دانشگاه پیام نور

واحد مشهد

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه جهت اخذ کارشناسی ارشد

بررسی خواص نگاشتهای حافظ قائم متساوی الساقین و پایداری آن

استاد راهنما:

سرکار خانم دکتر ثریا طالبی

استاد مشاور:

آقای دکتر مجید میرزا وزیری

نگارش:

مرتضی خانی

زمستان ۸۸

مرکز مشهد
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت کارشناسی ارشد ریاضی
گرایش آنالیز

عنوان:

بررسی خواص نگاشتهای حافظ تعامد متساوی الساقین

استاد راهنما:
سرکار خانم دکتر ثریا طالبی

استاد مشاور:
آقای دکتر مجید میرزاوزیری

نگارش:
مرتضی خانی

زمستان ۱۳۸۸

تاریخ: ۱۳۸۸/۱۲/۱۰
۰۸۱/۸/۲۸۲۶۴
پیوست: ....

دانشگاه پیام نور

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

بسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : **بررسی خواص نگاشتهای حافظ تعامد متساوی الساقین** که توسط **مرتضی خانی** تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تایید می باشد.

تاریخ دفاع : ۱۳۸۸/۱۲/۳ نمره : ۱۸/۷۵ هجده و هفتاد و پنج درجه ارزشیابی : عالی

اعضای هیأت داوران :

نام و نام خانوادگی:	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
دکتر ثریا طالبی	استاد راهنما	استادیار	
	استاد راهنمای همکار		
دکتر مجید میرزاوزیری	استاد مشاور	دانشیار	
دکتر آقاسی زاده	استاد داور	استادیار	آقاسی زاده
دکتر عقیله حیدری	نماینده گروه آموزشی	دانشیار	

بسمه تعالی

نام خانوادگی : خانی	نام : مرتضی
عنوان پایان نامه : بررسی خواص نگاشتهای حافظ تعامد متساوی الساقین	
استاد راهنما : دکتر ثریا طالبی	استاد مشاور :دکتر مجید میرزا وزیری
نماینده گروه آزمایشی : دکتر عقیله حیدری	استاد داور : دکتر آقاسی زاده

درجه تحصیلی : کارشناسی ارشد	رشته : ریاضی	گرایش : محض
دانشگاه : پیام نور	مرکز : مشهد	تاریخ دفاع :۱۳۸۸/۱۲/۳

تعداد صفحه :

کلید واژه : نگاشتهای حافظ تعامد ، تعامد تقریبی ، تعامد متسای الساقین(تقریبی)

چکیده

فرض کنید X یک فضای نرمدار حقیقی باشد . آنگاه برای هر $x,y\in X$: x را **تعامد متساوی الساقینی** بر y گوئیم اگر :

$$x\perp_i y\Leftrightarrow\|x+y\|=\|x-y\|$$

و برای هر $x,y\in X$ ، x را **تعامد متساوی الساقینی تقریبی** بر y گوئیم هر گاه :

$$x\perp_i^\varepsilon y\Leftrightarrow\left|\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right|\leq 4\varepsilon\|x\|\|y\|$$

$$x^\varepsilon\perp_i y\Leftrightarrow\left|\|x+y\|-\|x-y\|\right|\leq\varepsilon\left(\|x+y\|+\|x-y\|\right)$$

در این پایان نامه **نگاشتهایی** را که **تعامد متساوی الساقینی** را **حفظ** می کنند را مورد بررسی قرار می دهیم .

و همچنین خواص **پایداری نگاشتهای حافظ تعامد متساوی الساقینی** را مورد کنکاش قرار می دهیم.

بسم الله الرحمن الرحيم

In the name of God

به نام خالق یکتا

پروردگارا . . .

به من آرامش ده

تا بپذیرم آنچه را که نمی توانم تغییر دهم

دلیری ده

تا تغییر دهم آنچه را می توانم تغییر دهم

بینش ده

تا تفاوت این دو را بدانم

مرا فهم ده

تا متوقع نباشم دنیا و مردم آن مطابق میل من رفتار کنند .

جبران خلیل جبران

تقدیم به پدر عزیزم و مادر مهربانم

تقدیم به همسر خوبم

و تقدیم به خواهرم و برادرانم

مقدمه

در این پایان نامه یکی از بحث های روز دنیا در علم ریاضیات مورد بررسی قرار گرفته است که بسیار جذاب و براحتی قابل درک می باشد .

این پایان نامه شامل سه فصل می باشد .

فصل اول پیش نیازی از تعاریف و قضایایی که قبلا با آنها آشنا شده ایم را شامل می شود . از جمله ی آنها فضاهای ضرب داخلی و برداری و هیلبرت می باشند . و همچنین اشاره ای مختصر به بحث اصلی مان یعنی تعامد کرده ایم .

فصل دوم شامل قضایا و تعاریف دقیقتر و کاربردی تر برای فصل بعدی می باشد . در این فصل تعامد تقریبی و نگاشتهای حافظ تعامد تقریبی[1] و قضایای مربوط به آنها آورده شده است .

فصل سوم که پایان بخش این پایان نامه است مشتمل بر تعامدی جدید در فضاهای نرمدار یعنی تعامد متساوی الساقین[2] و تعامد متساوی الساقین تقریبی[3] می باشد . و موضوع دیگری که مورد بررسی قرار گرفته است موضوع نگاشتهای حافظ این نوع تعامد می باشد . و در نهایت پایداری این نگاشتها را در شرایط و فضاهای دیگر مورد کنکاش قرار داده ایم .

مرتضی خانی

اسفندماه

۱۳۸۸

1: Approximately orthogonality preserving
2: Isosceles-orthogonality
3: Approximately isosceles-orthogonality

فهرست

فصل ۱

مقدمه ای بر فضاهای برداری و ضرب داخلی

در این فصل با توجه به نیاز تعاریف مقدماتی که در فصلهای بعدی به آنها اشاره شده و یا بکار برده شده است را آورده ایم .

۱-۱: فضای برداری

۱-۱-۱: تعریف

مقصود از یک **فضای برداری** ، مجمو عه ای مانند V است که روی آن دو عمل جمع و ضرب اسکالر با خواص زیر تعریف شده است :

v_1 : به ازای هر $x, y \in V$ ، $x + y = y + x$

v_2 : به ازای هر $x, y, z \in V$ ، $(x + y) + z = x + (y + z)$

v_3 : عضوی مانند $0 \in V$ موجود باشد (عضو خنثی) بطوریکه به ازای هر $x \in V$ ،

$x + 0 = 0 + x = x$

v_4 : به ازای هر $x \in V$ ، عضوی مانند $(-x) \in V$ (قرینه x) موجود باشد

بطوریکه $x + (-x) = (-x) + x = 0$

v_5 : به ازای هر $x \in V$ و هر اسکالر λ ، $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

v_6 : به ازای هر $x, y \in V$و اسکالر های دلخواه λ, μ ، $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$

v_7 : به ازای هر $x \in V$و اسکالر های دلخواه λ, μ ، $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$

v_8 : عضوی مانند $1 \in V$ (عضو همانی ضربی) موجود باشد بطوریکه به ازای هر $x \in V$ ،

$x.1 = 1.x = x$

v_9 : عضوی مانند $x^{-1} \in V$ (وارون ضربی) موجود باشد بطوریکه به ازای هر $x \in V$

، $x.x^{-1} = x^{-1}.x = 1$

هنگامی که اسکالرها اعداد حقیقی باشند ، فضای برداری را فضای برداری حقیقی می نامیم و اگر اعداد مختلط باشند ، فضای برداری مختلط می نامیم .

متذکر می شویم که در تعریف فضای برداری نیازی نیست که اسکالرها را به اعداد حقیقی یا مختلط محدود کنیم . در حقیقت اسکالرها می توانند به هر میدان F (میدانی که هر عضو ناصفر آن وارون ضربی دارد) متعلق باشد . برای آنکه نشان دهیم اسکالرها به F تعلق دارند بهتر است بگوئیم V یک فضای برداری روی میدان F است .

۱- ۲ : نگاشت های خطی

با مفهوم نگاشت خطی قبلا آشنا شده اید اما برای یادآوری دوباره اشاره ای مختصر به آن می کنیم.

۱-۲-۱ : تعریف

اگر V و W دو فضای برداری روی میدان F باشند ، آنگاه منظور از یک **نگاشت خطی** (یاتبدیل خطی) از V به W تابعی است مانند $f:V\to W$ بطوریکه :

۱: به ازای هر $x\in V$ ، $f(x+y)=f(x)+f(y)$

۲: به ازای هر $x\in V$ و $\lambda\in F$ ، $f(\lambda x)=\lambda f(x)$

اگر $f:V\to W$ خطی باشد ، آنگاه گاهی اوقات V را فضای مبدا و W را فضای مقصد f می نامند .

۱-۲-۲ : مثال

فرض کنید $R_n[x]$ مجموعه ی چند جمله ایهای حد اکثر از درجه ی n باشد و نگاشت مشتق $D:R_n[x]\to R_n[x]$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید

$$D(a+a_1x+\ldots+a_nx^n)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}$$

براحتی می توان شرایط تعریف نگاشت خطی را برای این نگاشت بررسی کرد .

۱-۳ : فضای ضرب داخلی

در سراسر این مقاله ، تنها فضاهای برداری حقیقی و مختلط یعنی ، برداری بر روی میدان اعداد حقیقی و یا اعداد مختلط در نظر گرفته شده است . مقصود اصلی ما مطالعه فضاهای برداری است که در آنها سخن گفتن از « طول » و « تعامد » دو بردار معنی داشته باشد . این کار را با نوع خاصی از توابع اسکالری ، معروف به ضرب داخلی روی جفت بردارها انجام خواهیم داد .
مثالی از ضرب داخلی همان ضرب نقطه ای یا اسکالری بردارهای در R^3 است . ضرب اسکالری بردارهای $\alpha=(x_1,x_2,x_3)$ و $\beta=(y_1,y_2,y_3)$ در R^3 عبارت است از :

$$\alpha.\beta=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$$

۱-۳-۱ : تعریف

فرض کنیم F میدان اعداد حقیقی یا اعداد مختلط و V فضای برداری روی میدان F باشد .یک **ضرب داخلی** روی V تابعی است $\langle .,. \rangle$ که به ازای همه ی α و β و γ ی در V و همه ی اسکالرهای C داشته باشیم :

۱: $\langle \alpha+\beta,\gamma \rangle = \langle \alpha,\gamma \rangle + \langle \beta,\gamma \rangle$

۲: $\langle c\alpha,\beta \rangle = c\langle \alpha,\beta \rangle$

۳: $\langle \alpha,\beta \rangle = \overline{\langle \beta,\alpha \rangle}$

۴: برای $\alpha \neq 0$ ، $\langle \alpha,\alpha \rangle > 0$

۵: $\langle x,x \rangle = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$

تذکر : با استفاده از شرایط (**۱**)،(**۲**)،(**۳**) می توان شرط زیر را نیز تعریف کرد.

۶: $\langle \alpha, c\beta+\gamma \rangle = \overline{c}\langle \alpha,\beta \rangle + \langle \alpha,\gamma \rangle$

۱-۳-۲ : نکته

وقتی F میدان اعداد حقیقی باشد ، مزدوج های مختلطی که در (**۳**)و(**۶**) ظاهر می شوند ، ضروری نی‌ستند ،اما در حالت مختلط برای سازگاری شرایط لازم می باشند .

نکته : اگر به شرایط تعریف شده برای فضای ضرب داخلی دو شرط دیگر اضافه کنیم تعریف جدید زیر حاصل می شود .

۱-۳-۳ : تعریف

فضای برداری مختلط X را یک **فضای خطی نرمدار** نامیم اگر به ازای هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که :

۱: به ازای هر $x, y \in X$ ، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

۲: اگر $x \in X$ و $\alpha \in C$ اسکالر باشد ، $\|\alpha x\| = \alpha\|x\|$.

۳: $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

۱-۳-۴ : تعریف

نگاشت $\langle .,. \rangle : X \times X \to R$ در شرایط **نیم ضرب داخلی** صدق می کند اگر علاوه بر خواص تعریف شده برای ضرب داخلی در دو شرط زیر نیز صدق کند .

a : $\langle x,x \rangle = \|x\|^2$

b : $|\langle x,y \rangle| \le \|x\|\|y\|$ (نامساوی کوشی – شوارتز)

۱-۳-۴ : مثال

روی F^n ضرب داخلی وجود دارد که ما آن را ضرب داخلی استانده می نامیم این ضرب داخلی روی $\alpha = (x_1, x_2, ..., x_n)$ و $\beta = (y_1, y_2, ..., y_n)$ با $\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_i x_i \bar{y}_i$ تعریف می شود .

۱- ۴: فضای باناخ

۱-۴-۱ : قضیه

یک فضای برداری نرمدار ،کامل است اگر و تنها اگر هر دنباله کوشی ، همگرا باشد .

۱-۴-۲ : تعریف

اگر یک فضای برداری نرمدار ، کامل باشد **فضای باناخ** نامیده می شود .

به عنوان مثال ساده ترین فضای باناخ خود میدان اعداد مختلط با نرم $\|x\| = |x|$ می باشد . و نیز $C_0(x)$ با نرم سوپریمم یک فضای باناخ می باشد .

نکته : فضای باناخ حقیقی نیز می توان مطرح کرد . تعریف همان است جز آنکه تمام اسکالرها حقیقی فرض می شوند .

نگاشت A از یک فضای برداری X به یک فضای برداری Y ، یک نگاشت خطی (یا عملگر خطی و یا تبدیل خطی) در نظر می گیریم برای هر x_1 و x_2 متعلق به X و هر عدد حقیقی a_1 و a_2 داریم :

$$A(a_1 x_1 + a_2 x_2) = a_1 A x_1 + a_2 A x_2$$

اگر X و Y دو فضای برداری نرمدار باشند . عملگر خطی A را کراندار گوئیم هر گاه یک عدد ثابت M موجود باشد بطوریکه به ازای همه ی x ها داشته باشیم : $\|Ax\| \le M\|x\|$.
کوچکترین مقدار این M ها را نرم A وبا $\|A\|$نشان می دهیم . بنابراین

$$\|A\| = \left\{ \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \in X, x \neq 0 \right\}$$

و همچنین داریم

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \left\{ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \right\} = \sup_{\|x\|\le 1} \{\|Ax\|\}$$

۱-۴-۳ : قضیه

به ازای تبدیل خطی f از فضای خطی نرمدار X به توی فضای خطی نرمدار Y هر یک از سه شرط زیر دو شرط دیگر را ایجاب می کند :

۱: f **کراندار** است .

۲: f **پیوسته** است .

۳: f در **یک نقطه** از X **پیوسته** است .

اثبات :

چون $\|f(x_1 - x_2)\| \le \|f\| \|x_1 - x_2\|$، واضح است که (۱) شرط (۲) را نتیجه می دهد و از (۲) به شرط (۳) به صورت بدیهی نتیجه حاصل می گردد.حال فرض کنیم f در x_0 پیوسته باشد . پس به ازای هر $\varepsilon > 0$ می توان $\delta > 0$ ای چنان یافت که $\|x - x_0\| < \delta$ نامساوی $\|fx - fx_0\| < \varepsilon$ را ایجاب کند . به عبارت دیگر $\|x\| < \delta$ ، نامساوی

$$\|f(x_0 + x) - fx_0\| < \varepsilon$$

را ایجاب می کند . ولی در این صورت خطی بودن f نشان می دهد که $\|fx\| < \varepsilon$. لذا $\|f\| < \frac{\varepsilon}{\delta}$ و (۳) شرط (۱) را ایجاب خواهد کرد .

۱-۴-۴ : قضیه

فضای B متشکل از همه ی عملگر های خطی کراندار f از فضای برداری نرمدار X بر یک فضای باناخ Y خود یک فضای باناخ است .

۱-۵ : فضای هیلبرت

۱-۵-۱ : تعریف

فضای باناخ H را فضای **هیلبرت** گوئیم اگر مجهز به تابع $\langle x,y\rangle : H\times H \to R$ که دارای خواص زیر باشد .

۱ : $\langle x,x\rangle = \|x\|^2$

۲ : $\langle x,y\rangle \geq 0$

۳ : $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\langle x,y\rangle$ را ضرب داخلی x و y (که قبلا آن را تعریف کرده ایم)می نامیم .

۱-۵-۲ : مثال

دو مثال بدیهی عبارتند از یکی از فضای R^n با $\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ و دیگری فضای l^2 با $\langle x,y\rangle = \sum x(t)\overline{y(t)}$ است .

۱-۵-۳ : قضیه (نمایش ریس)

اگر f یک تابعک خطی کراندار روی فضای هیلبرت H باشد ،در این صورت یک $y \in H$ وجود دارد بطوریکه برای هر x، $f(x) = \langle x,y\rangle$ آنگاه $\|f\| = \|y\|$ [۱ ، قضیه ۳،۹]

۱-۶ : تعامد و انواع آن

۱-۶-۱:تعریف

فرض کنید H یک فضای هیلبرت و $u,v\in H$ و Y,X زیر مجموعه هایی از H باشند می گوئیم u عمود بر v است اگر $\langle u,v\rangle = 0$ همچنین گوئیم u بر Y عمود است اگر برای هر

$y \in Y \quad \langle u,y\rangle = 0,$.و همچنین X عمود بر Y است اگر برای هر $x \in X$ و $y \in Y$ داشته باشیم : $\langle x,y\rangle = 0$

نکته۱ : مجموعه ی همه ی بردارهای عمود بر Y را با $Y^{\perp}$ نشان داده می شود .

نکته۲ : اگر u بر v عمود باشد آنگاه v نیز بر u عمود می باشد و داریم :

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

نکته۳ : $X \subseteq Y^{\perp}$ اگر و فقط اگر $Y \subseteq X^{\perp}$ (و یا $X^{\perp} \subseteq Y^{\perp}$ اگر $Y \subseteq X$) همچنین اگر $u \in Y^{\perp}$ آنگاه $Y \subseteq \{u^{\perp}\}$.

نکته۴ : اگر $y \in Y \cap Y^{\perp}$ آنگاه پس $\langle y,y\rangle = 0$ و نتیجه می شود $y = 0$ و می توان گفت $Y \cap Y^{\perp} = 0$.

نکته ۵ : در H مجموعه S را یک دستگاه متعامد می نامیم اگر هر دو عنصر φ و ψ متعلق به S متعامد باشند ، یعنی $\langle \varphi,\psi\rangle = 0$. همچنین S را یک دستگاه متعامد یکه نامیم هرگاه شرط فوق را داشته باشد و برای هر φ متعلق به S داشته باشیم $\|\varphi\| = 1$. فاصله هر دو عنصر یک دستگاه متعامد یکه با یکدیگر برابر $\sqrt{2}$ است .

در فضای نرمدار X می توان تعامد هایی دیگر نیز تعریف کرد که ما در اینجا به چند تعریف جدید دیگر از تعامد را تعریف می کنیم .

۱-۶-۲ : تعریف

فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار حقیقی یا مختلط باشند . آنگاه نگاشت خطی $f : X \to Y$ را حافظ تعامد گوئیم هر گاه برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم :

$$x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y)$$

۱-۶-۳ : تعریف

***i* –متعامد**[۱] :(تعامد متساوی الساقینی) فرض کنید X یک فضای نرمدار حقیقی یا مختلط باشد . آنگاه برای هر $x, y \in X$، x و y را ***i* – تعامد** گوئیم $(x \perp_i y)$ اگر و فقط اگر :

$$\|x+y\| = \|x-y\|$$

1: Isoceles-orthogonality(i-orthogonality)

p-متعامد[5] : فرض کنید X یک فضای نرمدار حقیقی یا مختلط باشد . آنگاه برای هر $x,y\in X$، x را **p- تعامد** بر y گوئیم $(x\perp_P y)$ اگر و فقط اگر :

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$$

تعامد سینگر[6] : فرض کنید X یک فضای نرمدارحقیقی یا مختلط باشد . آنگاه برای هر $x,y\in X$، x را **تعامد سینگر** بر y نامیم $(x\perp_S y)$ اگر و فقط اگر :

$$\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|=\left\|\frac{x}{\|x\|}-\frac{y}{\|y\|}\right\|$$

تعامد بیرخوف-جیمز[7] : فرض کنید X یک فضای نرمدار(روی $K\in\{R,C\}$) باشد . آنگاه برای هر $x,y\in X$، x را تعامد **بیرخوف - جیمز** بر y گوئیم $(x\perp_B y)$ هرگاه برای هر $\alpha\in K$ داشته باشیم:

$$\|x+\alpha y\|\ge\|x\|$$

که در فصلهای بعدی بیشتر و کاملتر به تعامد متساوی الساقینی خواهیم پرداخت .تعامد بیرخوف - جیمز را می توان تقریبی آن نیز بیان کردکه در فصل **۲** اشاره ای به آن خواهد شد .

۱-۷ : ایزومتری

۱-۷-۱ : تعریف

فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار باشند آنگاه نگاشت (خطی) $f:X\to Y$ را **ایزومتری** (خطی) گوئیم اگر برای هر $x\in X$ داشته باشیم : $\|fx\|=\|x\|$
یک مثال بدیهی نگاشت همانی را در نظر بگیرید $I:X\to X$ که براحتی می توان گفت

$\|Ix\|=\|x\|$.

2: p-orthogonality
3: Singer orthogonality
4: Birkhoff- James orthogonality

۱-۷-۲ : تعریف

فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار باشند آنگاه نگاشت $f : X \to Y$ را ε - **ایزومتری** یا ایزومتری تقریبی گوئیم اگر برای هر $x \in X$ داشته باشیم :

$$\left| \; \|fx\| - \|x\| \; \right| \le \varepsilon \|x\| \; .$$

۱-۷-۳ : تعریف

فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار باشند آنگاه نگاشت $f : X \to Y$ را یک نگاشت **تشابه خطی**[۸] گوئیم هرگاه برای هر $x \in X$ ، $\gamma > 0$ موجود باشد بطوری‌که :

$$\|fx\| = \gamma \|x\|$$

کوهلر و رزونتال[۹] [**۲**] نشان دادند که یک نگاشت خطی از یک فضای نرمدار بتوی خودش یک ایزومتری است اگر و فقط اگر نیم ضرب داخلی را حفظ کند. که این مطلب را می توان تعمیم داد.

۱-۷-۴ : قضیه

فرض کنید X و Y دو فضای نرمدار حقیقی یا مختلط باشند(با نیم ضرب داخلی بترتیب $\langle .,. \rangle_X$ و $\langle .,. \rangle_Y$) . و $f : X \to Y$ یک عملگر خطی باشد . آنگاه $f : X \to Y$ یگ تشابه خطی است یا به عبارتی موجود است بطوربکه :

$$\|fx\| = \gamma \|x\| \qquad x \in X$$

اگر و فقط اگر

$$\langle fx, fy \rangle_Y = \gamma^2 \langle x, y \rangle_X \qquad x, y \in X$$

اثبات :[۷ . قضیه ۲،۱]

5:Llinear similarity
6: Koehler and Rosenthal