دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

عنوان

کران‌هایی برای کمترین مقدار ویژه‌ی M- ماتریس‌ها

استاد راهنما

دکتر مهدی پناهی

استاد مشاور

دکتر مسعود امان

نگارنده

زهرا حسن پورکمال آبادی

شهریور ۱۳۹۱

چکیده

فرض کنید A یک M-ماتریس نامنفرد و $\tau(A)$ کمترین مقدار ویژه‌ی آن باشد. تاکنون کران‌هایی برای $\tau(A)$ در حالتی که A یک M-ماتریس قطرغالب زنجیری ضعیف باشد، داده شده است. این تحقیق کران‌های جدیدی از $\tau(A)$ را برای M-ماتریس نامنفرد کلی A می‌سازد. مثال‌های عددی نشان می‌دهند که نتایج بدست آمده در بعضی حالات، نتایج معلوم قبلی را بهبود می‌بخشند.

واژگان کلیدی: M-ماتریس، حاصل‌ضرب آدامار، کمترین مقدار ویژه، بردار ویژه
تعداد صفحات پایان نامه: ۷۲

تقدیم به

پدر مهربان

و

مادر فداکارم

مهربان فرشتگانی که لحظات ناب باور بودن،

لذت و غرور دانستن،

جسارت خواستن،

عظمت رسیدن

و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آن هاست.

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ی ایثار و از خودگذشتگی، به پاس عاطفه ی سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است، به پاس قلب های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید، و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند.

خدایا...[1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور،

نه حلقه ای برای اسارت و نه دست مایه ای برای تجارت،

بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

---

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

باسپاس از سه وجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...

پدرانمان

موهایشان سپید شد تا ما روسفید شویم...

مادرانمان

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...

استادانمان

باسپاس فراوان از محضر استاد ارجمند آقای دکتر مهدی پناهی که با صبر و شکیبایی مرا در تدوین این پایان نامه یاری نمودند، خانواده ی عزیزم که در همه ی لحظات حامی و پشتیبانم بودند و تشکر ویژه از دوست عزیزم خانم فاطمه شفیعی که بدون حضور و دلگرمی اش پیمودن این راه دشوار بود.

زهرا حسن پور کمال آبادی

شهریور ۱۳۹۱

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

M-ماتریس‌ها رده‌ی خاصی از ماتریس‌ها می‌باشند که کاربردهای زیادی در مسائل زیستی، فیزیکی و علوم اجتماعی دارند. یافتن کران‌هایی برای $\tau(A)$ (کمترین مقدار ویژه‌ی ماتریس نامنفرد A به لحاظ قدر مطلق) موضوع جالبی است که مینک[۲] در [۱۱] به آن پرداخته است. شیواکومار[۳] در سال ۱۹۹۶ میلادی، در [۱۳] کران‌هایی برای $\tau(A)$ در حالتی که A یک M-ماتریس قطرغالب زنجیری ضعیف باشد ارائه نمود. اما از این کران‌ها برای تعیین کران‌هایی برای کمترین مقدار ویژه‌ی هر M-ماتریس نامنفرد نمی‌توان استفاده کرد. در این تحقیق کران‌هایی برای $\tau(A)$، در حالتی که A یک M-ماتریس نامنفرد کلی است، ارائه می‌شود. همچنین در حالتی که A یک M-ماتریس نامنفرد تحویل‌ناپذیر باشد، کران‌هایی برای $\tau(A)$ ارائه شده است. مثال‌های عددی ارائه شده نشان می‌دهند که در بعضی حالات کران‌های بدست آمده در این تحقیق از کران‌های قبلی بهتر هستند.

این تحقیق شامل ۴ فصل می‌باشد.

فصل ۱ این تحقیق تعاریف و مفاهیم مقدماتی را شامل می‌شود، که آشنایی با این مفاهیم برای درک مطالب ادامه‌ی تحقیق ضروری است.

فصل ۲ به معرفی M-ماتریس‌ها و حاصل‌ضرب آدامار ماتریس‌ها پرداخته و قضایایی برای آشنایی بیشتر با آن‌ها ارائه شده که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل ۳، ابتدا کران‌هایی برای درایه‌های قطری و غیر قطری معکوس یک M-ماتریس نامنفرد معرفی می‌شود، سپس کران‌هایی برای شعاع طیفی ماتریس تکرار ژاکوبی یک M-ماتریس نامنفرد بر حسب درایه‌های آن ارائه می‌گردد.

کران‌هایی برای کمترین مقدار ویژه‌ی یک M-ماتریس نامنفرد در فصل ۴ ارائه شده است. همچنین در حالتی که ماتریس تحویل‌ناپذیر نیز باشد، کران‌هایی برای بردار ویژه‌ی متناظر با شعاع طیفی ماتریس تکرار ژاکوبی آن بدست آمده است.

کلیه‌ی محاسبات عددی در این تحقیق به وسیله‌ی نرم افزار MATLAB انجام شده است.

[۲] Minc

[۳] Shivakumar

فصل ۱
مقدمات و مفاهیم اولیه

.

۱.۱ تعاریف و مقدمات

در این بخش ابتدا مفاهیم ماتریسی مورد نیاز در فصول بعد را تعریف کرده و قضایای مربوط به آن‌ها را می‌آوریم. سپس نرم‌های برداری و ماتریسی را بیان می‌کنیم.
مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های حقیقی $m \times n$ با $\mathbb{R}^{m\times n}$، مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های حقیقی مربعی مرتبه‌ی n با $\mathbb{R}^{n\times n}$ و مجموعه‌ی همه‌ی بردارهای حقیقی n مؤلفه‌ای با $\mathbb{R}^n$ نمایش داده می‌شود. فرض می‌کنیم $\mathbf{N} = \{۱, \ldots, n\}$.

تعریف ۱.۱.۱. ماتریس‌های $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ را در نظر بگیرید.

(۱) ماتریس قدر مطلق A را با $|A|$ نشان داده و به صورت

$$|A| = (|a_{ij}|), \quad i = ۱, \ldots, m,\ j = ۱, \ldots, n,$$

تعریف می‌شود.

(۲) $A \geq B$ $(A > B)$، هرگاه برای هر $i = ۱, \ldots, m$ و $j = ۱, \ldots, n$،

$$a_{ij} \geq b_{ij}\,(a_{ij} > b_{ij}).$$

(۳) A مثبت (نامنفی، منفی، نامثبت) نامیده می‌شود هرگاه همه‌ی درایه‌های آن مثبت (نامنفی، منفی، نامثبت) باشد و می‌نویسیم $A > ۰$ $(A \geq ۰, A < ۰, A \leq ۰)$.

تعاریف فوق برای بردارها نیز برقرار می‌باشند.

تعریف ۲.۱.۱. ماتریس مربعی مرتبه‌ی n، $A = (a_{ij})$ را در نظر بگیرید.

(۱) A بالا (پایین) مثلثی نامیده می‌شود هرگاه

$$a_{ij} = ۰, \quad i \geq j \, (i \leq j).$$

(۲) ترانهاده‌ی A را با A^T نشان داده و به صورت

$$A^T = (a_{ji}),$$

تعریف می‌شود.

(۳) A منفرد نامیده می‌شود هرگاه $\det A = ۰$، در غیر این صورت آن را نامنفرد نامند.

(۴) A معکوس‌پذیر نامیده می‌شود، هرگاه ماتریسی مانند B موجود باشد به طوری که

$$AB = BA = I,$$

که I ماتریس همانی $n \times n$ است. B را معکوس A نامیده و با $A^{-۱}$ نمایش می‌دهند.

(۵) A همگرا (به صفر) است هرگاه دنباله ماتریس‌های A، $A^۲$، $A^۳$، ... همگرا به ماتریس صفر باشد، یعنی برای هر $i, j \in \mathbf{N}$،

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} (A^k)_{ij} = ۰.$$

(۶) برای هر $i \in \mathbf{N}$، i-امین مجموع سطری A را با Λ_i نشان داده و به صورت

$$\Lambda_i = \sum_{k=۱}^{n} |a_{ik}|,$$

تعریف می‌شود. مجموع سطری A ثابت است هرگاه برای هر $i, j \in \mathbf{N}$، $\Lambda_i = \Lambda_j$.

(۷) (i, j)-امین مینور A را با M_{ij} نشان داده و دترمینان زیرماتریس بدست آمده از حذف سطر iام و ستون jام A تعریف می‌شود. همچنین

$$A_{ij} = (-۱)^{i+j} M_{ij},$$

(i,j)-امین همسازه‌ی A نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۱.۱. ماتریس مربعی مرتبه‌ی n قطری D با $D = \mathrm{diag}(d_۱, d_۲, \ldots, d_n)$ نمایش داده می‌شود، که در آن $d_۱$، $d_۲$، $\ldots$، d_n درایه‌های قطری و سایر درایه‌ها صفر هستند.

اگر $A = (a_{ij})$ ماتریس مربعی مرتبه‌ی n باشد، آن‌گاه ماتریس $D = \mathrm{diag}(a_{۱۱}, \ldots, a_{nn})$، ماتریس قطری تولید شده توسط A نامیده می‌شود.

تعریف ۴.۱.۱. ماتریس $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ که از تعویض سطرهای (یا ستون‌های) ماتریس همانی بدست می‌آید، ماتریس جایگشت نامیده می‌شود.

ضرب ماتریس جایگشت P از چپ (راست) در ماتریس A باعث تعویض سطرهای (ستون-های) آن می‌شود. اگر P یک ماتریس جایگشت باشد، آن‌گاه $P^TP = I$.

مثال ۵.۱.۱. ماتریس A و ماتریس جایگشت P را به صورت

$$A = \begin{pmatrix} ۵ & -۱ & ۲ \\ ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ \end{pmatrix},$$

در نظر بگیرید. در این صورت

$$AP = \begin{pmatrix} ۲ & ۵ & -۱ \\ ۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{pmatrix}, \quad PA = \begin{pmatrix} ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۱ & ۰ \\ ۵ & -۱ & ۲ \end{pmatrix}.$$

تعریف ۶.۱.۱. ماتریس مربعی مرتبه‌ی n، A برای $n \geq ۲$، تحویل‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه ماتریس جایگشت $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ موجود باشد به طوری که

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{۱۱} & A_{۱۲} \\ O & A_{۲۲} \end{pmatrix},$$

یا

$$PAP^T = \begin{pmatrix} A_{۱۱} & O \\ A_{۲۱} & A_{۲۲} \end{pmatrix},$$

که در آن A_{11} و A_{22} ماتریس‌های مربعی و O ماتریس صفر است. اگر چنین ماتریس جایگشتی وجود نداشته باشد، آن‌گاه A را تحویل‌ناپذیر می‌نامند. در صورتی که A ماتریسی 1×1 با تک درایه‌ی صفر باشد، تحویل‌پذیر و در غیر این صورت تحویل‌ناپذیر است.

به وضوح ماتریسی که تمامی درایه‌های آن ناصفرند، تحویل‌ناپذیر است و ماتریسی که حداقل یک سطر صفر داشته باشد، تحویل‌پذیر است.

مثال ۷.۱.۱. ماتریس‌های

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 6 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید. با فرض

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

داریم

$$PAP^T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

بنابراین A ماتریسی تحویل‌پذیر می‌باشد. بدیهی است که B ماتریسی تحویل‌ناپذیر است.

ملاحظه ۸.۱.۱. *ماتریس مربعی مرتبه‌ی n تحویل‌ناپذیر A و ماتریس قطری D با درایه‌های قطری مثبت را در نظر بگیرید. صفرهای ماتریس‌های AD و DA با ماتریس A از نظر تعداد و مکان یکسانند، لذا AD و DA تحویل‌ناپذیرند. همچنین مکان صفرهای غیرقطری ماتریس $A - C$، که در آن C یک ماتریس قطری است، همان مکان صفرهای غیرقطری ماتریس A می‌باشد. ممکن است صفرهایی روی قطر اصلی $A - C$ ظاهر شده باشند که تاثیری در تحویل‌ناپذیری ندارند، پس $A - C$ نیز تحویل‌ناپذیر است.*

تعریف ۹.۱.۱. ماتریس مربعی مرتبه‌ی n، $A=(a_{ij})$ قطر غالب سطری (ستونی) نامیده می‌شود هرگاه برای هر $i \in \mathbf{N}$،

$$\sigma_i = \frac{۱}{|a_{ii}|}\sum_{j\neq i}|a_{ij}| \leq ۱ \ \left(\delta_i = \frac{۱}{|a_{ii}|}\sum_{j\neq i}|a_{ji}| \leq ۱\right).$$

هرگاه برای هر $i \in \mathbf{N}$، نامساوی به طور اکید برقرار باشد، A قطرغالب سطری (ستونی) اکید نامیده می‌شود.

A قطرغالب سطری (اکید) است هرگاه A^T قطرغالب ستونی (اکید) باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. ماتریس مربعی مرتبه‌ی n، $A=(a_{ij})$ قطرغالب سطری (ستونی) درایه‌ای نامیده می‌شود هرگاه برای هر $i, j \in \mathbf{N}$،

$$|a_{ii}| > |a_{ij}| \ (|a_{ii}| > |a_{ji}|), \quad j \neq i.$$

A قطرغالب سطری درایه‌ای است هرگاه A^T قطرغالب ستونی درایه‌ای باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. ماتریس مربعی مرتبه‌ی n، A قطرغالب زنجیری ضعیف نامیده می‌شود هرگاه برای هر $i \in \mathbf{N}$، $\sigma_i \leq ۱$، $J(A) = \{i \in \mathbf{N} : \sigma_i < ۱\} \neq \phi$ و برای هر $i \in \mathbf{N} \setminus J(A)$، اندیس‌های $i_۱$، $i_۲$، ...، i_k در $\mathbf{N}$ موجود باشند به طوری که $a_{i_r, i_{r+۱}} \neq ۰$، $۰ \leq r \leq k-۱$، که در آن $i_۰ = i$ و $i_k \in J(A)$.

دنباله عناصر ناصفر فوق یک زنجیر از $i_۰$ به i_k تشکیل می‌دهد. واضح است که یک ماتریس قطرغالب زنجیری ضعیف لزوماً بایستی قطرغالب سطری باشد. همچنین یک ماتریس قطرغالب سطری اکید، قطرغالب زنجیری ضعیف است.

مثال ۱۲.۱.۱. ماتریس‌های

$$A = \begin{pmatrix} -۵ & ۰ & ۱ & ۲ & -۱ \\ -۱ & ۸ & -۱ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۴ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۵ & ۱ & ۸ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۰ & ۰ & ۶ \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} ۸ & -۱ & ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ & ۰ & -۴ \\ ۲ & ۱ & -۵ & -۱ & ۰ \\ ۱ & ۰ & ۱ & -۴ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید. ماتریس A قطرغالب سطری، قطرغالب ستونی اکید و نیز قطرغالب زنجیری ضعیف است، اما قطرغالب سطری اکید نمی‌باشد. ماتریس B قطرغالب سطری است اما قطرغالب زنجیری ضعیف نیست.

تعریف ۱۳.۱.۱. یک نرم برداری روی $\mathbb{R}^n$ تابعی است مانند $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ که به هر بردار $x \in \mathbb{R}^n$ یک عدد حقیقی $\|x\|$ با خواص زیر نسبت می‌دهد.

(۱) برای هر بردار ناصفر $x \in \mathbb{R}^n$، $\|x\| > ۰$،

(۲) برای هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{R}$ و هر بردار $x \in \mathbb{R}^n$، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$،

(۳) برای هر $x, y \in \mathbb{R}^n$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

از خواص (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\|x\| = ۰$ اگر و تنها اگر $x = ۰$.

فرض کنید $x = (x_۱, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. برخی از نرم‌های برداری معروف تعریف شده بر $\mathbb{R}^n$ عبارتند از:

(نرم-۱)
$$\|x\|_۱ = \sum_{i=۱}^{n} |x_i|,$$

(نرم اقلیدسی یا نرم-۲)
$$\|x\|_۲ = \left(\sum_{i=۱}^{n} |x_i|^۲\right)^{\frac{۱}{۲}},$$

(نرم بی‌نهایت یا نرم ماکزیمم)
$$\|x\|_\infty = \max_{i \in \mathbf{N}} |x_i|.$$

تعریف ۱۴.۱.۱. یک نرم ماتریسی روی $\mathbb{R}^{m\times n}$ یک تابع حقیقی مانند $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ است که بر این مجموعه تعریف شده است و در خواص زیر صدق می‌کند.

(۱) برای هر ماتریس ناصفر $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ، $\|A\| > ۰$،

(۲) برای هر اسکالر $\alpha \in \mathbb{R}$ و هر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$،

(۳) برای هر $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

از خواص (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\|A\| = ۰$ اگر و تنها اگر $A = ۰$.

تعریف ۱۵.۱.۱. یک نرم ماتریسی مانند $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ با نرم‌های برداری $\|\cdot\|_a$ بر $\mathbb{R}^n$ و $\|\cdot\|_b$ بر $\mathbb{R}^m$ سازگار نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ و هر $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$،

$$\|Ax\|_b \leq \|A\|\|x\|_a.$$

تعریف ۱۶.۱.۱. یک نرم ماتریسی مانند $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای خاصیت زیرضربی است هرگاه برای همه‌ی ماتریس‌های $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$،

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

نرم برداری $\|x\|$ را برای $x \in \mathbb{R}^n$ در نظر بگیرید. یک نرم ماتریسی برای ماتریس‌های حقیقی مربعی مرتبه‌ی n با این نرم متناظر می‌شود که آن را نرم طبیعی حاصل از نرم برداری $\|x\|$ یا نرم فرعی حاصل از نرم برداری $\|x\|$ می‌نامند و به صورت

$$\|A\| = \max_{x \neq ۰} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

یا به طور معادل

$$\|A\| = \max_{\|x\|=۱} \|Ax\|,$$

تعریف می‌شود.

هر نرم ماتریسی طبیعی دارای خواص زیر است [۱۵].

(۱) برای هر $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $\|A\| \geq ۰$ و $\|A\| = ۰$ اگر و تنها اگر $A = ۰$،

(۲) برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و هر $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$،

(۳) برای هر $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$، $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$،

(۴) هر نرم طبیعی با نرم برداری $\|x\|$ که در تعریف آن بکار رفته است، سازگار است، یعنی

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|,$$

(۵) هر نرم طبیعی دارای خاصیت زیرضربی است، یعنی

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|,$$

(۶) برای هر نرم ماتریسی طبیعی مانند $\|\cdot\|$ داریم

$$\|I\| = ۱.$$

گزاره‌ی زیر یک راه عملی برای محاسبه‌ی نرم‌های ماتریسی طبیعی $\|A\|_۱$ و $\|A\|_\infty$ برای هر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ارائه می‌دهد.

گزاره ۱.۱.۱۷. *احکام زیر برقرارند.*

(۱) *نرم ماتریسی حاصل از نرم برداری، نرم-۱ برابر است با*

$$\|A\|_۱ = \max_{j\in \boldsymbol{N}} \sum_{i=۱}^{n} |a_{ij}|.$$

(۲) *نرم ماتریسی حاصل از نرم برداری بی‌نهایت برابر است با*

$$\|A\|_\infty = \max_{i\in \boldsymbol{N}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

برهان. به [۱۵] رجوع شود. □

تعریف ۱۸.۱.۱. یک جداسازی از ماتریس مربعی مرتبه‌ی n، A عبارت از بیان آن به شکل

$$A = M - N,$$

است، که در آن M یک ماتریس نامنفرد می‌باشد. این جداسازی منظم نامیده می‌شود هرگاه $M^{-1} \geq 0$ و $N \geq 0$.

دستگاه معادلات خطی

$$Ax = b, \tag{1.1}$$

که در آن $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ یک ماتریس نامنفرد و x و b بردارهای n مولفه‌ای در $\mathbb{R}^n$ هستند را در نظر بگیرید. روش‌های تکراری زیادی برای حل دستگاه (۱.۱) به وسیله‌ی یک جداسازی مناسب از A به صورت

$$A = M - N, \tag{2.1}$$

با M نامنفرد، فرموله می‌شوند و جواب‌های تقریبی $x^{(t)}$ از رابطه‌ی تکراری

$$Mx^{(t+1)} = Nx^{(t)} + b, \quad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

یا به طور معادل رابطه‌ی تکراری

$$x^{(t+1)} = M^{-1}Nx^{(t)} + M^{-1}b, \quad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

با استفاده از تقریب اولیه‌ی $x^{(0)}$ تولید می‌شوند. ماتریس $M^{-1}N$، ماتریس تکرار متناظر با جداسازی (۲.۱) نامیده می‌شود.

یکی از روش‌های تکراری برای حل دستگاه خطی (۱.۱) روش ژاکوبی است. در این روش ماتریس نامنفرد $A = (a_{ij})$ را به صورت

$$A = D - C,$$

می‌نویسیم که در آن $D = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ و

$$C = -\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

فرض می‌شود که درایه‌های قطری A غیرصفرند. بنابراین دستگاه $Ax = b$ را می‌توان به صورت

$$(D - C)x = b,$$

نوشت. در نتیجه

$$Dx = Cx + b.$$

بنابراین

$$x = D^{-1}Cx + D^{-1}b = T_J x + C_J,$$

که در آن

$$J_A = T_J = D^{-1}C = D^{-1}(D - A) = I - D^{-1}A,$$

ماتریس تکرار ژاکوبی A نامیده می‌شود و

$$C_J = D^{-1}b.$$

قرار می‌دهیم $M = D$ و $N = C$. واضح است که اگر A یک ماتریس با درایه‌های قطری مثبت و درایه‌های غیر قطری نامثبت باشد، آن‌گاه $M^{-1} \geq 0$ و $N \geq 0$، بنابراین در این حالت جداسازی روش ژاکوبی، نمونه‌ای از یک جداسازی منظم می‌باشد.

مثال ۱۹.۱.۱. ماتریس نامنفرد

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید. $A = D - C$ که در آن

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -4 & -5 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

بنابراین ماتریس تکرار ژاکوبی A به صورت

$$J_A = D^{-۱}C = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & -\frac{۲}{۳} & ۰ & -\frac{۱}{۳} \\ -\frac{۱}{۴} & ۰ & \frac{۱}{۴} & ۰ \\ ۰ & -\frac{۱}{۲} & -\frac{۵}{۲} & -۲ \end{pmatrix},$$

بدست می‌آید.

۲.۱ مقادیر ویژه و بردارهای ویژه

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی یک ماتریس یکی از مباحث اصلی در جبر خطی می‌باشند و کاربردهای زیادی در مسائل علمی مختلف دارند. در این بخش چند تعریف و قضیه‌ی مهم در رابطه با آن‌ها بیان می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید A، ماتریس مربعی مرتبه‌ی n باشد. اسکالر λ یک مقدار ویژه‌ی A نامیده می‌شود، هرگاه بردار غیر صفری مانند x موجود باشد به طوری که $Ax = \lambda x$، یا به طور معادل

$$(A - \lambda I)x = ۰.$$

چنین برداری را بردار ویژه‌ی (راست) A متناظر با مقدار ویژه‌ی λ می‌نامند.

بردار ویژه‌ی چپ متناظر با مقدار ویژه‌ی λ از A، بردار غیر صفر y است به طوری که $y^T A = \lambda y^T$.

دستگاه خطی $(A - \mu I)x = ۰$ دارای جواب غیر بدیهی است اگر و تنها اگر

$$\det(A - \mu I) = ۰.$$

واضح است که

$$\varphi(\mu) = \det(A - \mu I),$$

یک چندجمله‌ای درجه‌ی n بر حسب μ می‌باشد که چندجمله‌ای مشخصه‌ی ماتریس A نامیده می‌شود. ریشه‌های این چند جمله‌ای مقادیر ویژه‌ی A هستند. اگر $\lambda_۱$، $\lambda_۲$، ...، λ_k ریشه‌های متمایز چندجمله‌ای مشخصه‌ی A باشند، آن‌گاه می‌توان $\varphi(\mu)$ را به صورت

$$\varphi(\mu) = (-۱)^n (\mu - \lambda_۱)^{\sigma_۱} (\mu - \lambda_۲)^{\sigma_۲} \cdots (\mu - \lambda_k)^{\sigma_k},$$

نمایش داد. عدد صحیح σ_i که با $\sigma(\lambda_i) = \sigma_i$ نشان داده می‌شود، مرتبه‌ی تکرار جبری مقدار ویژه‌ی λ_i نامیده می‌شود. مقدار ویژه‌ی λ از ماتریس A یک مقدار ویژه‌ی ساده نامیده می‌شود، هرگاه مرتبه‌ی تکرار جبری آن برابر با ۱ باشد.

اگر $A = (a_{ij})$ یک ماتریس بالا (پایین) مثلثی مرتبه‌ی n باشد، آن‌گاه چندجمله‌ای مشخصه‌ی آن به صورت

$$\varphi(\mu) = (-1)^n(\mu - a_{11})(\mu - a_{22})\cdots(\mu - a_{nn}),$$

است.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید λ_i، $i \in \mathbf{N}$، مقادیر ویژه‌ی ماتریس مربعی مرتبه‌ی n، A باشند. در این صورت

(۱) شعاع طیفی A را با $\rho(A)$ نمایش داده و به صورت

$$\rho(A) = \max_{i \in \mathbf{N}} |\lambda_i|,$$

تعریف می‌شود.

(۲) کمترین مقدار ویژه‌ی A را با $\tau(A)$ نمایش داده و به صورت

$$\tau(A) = \min_{i \in \mathbf{N}} |\lambda_i|,$$

تعریف می‌شود.

(۳) مجموعه‌ی همه‌ی مقادیر ویژه‌ی A را طیف A نامیده و آن را با $\sigma(A)$ نشان می‌دهند.

مثال ۳.۲.۱. ماتریس

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

را در نظر بگیرید. چند جمله‌ای مشخصه‌ی A به صورت

$$\varphi(\mu) = \det(A - \mu I) = (\mu - 1)(\mu - 2)^2,$$

است. بنابراین مقادیر ویژه‌ی A برابر

$$\lambda_۱ = ۱, \quad \lambda_۲ = ۲,$$

با مرتبه‌ی تکرار جبری

$$\sigma(\lambda_۱) = ۱, \quad \sigma(\lambda_۲) = ۲,$$

می‌باشند. طیف A برابر است با $\sigma(A) = \{۱, ۲\}$، $\rho(A) = ۲$ و $\tau(A) = ۱$.

فرض کنید A ماتریس مربعی مرتبه‌ی n، λ یک مقدار ویژه‌ی A و x بردار ویژه‌ی متناظر با آن باشد. در این صورت به راحتی می‌توان بررسی نمود که

(۱) λ^k یک مقدار ویژه‌ی A^k و x بردار ویژه‌ی متناظر با آن است،

(۲) اگر A ماتریسی نامنفرد باشد، آن‌گاه $\frac{۱}{\lambda}$ مقدار ویژه‌ی $A^{-۱}$ با بردار ویژه‌ی نظیر x می‌باشد،

(۳) اگر α و τ اسکالرهای دلخواهی باشند، آن‌گاه $\alpha\lambda - \tau$ یک مقدار ویژه‌ی ماتریس $\alpha A - \tau I$ بوده و x بردار ویژه‌ی نظیر آن می‌باشد،

(۴) λ مقدار ویژه‌ی A^T و x بردار ویژه‌ی چپ نظیر آن است.

ملاحظه ۱.۲.۴. *فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ماتریسی نامنفرد با درایه‌های قطری ناصفر و $C = D - A$، که در آن D ماتریس قطری نامنفرد تولید شده توسط A می‌باشد. $J_A = D^{-۱}C$ و $J_{A^T} = D^{-۱}C^T$، به ترتیب ماتریس تکرار ژاکوبی A و A^T می‌باشند و $\rho(J_A) = \rho(J_{A^T})$. برای اثبات این مطلب کافی است نشان دهیم چند جمله‌ای مشخصه‌ی J_A و J_{A^T} با هم برابرند. فرض کنید $\varphi_{J_A}(\mu)$ و $\varphi_{J_{A^T}}(\mu)$، به ترتیب چندجمله‌ای مشخصه‌ی J_A و J_{A^T} باشند. در این صورت با توجه به این که دترمینان یک ماتریس با دترمینان ترانهاده‌ی آن برابر است، داریم*

$$\begin{aligned}
\varphi_{J_A}(\mu) &= \det(D^{-۱}C - \mu I)\\
&= \det(C^T D^{-۱} - \mu I)\\
&= \det((C^T - \mu D)D^{-۱})\\
&= \det(C^T - \mu D)\det(D^{-۱})\\
&= \det(D^{-۱})\det(C^T - \mu D)\\
&= \det(D^{-۱}(C^T - \mu D))\\
&= \det(D^{-۱}C^T - \mu I)\\
&= \varphi_{J_{A^T}}(\mu).
\end{aligned}$$