالیز غیر هموار را روشن می کند. در نتیجه ریاضی دانان به بررسی نوعی تعمیم برای مشتق توابع غیر هموار پرداختند. آنالیز غیر هموار به بررسی رفتار توابع دیفرانسیل ناپذیر و مجموعه هایی با مرز غیر هموار می پردازد. گرادیان های تعمیم یافته یا زیر دیفرانسیل ها جایگزینی برای مشتق کلاسیک از توابع غیر هموار یا حداقل توابعی که دارای مشتق کلاسیک نیستند، می باشند. البته در حالتی که تابع مورد نظر همواراست، این گرادیان های تعمیم یافته با مشتق کلاسیک

منطبق اند. مفهوم گرادیان تعمیم یافته کلارک یا زیر دیفرانسیل کلارک از یک تابع موضعاً لیپ شیتز بوسیله کلارک[۱] در سال ۱۹۷۵ معرفی شد. این مفهوم برای توابع هموار بر مشتق کلاسیک و برای توابع محدب بر زیر دیفرانسیل این توابع منطبق است. پس از آن، تلاش هایی توسط ریاضی دانان برای جایگزین کردن توابع لیپ شیتز با توابع غیر پیوسته صورت گرفت، که منجر به تعریف زیر دیفرانسیل پروکسیمال[۲] برای توابع نیم پیوسته پایینی شد،[۱۳، ۲۳، ۶۳] . پس از تعمیم های مشتق کلاسیک هم چنان ریاضی دانان به بررسی برخی خواص این تعمیم ها و بررسی حساب مرتبط با آنها پرداختند. سپس مفهومی با نام زیر جت برای توابع نیم پیوسته پایینی معرفی شد که علاوه بر مشتق مرتبه اول، با مشتق مرتبه دوم توابع هم سر وکار داشت، [۲۹]. هم چنین حساب فازی برای زیر جت توابع حقیقی مقدار، ثابت شد،[۳۵]. در ادامه در [۵۰]، با استفاده از حساب جداسازی[۳] [۳۰]، ثابت شد که نتایج اثبات شده در [۳۵]، برای توابع حقیقی مقدار گسترش یافته، نیز درست می باشد. هم چنین حساب زیر جت برای زیر جت حدی با استفاده از فرضیات توصیفی، ثابت گردید. علاوه براین، ابرهارد[۴] و نیبلم[۵] نتایجی معادل با استفاده از تقریب، بدون استفاده از حساب جداسازی، ثابت کردند.

پس از معرفی آنالیز غیر هموار روی فضاهای خطی دنیایی از مسائل جدید پدیدار شدند. تعداد زیادی از زیر مجموعه ها از فضاهای خطی که با استفاده از آنالیز غیر

[۱] $Clarke$

[۲] $Proximal\ subdifferential$

[۳] $Separable\ calculus$

[۴] $A.\ Eberhard$

[۵] $M.\ Nyblom$

هموار تعریف می شدند و خواص جالبی داشتند، تعریف شدند. از این کلاس از مجموعه ها می توان به مجموعه های اپی—لیپ شیتز، φ—محدب و تقریباً منظم اشاره کرد. این مجموعه ها از اهمیت ویژه ای برخوردارند ، چون کلاس اول شامل زیر مجموعه های محدب بسته با درون غیر تهی می باشد و کلاس دوم و سوم شامل مجموعه های محدب بسته اند.

در سال ۱۹۷۸، راکفلر[6] [۶۸، ۶۹] مفهوم زیر مجموعه های اپی—لیپ شیتز از فضاهای اقلیدسی با بعد متناهی را معرفی کرد. در [۲۵،۲۴]، کرنت[7] و همکارش سزارنکی[8] ثابت کردند که هر زیر مجموعه اپی—لیپ شیتز و غیر تهی از $\mathbb{R}^n$ را می توان بوسیله یک نابرابری نا تبهگن لیپ شیتزی نوشت و شرایط لازم وکافی برای وجود نقطه ثابت و تعادل برای یک نگاشت مجموعه مقدار تعریف شده روی یک زیر مجموعه اپی—لیپ شیتز از $\mathbb{R}^n$ را اثبات کردند. هم چنین برای مجموعه های اپی— لیپ شیتز مشخصه سازی ای با استفاده از زیر دیفرانسیل کلارک ثابت کردند. مجموعه های اپی لیپ شیتز کاربردهای گسترده ای در تئوری مورس [9] و نظریه تعادل [10] دارند. به علاوه، برخی دیگر از کاربردهای مجموعه های اپی—لیپ شیتز در فضاهای خطی را می توان در [۲۵،۲۴،۱۰] مشاهده کرد.

برای اولین بار، زیر مجموعه های φ—محدب از فضاهای خطی متناهی البعد با

---

[6] $R.\ T.\ Rockafellar$

[7] $B.\ Cornet$

[8] $M.\ O.\ Czarnecki$

[9] $Morse\ theory$

[10] $Equilibrium\ theory$

نام مجموعه های با برد مثبت [۱۱] در [۴۱] معرفی شدند. مفهوم φ—محدب بودن برای فضاهای خطی، تحت عنوان p—محدب با روشی متفاوت در [۳۳] معرفی شد و پس از آن نویسنده به معرفی مفهوم تابع p—محدب پرداخت. حالت خاصی که φ مقداری ثابت است، در [۲۳] بررسی شد. کانینو [۱۲] در [۱٦] خواصی از مجموعه های p—محدب و توابع p—محدب و ژئودزی ها در فضاهای هیلبرت از بعد نامتناهی را بیان نمود، سپس در [۱۷] وجود ژئودزی بسته روی مجموعه های p—محدب در فضاهای خطی را بررسی کرد. در [۲۸،۲۷] ثابت شد که برای فضاهای هیلبرت، φ—محدب بودن ایجاب می کند که مخروط های نرمال، منطبق باشند. مفهوم مجموعه های φ—محدب به نوعی تعمیمی برای مفهوم مجموعه های محدب است، چراکه این مجموعه ها یکی از خواص زیر مجموعه های محدب را به طور موضعی دارند. به طور دقیق تر، اگر S زیر مجموعه ای غیرتهی از فضای اقلیدسی X باشد، مجموعه $P_S(q)$ که تصویر متریکی از نقطه $q \in X$ متناظر به S نامیده می شود، را به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$P_S(q) = \{p \in S : \quad d(p,q) = d_S(q)\}.$$

اگر S، φ—محدب باشد، آن گاه ثابت می شود $P_S : X \to S$ روی یک همسایگی شامل S تابعی لیپ شیتز است. هم چنین برخی خواص d_S متناظر به مجموعه های محدب قابل تعمیم به مجموعه های φ—محدب است.

[۱۱] *Sets with positive reach*

[۱۲] *A. Canino*

مجموعه های تقریباً منظم [۱۳] نیز خواصی مانند مجموعه های $\varphi-$محدب دارند. در [۷۲] ثابت شده است که، برای این کلاس از مجموعه ها تصویر متریکی متناظر در یک همسایگی تابعی لیپ شیتز است. در [٦٦] این مجموعه ها برای اولین بار تقریباً منظم نامیده شده اند و در [٦٧] نشان داده شده است که خاصیت تقریباً منظم بودن شرط لازم وکافی برای وجود و لیپ شیتز بودن تصویر متریکی است. به علاوه راکفلر و همکارانش در [٦٧] مشخصه سازی ای برای مجموعه های تقریباً منظم در فضاهای هیلبرت با استفاده از زیر یکنوایی مخروط نرمال برش یافته، به دست آوردند.

ولی مشکل با معرفی مفهوم آنالیز غیر هموار روی فضاهای خطی حل نشد چرا که در اولین گام ریاضی دانانی چون کلارک و همکارانش تنها به بررسی آنالیز غیر هموار روی فضاهای خطی پرداختند. حال آنکه برای حل مشکلی که در سرو کار داشتن با جهان واقعی با آن روبرو شده ایم، کار کردن با فضاهای خطی کافی نیست. چراکه در جهان ما بسیاری از فضاها خطی نیستند و نمونه ای از خمینه های ریمانی هستند. گاهی تعمیم مسائل به خمینه ها، که فضاهای موضعاً همان ریخت با فضاهای خطی اند، بسیار ساده است، ولی این سوال مطرح است که چگونه می توان به بررسی مسائل غیر موضعی و غیر هموار روی خمینه ها پرداخت. برای مثال چگونه می توان رفتار تابع فاصله تعریف شده روی خمینه ها را بررسی نمود؟

سرانجام جمعی از ریاضی دانان به بررسی آنالیز غیر هموار روی خمینه های ریمانی

[۱۳] $Prox-regular$

پرداختند. در اولین گام ها در سال ۱۹۸۲، موترآنو[۱۴] و پاول [۱۵] در مقاله [۶۴] نگاهی گذرا به مفاهیم مشتق جهتی تعمیم یافته کلارک و مخروط های مماس و نرمال کلارک برای زیر مجموعه های بسته از خمینه های ریمانی و کار برد آن ها در بهینه سازی داشتند. پس از گذشت چند سال با توجه به نیاز فراوان به آنالیز غیر هموار روی خمینه های ریمانی، مجدداً ریاضی دانان به فکر دقیق تر پرداختن به این مسائل افتادند. در سال ۲۰۰۵ ریاضی دانانی چون آزاگر[۱۶] و همکارانش در اسپانیا و در سال ۲۰۰۷ لدییف[۱۷] و همکارانش در آمریکا به بررسی آنالیز غیر هموار روی خمینه های ریمانی پرداختند [۴، ۵، ۶،۷،۵۸]. ولی هنوز مسائلی وجود دارند که با استفاده از آنالیز غیر هموار قابل بررسی اند. برای مثال، این سوال مطرح است که، آیا با استفاده از آنالیز غیر هموار تعمیمی برای محدب بودن روی خمینه های ریمانی وجود دارد؟

قابل ذکر است که زیر مجموعه های محدب، نقش بسیار مهمی را در مبحث فضاهای ریمانی ایفا می کنند و تعمیم آن ها از اهمیت ویژه ای برخوردار است. ریاضی دانانی چون والتر [۱۸][۷۵]، گرین[۱۹] و شیوهوما [۲۰][۴۴] به بررسی برخی خواص زیر مجموعه های محدب از خمینه های ریمانی پرداختند. در [۷۵] دیفرانسیل پذیری تصویر متریکی متناظر به زیر مجموعه بسته موضعاً محدب S از یک خمینه ریمانی از

[۱۴] $D.\ Motreanu$

[۱۵] $N.\ H.\ Pavel$

[۱۶] $A.\ Azagra$

[۱۷] $Yu.\ S.\ Ledyaev$

[۱۸] R. Walter

[۱۹] R. E. Greene

[۲۰] K. Shiohama

بعد متناهی اثبات شده است و نویسنده ثابت کرده است که تابع فاصله از مجموعه S، نزدیک و خارج S از کلاس C^1 است. در سال ۱۹۸۱، ثابت شد که برای زیر مجموعه کلاً محدب S، از خمینه ریمانی از بعد متناهی M، همسایگی باز W شامل S وجود دارد به طوری که تصویر متریکی روی W موضعاً لیپ شیتز است،[۴۴]. هم چنین در [۴۵] ثابت شده است که برای زیر مجموعه های محدب بسته از خمینه هادامار M، تصویر متریکی روی M تک مقدار و لیپ شیتز است. این سوال مطرح است که آیا می توان این شرط محدب بودن را مانند حالت فضاهای خطی ضعیف تر کرد؟

در این پایان نامه به معرفی گرادیان ها و زیر دیفرانسیل های تعمیم یافته برای توابع نیم پیوسته پایینی و موضعاً لیپ شیتز می پردازیم. سپس حساب زیر دیفرانسیل کلارک را تعمیم می دهیم و به بررسی قضایای زنجیری و مقدار میانی لی بورگ متناظر به زیر دیفرانسیل کلارک می پردازیم. هم چنین مشخصه سازی هایی از مخروط های مماس و نرمال کلارک را ثابت می کنیم، [۴۸]. به علاوه زیر جت مرتبه دوم و زیر جت حدی مرتبه دوم برای توابع نیم پیوسته پایینی تعریف شده روی خمینه های ریمانی را معرفی نموده و حساب زیر جت را بررسی می کنیم، [۲].

به عنوان کاربردهای آنالیز غیر هموار روی خمینه های ریمانی به معرفی زیر مجموعه های اپی—لیپ شیتز، φ—محدب و تقریباً منظم از خمینه های ریمانی می پردازیم.

برای مجموعه های اپی—لیپ شیتز مشخصه سازی ای با استفاده از زیر دیفرانسیل کلارک آورده می شود. هم چنین خواص مخروط های مماس و نرمال کلارک متناظر

به این مجموعه ها مورد بررسی قرار می گیرند. هم چنین ثابت می کنیم که اگر $f : M \to \mathbb{R}$ یک تابع موضعاً لیپ شیتز تعریف شده روی خمینه کامل با بعد متناهی M باشد و $[a, b]$ بازه بسته از اعداد حقیقی با این شرط باشد که $f^{-1}[a, b]$ فشرده است، آن گاه $M_a = \{x \in M : \quad f(x) \leq a\}$ یک همسایگی درون بر[۲۱] از $M_b = \{x \in M : \quad f(x) \leq b\}$ می باشد به شرط آنکه $[a, b]$ شامل نقطه بحرانی از f نباشد، یعنی اگر $a \leq f(x) \leq b$ آن گاه $0 \notin \partial f(x)$. هم چنین تعمیم نا هموراری از اصل باریکه نابحرانی[۲۲] برای نظریه مورس[۲۳] را ثابت می کنیم. سپس از مشخصه سازی به دست آمده برای زیر مجموعه های اپی—لیپ شیتز از خمینه های ریمانی کامل، می توان نتیجه گرفت که زیر مجموعه های اپی—لیپ شیتز از خمینه های ریمانی کامل، همسایگی های درون بر هستند.

در ادامه مفهوم زیر مجموعه های φ—محدب از خمینه های هادامار را معرفی می نمائیم [۸] و ثابت می کنیم که اگر S زیر مجموعه ای غیرتهی و φ—محدب از خمینه هادامار M باشد، $P_S : M \to S$ روی همسایگی ای شامل S تابعی لیپ شیتز است. در ادامه به بررسی برخی خواص d_S متناظر به مجموعه های φ—محدب از خمینه های هادامار می پردازیم. به علاوه، نتایجی مشابه برای زیر مجموعه های تقریباً منظم از خمینه های ریمانی با بعد متناهی بدست می آوریم. لازم است که ذکر است که میدان های برداری یکنوا تعریف شده روی خمینه های ریمانی، که تعمیمی از عملگر های یکنوا

[۲۱] $Neighborhood\ retract$

[۲۲] $Noncritical\ neck\ principle$

[۲۳] $Morse\ \ theory$

هستند، در [۶۵] معرفی شده اند. به رابطه محدب بودن تابع تعریف شده روی خمینه های ریمانی و یکنوا بودن گرادیان آن، نیز در [۷۶] اشاره شده است. در این پایان نامه به عملگر های زیر یکنوا و رابطه آنها با عملگرهای یکنوا پرداخته می شود. سپس برای اثبات نتایج مرتبط با تصویر متریکی متناظر به زیر مجموعه های تقریباً منظم، از تعمیم مشخصه سازی بدست آمده در [۶۷] برای مجموعه های تقریباً منظم با استفاده از زیر یکنوایی مخروط نرمال برش یافته، استفاده می شود.

در ادامه، مفهوم مشخصه اویلر متناظر به زیر مجموعه های اپی— لیپ شیتز از خمینه های ریمانی کامل توازی پذیر معرفی می شود. اگر $S \subset \mathbb{R}^n$ یک زیر خمینه C^1 و فشرده با مرز در $\mathbb{R}^n$ باشد، مشخصه اویلر از S به وسیله درجه نگاشت نرمال خارجی یکه از S نسبت به صفر، تعریف می شود، [۶۲]. در [۲۵] مشخصه اویلر به روشی مشابه برای حالتی که فرض دیفرانسیل پذیری روی S وجود ندارد، معرفی شده است، با این تفاوت که نگاشت گاوس، مجموعه مقدار است. در این پایان نامه، نیز مشخصه اویلر متناظر به زیر مجموعه های اپی— لیپ شیتز از خمینه های ریمانی کامل توازی پذیر، که با χ نمایش داده می شود، را معرفی می کنیم. با این تفاوت که هدف، استفاده از درجه نگاشت مخروط نرمال روی S است. برای این منظور از خمینه های توازی پذیر استفاده نموده، با استفاده از نمایش مخروط نرمال در یک پایه که تابعی تعریف شده روی خمینه M به $\mathbb{R}^n$ است، به تعریف درجه توپولوژیکی از تابعی تعریف شده روی خمینه ای n بعدی به خمینه ای $2n$ بعدی می پردازیم.

قابل ذکر است که، اگر S زیر مجموعه اپی—لیپ شیتز از خمینه کامل توازی پذیر

M باشد و $\chi(S) \neq 0$، آن گاه به ازای هر همسایگی باز U از M با شرط $S \cap U \neq \emptyset$، $\chi(U \cap S)$ لزوماً مخالف صفر نمی باشد. بنابراین مشخصه اویلر، یک مشخصه موضعی نمی باشد.

در پایان، برخی کاربردهای آنالیز غیر هموار و مشخصه اویلر در نظریه تعادل را مورد بررسی قرار می دهیم. به ویژه، شرط کافی برای وجود نقطه تعادل برای یک کلاس از توابع مجموعه مقدار، تعریف شده روی زیر مجموعه فشرده و اپی—لیپ شیتز S از خمینه ریمانی کامل توازی پذیر M، را بیان می کنیم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در این فصل به ارائهٔ برخی از تعاریف، قضایا و نتایج شناخته شده درباره خمینه های ریمانی می پردازیم. منابع اصلی ما در این بخش [۵۳، ۵۷، ۵۹] هستند.

در طول این پایان نامه (M,g) یا به اختصار M، یک خمینهٔ C^∞، مدل بندی شده روی یک فضای هیلبرت H (از بعد متناهی یا نامتناهی) است به طوری که برا ی هر $p \in M$، $g(p) = g_p := \langle .,. \rangle_p$ روی فضای مماس $T_pM \cong H$ یک دو فرم متقارن معین مثبت (ضرب داخلی) است و

$$\|x\|_p = (\langle x,x \rangle_p)^{۱/۲} = g_p(x,x)^{۱/۲}$$

یک نرم معادل روی T_pM (برای هر $p \in M$) القا می کند.

تعریف ۱.۱ . برای هر خم C^1 هموار تکه ای ، $\gamma : [a,b] \to M$ ، طول خم را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\frac{d\gamma}{dt}(s)\|_{\gamma(s)} ds.$$

اینک برای هر دو نقطهٔ $p, q \in M$ تعریف می کنیم:

$$d(p,q) := \inf_{\gamma} \{L(\gamma)\},$$

که در آن γ خم C^1 هموار تکه‌ای است که q, p را در M به هم وصل می کند.

آنگاه d یک متر روی M می باشد که به آن $g-$ فاصله روی M گوییم و این متر همان توپولوژی را روی M القا می کند که M به طور طبیعی به عنوان یک خمینه داراست.

برای این متر، گوی باز و بسته به مرکز p و شعاع r به ترتیب به صورت زیر نمایش داده می شوند،

$$B(p,r) = \{q \in M : d(p,q) < r\}, \ \overline{B}(p,r) = \{q \in M : d(p,q) \leq r\},$$

که در آن $-$ نمایش بستار مجموعه است. لازم به ذکر است که در طول این پایان نامه بستار با cl یا $-$، درون مجموعه با int و نقاط مرزی با ∂ نمایش داده می شوند.

فرض کنید M یک خمینه و T_pM فضای مماس بر M در p باشد، فرض کنید $TM = \coprod_{p \in M} T_pM$ کلاف مماس باشد، آنگاه کلاف مماس TM دارای یک توپولوژی

و ساختار C^∞ است که با این توپولوژی و ساختار C^∞ ، TM یک خمینهٔ هموار است و $\pi : TM \longrightarrow M$ که برای هر $X_p \in T_pM, p \in M$ به صورت $\pi(X_p) = p$ تعریف می شود، یک تابع C^∞ است. به همین ترتیب، با استفاده از T_pM^* که دوگان T_pM می باشد، می توان کلاف هم مماس TM^* از M را تعریف نمود.

فرض کنید M یک خمینه ریمانی باشد، یک میدان برداری روی M تابعی است که به هر نقطه M یک بردار از فضای مماس به آن نقطه نظیر می کند. بنابراین اگر F یک میدان برداری باشد $\pi \circ F$ نگاشت همانی روی M است. اکنون ، تعریف می کنیم:

$$\chi(M) := \{M \text{ روی } C^\infty \text{ میدانهای برداری } \}.$$

یک هموستار آفین [1] یا هموستار خطی یا هموستار عبارتست از یک نگاشت :

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y) \longmapsto \nabla_X Y$$

که برای هر $X, X', Y, Z \in \chi(M)$ و توابع هموار f, g روی خمینهٔ ریمانی M دارای خواص زیر است:

(۱) $\nabla_{fX+gX'}(Y) = f(\nabla_X Y) + g(\nabla_{X'} Y).$

(۲) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$

(۳) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y.$

توجه کنید که منظور از $X(f)(p)$، $df_p(X_p)$ می باشد. به $\nabla_X Y$، مشتق هموردا Y در راستای میدان برداری X گوییم. هموستار آفین ∇ روی خمینهٔ ریمانی M

[1] $Affine\ connection$

متقارن [2] است، اگر

$$[X,Y] \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X.$$

و گوییم هموستار آفین ∇ روی خمینهٔ ریمانی M سازگار با متریک [3] است، هرگاه:

$$X\langle Y,Y'\rangle = \langle \nabla_X Y, Y'\rangle + \langle Y, \nabla_X Y'\rangle.$$

هموستار آفین ∇ که متقارن و سازگار با متریک است را هموستار ریمانی گوییم.

قضیهٔ بنیادی هندسهٔ ریمانی ثابت می کند که یک هموستار ریمانی یکتا روی M وجود دارد. به این هموستار، هموستار لوی چیویتا [4] گوییم. فرض کنید ∇ یک هموستار لوی چیویتا باشد، این هموستار یک مشتق در راستای خم ها تعریف می کند که با D_t نمایش داده می شود. توجه کنید که اگر V یک میدان برداری گسترش پذیر در طول γ باشد، به ازای هر گسترش $\tilde{V}$ از V، $D_tV(t) = \nabla_{\gamma'(t)}\tilde{V}$. متذکر می شویم که بدون کاستن از کلیت میدان های برداری تحت بررسی را گسترش پذیر در نظر می گیریم و نماد V را به جای $\tilde{V}$ استفاده می کنیم. لازم به ذکر است که یک میدان برداری تعریف شده در طول خم دیفرانسیل پذیر $\gamma : I \to M$، یک نگاشت دیفرانسیل پذیر $V : I \to TM$ است به طوری که به ازای هر $t \in I$، $V(t) \in T_{\gamma(t)}M$. یک میدان برداری در طول یک خم γ موازی گفته می شود هرگاه به ازای هر t، $\nabla_{\gamma'(t)}V = 0$. فرض کنید M یک خمینه با هموستار آفین ∇ باشد و $\gamma : (a,b) \longrightarrow M$، یک خم

[2] *Symmetric connection*

[3] *Compatibility with a metric*

[4] *Levi Civita*

هموار باشد، شتاب γ عبارتست از $\nabla_{\frac{d\gamma(t)}{dt}}\frac{d\gamma(t)}{dt}$. خم γ را ژئودزی [5] نسبت به ∇ گوییم، هرگاه شتاب آن برابر صفر شود، یعنی:

$$\nabla_{\frac{d\gamma(t)}{dt}}\frac{d\gamma(t)}{dt} = 0.$$

تذکر ۲.۱ . هر خم γ با سرعت یکه که q,p را در M به هم وصل کند و در شرط $L(\gamma) = d(p,q)$ صدق کند یک ژئودزی است که به آن ژئودزی مینیمال می گوییم.

قضیه ۳.۱ .(وجود و یکتایی ژئودزی). فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی با هموستار لوی چیویتا ∇ باشد. برای هر $p \in M$ ، هر $v \in T_pM$ و هر $t_0 \in \mathbb{R}$ یک فاصلهٔ باز I شامل t_0 و یک ژئودزی $\gamma : I \longrightarrow M$ با خاصیت $\gamma(t_0) = p$ و $\frac{d\gamma}{dt}(t_0) = v$ وجود دارد و هر دو چنین ژئودزی هایی روی دامنهٔ مشترک با هم مساویند.

اثبات . برای اثبات به [۵۳] رجوع شود. ■

اکنون می توان یک ژئودزی بیشین برای $p \in M$ با شرط $\frac{d\gamma}{dt}(t_0) = v$ به دست آورد که دامنهٔ آن اجتماع تمام دامنه های ژئودزی هایی است که درقضیهٔ قبل به دست آوردیم و چون این ژئودزی ها روی دامنهٔ مشترک با هم مساویند، لذا چنین فاصلهٔ بیشینی وجود دارد و γ روی این فاصله درست تعریف شده است. این ژئودزی بیشین را با γ_v نمایش می دهیم.

زیر مجموعهٔ زیر از TM را در نظر می گیریم:

$$\widetilde{T}M := \left\{ v \in TM \ : \ \text{حداقل روی فاصلهٔ } [0,1] \text{ تعریف شده است } \gamma_v \right\},$$

[5] Geodesic

و تابع نمائی $\exp : \tilde{T}M \longrightarrow M$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\exp(V) := \gamma_V(1).$$

تحدید $\exp$ به یک برش T_xM در $\tilde{T}M$ با $\exp_x$ نشان داده می شود.

تعریف ۴.۱ . فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی باشد، $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ را لیپ شیتز گوئیم هرگاه عدد حقیقی مثبت k موجود باشد که،

$$|f(p) - f(q)| \leq kd(p,q) \qquad \forall \;\; p,q \in M.$$

در تعریف فوق d متر ریمانی روی M است و k را ثابت لیپ شیتز f می گوئیم.

تعریف ۵.۱ . فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی باشد، $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ را موضعاً لیپ شیتز گوئیم هرگاه برای هر $a \in M$ ، عدد حقیقی مثبت k و عدد حقیقی $\delta = \delta(a) > 0$ وجود داشته باشند به طوری که:

$$|f(q) - f(p)| \leq kd(p,q) \qquad \forall p,q \in B(a,\delta) \;.$$

در قضیهٔ زیر چند خاصیت مهم از تابع نمائی را یادآوری می کنیم.

قضیه ۶.۱ . برای هر خمینهٔ ریمانی (M,g) و هر $x \in M$ ، یک عدد $r > 0$ و یک نگاشت $\exp_x : B(0_x, r) \subset T_xM \longrightarrow M$ وجود دارند به طوریکه:

(۱). $\exp_x : B(0_x,\delta) \longrightarrow B(x,\delta)$ برای هر $\delta \in (0,r]$ یک دیفئومورفیسم C^∞ است.

(۲). $\exp_x$ قطعه خطهای درون $B(\circ_x, r) \subset T_xM$ که از $\circ_x$ می گذرند را به مسیرهای ژئودزی درون $B(x,r)$ تصویر می کند.

(۳). $d\exp_x(\circ_x) = \mathrm{id}_{T_xM}$.

(۴). $\exp_x : B(\circ_x, \delta) \longrightarrow B(x,\delta)$ ، یک تابع لیپ شیتز با وارون لیپ شیتز است.

به ویژه، با در نظر گرفتن شرط (۳)، برای هر $C > ۱$، می توان r را به اندازهٔ دلخواه کوچک در نظر گرفت، به طوریکه نگاشت های $\exp_x : B(\circ_x, \delta) \longrightarrow B(x,\delta)$ و $\exp_x^{-۱} : B(x,\delta) \longrightarrow B(\circ_x, \delta)$ ، $C-$ لیپ شیتز باشند.

اثبات . برای اثبات به [۵۷] رجوع شود. ■

تعریف ۷.۱ . یک خمینهٔ ریمانی M به طور ژئودزیکی کامل گفته می شود، اگر بازهٔ تعریف هر ژئودزی در M همهٔ $\mathbb{R}$ باشد و این نتیجه می دهد که برای هر $x \in M$ ، نگاشت $\exp_x$ روی همهٔ فضای مماس T_xM تعریف می شود.

قضیهٔ زیر رابطهٔ ژئودزیک کامل بودن خمینه های ریمانی را با کامل بودن توپولوژیکی بیان می کند:

قضیه ۸.۱ . فرض کنید (M,g) یک خمینهٔ ریمانی باشد. شرایط زیر را در نظر بگیرید:

(۱) M با $g-$ فاصله کامل است.

(۲) همهٔ ژئودزیهای M روی کل $\mathbb{R}$ تعریف شده اند.

(۳) برای هر $x \in M$ ، نگاشت $\exp_x$ روی کل T_xM تعریف شده است.

(۴) $x \in M$ وجود دارد به طوری که نگاشت نمائی $\exp_x$ روی کل T_xM تعریف شده است .

آنگاه: (۱)$\Longleftarrow$ (۲) $\Longleftarrow$ (۳) $\Longleftarrow$ (۴).

بعلاوه، اگرفرض کنیم M از بعد متناهی است، آنگاه هر چهار شرط بالا با شرط پنجم زیر معادل است:

(۵) هر زیرمجموعهٔ بسته و d_g- کراندار از M فشرده است.

اثبات . برای اثبات به [۵۷] رجوع شود. ■

هم چنین فرض کنید M یک خمینه ریمانی کامل همبند از بعد متناهی باشد آن گاه به ازای هر $x \in M$، $\exp_x : T_xM \to M$ پوشا است.

قضیه ۹.۱ .(هاف رینو[۶]). اگر M یک خمینهٔ ریمانی کامل و همبند با بعد متناهی باشد، آنگاه هر دو نقطه در M می توانند توسط یک ژئودزی مینیمال به هم وصل شوند.

اثبات . برای اثبات به [۵۷] رجوع شود. ■

قضیه ۱۰.۱ .(اکلند)[۷]. اگر M یک خمینهٔ ریمانی کامل و همبند با بعد نامتناهی باشد، آنگاه برای هر نقطهٔ داده شدهٔ p ، مجموعهٔ

$\{q \in M$: می تواند به p توسطیک ژئودزی مینیمال منحصر به فرد وصل شود $q\}$

در M چگال است.

زیر مجموعه S از خمینه ریمانی M را محدب گوییم هرگاه هر دو نقطه $x, y \in S$ را بتوان با یک ژئودزی یکتا با طول $d(x, y)$ که کاملاً در S است، به هم وصل کرد.

[۶] $Hopf - Rinow$

[۷] $Ekeland$

توجه کنید که برای هر زیر مجموعه محدب U از یک خمینه ریمانی متناهی البعد M و هر دو نقطه $p_1,\ p_2 \in U$، تابع $\exp_{p_i}^{-1}$، $(i = 1, 2)$ روی U خوش تعریف است و

$$\| \exp_{p_1}^{-1}(p_2) \| = d(p_1, p_2).$$

قضیه ۱۱.۱ . (وایت هد)[8]. اگر M یک خمینهٔ ریمانی باشد، آنگاه برای هر نقطه $p \in M$، عدد $c > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر r با شرط $0 < r < c$، گوی $B(p, r) = \exp_p B(0_p, r)$ محدب است.

اثبات . برای اثبات به [۵۷] رجوع شود. ■

شعاع تحدّب [9] از یک خمینه ریمانی M در نقطه p که با $c(p, M)$ نمایش داده می شود، سوپریمم اعداد مثبت r است که $B(p, r)$ محدب است. شعاع تحدّب، از یک خمینه ریمانی M به صورت $c(M) := \inf\{c(p, M) :\ p \in M\}$ تعریف می شود. طبق قضیه وایت هد به ازای هر $p \in M$، $c(p, M) > 0$. از طرف دیگر، تابع $p \mapsto c(p, M)$ روی M پیوسته است. بنابراین اگر $K \subset M$ فشرده باشد، آن گاه $c(K) > 0$، برای جزئیات بیشتر به [۵۳] رجوع کنید.

هر همسایگی باز U شامل $p \in M$ که تصویر دیفئومورفیک یک همسایگی باز از $0_p \in T_pM$ تحت $\exp_p$ باشد، یک همسایگی نرمال است. اگر $\varepsilon > 0$ طوری انتخاب شود که $\exp_p$ روی $B(0_p, \varepsilon)$ دیفئومورفیسم باشد، آن گاه مجموعه $\exp_p(B(0_p, \varepsilon))$ یک

[8] *Whitehead*

[9] *Convexity radius*