دانشگاه پیام نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

دررشته ریاضی کاربردی

دانشکده علوم پایه

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه:

حل عددی معادلات جبری با استفاده از روش اختلال هموتوپی و مقایسه آن با روش تجزیه آدومین

استاد راهنما:

دکتر علیرضا وحیدی

استاد مشاور:

دکتر محمدحسن بیژن زاده

نگارش:

صدیقه قوام سعیدی

شهریور ۱۳۸۹

به نام خدایی که در این نزدیکی است

دانشگاه پیام نور

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

دانشکده علوم پایه

گروه علمی ریاضی

عنوان پایان نامه:

حل عددی معادلات جبری با استفاده از روش اختلال هموتوپی و مقایسه آن با روش تجزیه آدومین

استاد راهنما:

دکتر علیرضا وحیدی

استاد مشاور:

دکتر محمد حسن بیژن زاده

نگارش:

صدیقه قوام سعیدی

شهریور ۱۳۸۹

تقدیم به:

پدر بزرگوارم؛ حمیدرضا به پاس حمایت هایش

مادر صبورم؛ مرضیه به پاس فداکاری هایش

خواهرم فاطمه و برادرانم امیدرضا، حامد، وحید و علی، به پاس همراهی شان

و

دوست مهربانم؛ سمانه برزگر و مادر گرامی اش به پاس محبتهایشان

تقدیر و تشکر:

بر خود لازم می دانم که از زحمات بی شائبه و حمایت های همه جانبه جناب آقای دکتر علیرضا وحیدی، استاد راهنمای گرانقدر کمال تشکر و سپاس را داشته باشم. همچنین از آقای دکتر محمد حسن بیژن زاده استاد مشاور این پایان نامه قدردانی می کنم. در پایان از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر اسماعیل بابلیان که زحمت داوری پایان نامه این جانب را بر عهده گرفتند و حضور ایشان در جلسه دفاعیه موجبات افتخار من را فراهم نمود، سپاسگزاری می نمایم.

چکیده

یکی از اساسی‌ترین مسایل در آنالیز عددی، یافتن ریشه معادله $f(x)=0$ است. در اکثر حالتها پیدا کردن ریشه تحلیلی این معادله مشکل است. بنابراین یافتن تکنیکهای عددی برای حل آن از اهمیت خاصی برخوردار است. در این پایان نامه ضمن تشریح روشهای تجزیه آدومین، شروع مجدد و اختلال هموتوپی، این روشها برای حل معادله $f(x)=0$ به‌کار گرفته شده‌اندو نتایج حاصل با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

واژگان کلیدی: روش تجزیه آدومین، روش شروع مجدد بر اساس روش تجزیه آدومین، روش اختلال هموتوپی

فهرست

عنوان	صفحه
مقدمه	**۱**
فصل اول: روش اختلال هموتوپی	**٦**
۱–۱ هموتوپی	٦
۱–۲ روش اختلال هموتوپی خی	۹
۱–۳ همگرایی روش اختلال هموتوپی	۱۲
فصل دوم: روش تجزیه آدومین	**۱۵**
۲–۱ مقدمه	۱۵
۲–۲ سیر تاریخی روش تجزیه آدومین	۱٦
۲–۳ ساختار کلی روش تجزیه آدومین	۱۹
۲–٤ مفاهیم اساسی در نظریه تجزیه	۲۰
۲–٤–۱ تعاریف و مفاهیم اولیه	۲۰
۲–٤–۲ سری تجزیه اصلی	۲۲
۲–٤–۳ سری تجزیه آدومین	۲۳
۲–٤–٤ سری تجزیه آدومین از مرتبه متناهی	۲۹
فصل سوم: روش تجزیه آدومین برای حل معادلات غیرخطی	**۳۰**
۳–۱ مقدمه	۳۰
۳–۲ روش تجزیه آدومین برای حل معادلات $f(x)=0$	۳۱
۳– ۳ همگرایی روش تجزیه آدومین	۳۲
۳–٤ مثال های عددی	۳٤
۳– ۵ نتیجه گیری	۳۹

فصل چهارم: حل معادلات غیرخطی به روش شروع مجدد ٤٠
٤–١ مقدمه ٤٠
٤–٢ روش شروع مجدد برای حل معادلات $f(x)=0$ ٤١
٤–٢–١ الگوریتم روش شروع مجدد ٤٢
٤–٣ مثال های عددی ٤٣
٤–٤ نتیجه گیری ٤٨

فصل پنجم: روش اختلال هموتوپی در حل معادلات غیرخطی ٤٩
٥–١ مقدمه ٤٩
٥–٢ روش اختلال هموتوپی در حل معادلات غیرخطی ٥٠
٥–٣ مثال های عددی ٥١
٥–٤ مقایسه روشهای تجزیه آدومین، شروع مجدد و اختلال هموتوپی ٥٩
٥–٥ روش اختلال هموتوپی اصلاح شده ٥٩
٥–٦ مثال های عددی ٦٣

فصل ششم: معادل بودن روش تجزیه آدومین و روش اختلال هموتوپی
در حل معادلات غیر خطی ٦٨
٦– ١ مقدمه ٦٨
٦– ٢ روش تجزیه آدومین ٦٩
٦– ٣ روش اختلال هموتوپی ٧٠
٦– ٤ معادل بودن ADM و HPM درحل معادلات غیرخطی ٧١
واژه‌نامه ٧٤
منابع ٧٦

مقدمه

بیشتر پدیده‌ها در دنیای اطراف ما غیرخطی هستند و با معادلات غیرخطی توصیف می‌شوند. با پیدایش کامپیوترهایی با دقت بالا، حل مسائل خطی آسان و آسانتر شدند. اما در حالت کلی به‌دست آوردن جوابهای دقیق مسائل غیرخطی مشکل است. اگرچه در حال حاضر به ابرکامپیوترهایی با پردازش بالا و نیز نرم‌افزارهای محاسباتی خوبی نظیر *Mathematica,Maple* و غیره دسترسی داریم، اما اغلب به‌دست‌آوردن جواب تحلیلی یک مسأله غیرخطی از جواب عددی آن مشکل‌تر است.
مزیت آشکار روشهای عددی بر روشهای تحلیلی این است که فنون عددی در حالت کلی برای مسائل غیرخطی با دامنه محاسباتی پیچیده به‌کار گرفته می‌شوند، بنابراین روشهای فوق مسائل غیرخطی را در دامنه ساده بررسی می‌کنند. از طرفی، روشهای عددی نقاط ناپیوسته یک منحنی را ارائه می‌دهند. بنابراین یافتن منحنی کامل نتایج، غالباً پرهزینه و زمان‌بر است. به‌علاوه، با استفاده از نتایج عددی درک کامل مسأله غیرخطی آسان نیست. دشواریهای این روشها زمانی ظاهر می‌شود که مسأله غیرخطی شامل نقاط نامنفرد یا ریشه‌های چندگانه باشد. هریک از روشهای عددی و تحلیلی برای حل مسائل غیرخطی مزیتها و محدودیتهای خاص خود را دارند. بنابراین نمی‌توان یکی از این روشها را در نظر گرفت و از دیگری صرفنظر کرد.

چندین روش معروف نظیر روشهای اختلال و روشهای هموتوپی برای حل مسائل غیرخطی وجود دارند که بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند. روش اختلال هموتوپی [1] توسط بسیاری از محققان علوم و مهندسی جهت حل معادلات تابعی به‌کار رفته است. این روش توسط خی [2] در سال ۱۹۹۹ بیان شد. او ابتدا این روش را برای حل معادلات مربوط به نوسانگرهای غیرخطی [3] گسسته [۱]، معادلات غیرخطی موج [4] [۲]، یک مسأله مقدار مرزی خاص [۳] و مسائل دیگری از این معادلات به‌کار برد. اکنون می‌توان گفت که روش اختلال هموتوپی یک روش شناخته شده و بسیار مشهور برای حل معادلات تابعی می باشد[۷-٤]. در این روش جواب معادله به صورت مجموع یک سری نامتناهی در نظر گرفته می‌شود که معمولاً به جواب واقعی معادله همگراست.

با کمک روشهای اختلال بسیاری از خواص جالب و مهم مسائل غیرخطی آشکار شده‌اند. یکی از موفقیتهای حیرت انگیز روشهای اختلال، کشف سیاره نهم در منظومه شمسی است که درمسیری قابل پیش بینی در آسمان یافته شده است. اخیراً روشهای اختلال تکین به عنوان یکی از ده پیشرفت عالی مکانیک نظری و کاربردی در قرن بیستم در نظر گرفته شده‌اند. بنابراین روشهای اختلال نقش مهمی را در پیشرفت علوم و مهندسی ایفا می‌کنند. برای دانستن جزئیات بیشتر در مورد روشهای اختلال، خواننده علاقمند را به کتاب های تألیف شده در این زمینه ارجاع می‌دهیم.

اساس روشهای اختلال بر وجود پارامترها یا متغیرهای کوچک یا بزرگی است که کمیتهای اختلال نامیده می‌شوند. به طور خلاصه، روشهای اختلال با استفاده از کمیتهای اختلال، مسأله غیرخطی را به تعداد بی‌شمار زیرمسأله خطی تبدیل می‌کنند. سپس جواب مسأله غیرخطی را با مجموع جوابهای چندین زیرمسأله اولیه تقریب می‌زنند.

واضح است که وجود کمیتهای اختلال اساس روشهای اختلال است، اگرچه وجود این کمیتهای اختلال محدودیتهای جدی را برای روشهای اختلال ایجاد می‌کند. اول اینکه ممکن است هر مسأله غیرخطی شامل چنین کمیتهای اختلال نباشد. این یک محدودیت آشکار برای روشهای اختلال است.

---

[1] -Homotopy perturbation method
[2] -He
[3] -Nonlinear oscillator
[4] -Nonlinaer wave equation

دوم اینکه تقریبهای تحلیلی خوبی برای مسائل غیرخطی قوی به دست نمی‌آید. بنابراین تقریبهای اختلال فقط برای مسائل غیرخطی ضعیف معتبر هستند.

درچند دهه اخیر کارهای قابل ملاحظه‌ای درجهت توسعه بخشیدن به روش‌های جدید و مدرن برای حل تحلیلی و عددی معادلات دیفرانسیل و انتگرال خطی و غیرخطی صورت گرفته است. ازروش‌های جدید می توان به روش هموتوپی[5] و روش اختلال هموتوپی هی[6] اشاره کرد.

از نقطه نظر تاریخی، روش اختلال[7] یک روش بسیار قدیمی است که به عنوان یک ابزار تقریبی در مکانیک کلاسیک کوانتومی توسعه یافته است. درنظریه اختلال برای عملگرهای خطی به طور عام رفتار خواص طیفی این عملگرها وقتی که عملگر تغییر کوچکی می‌کند مورد نظر است. بنیان نظریه ریاضی در این مورد که مشتمل بر اثبات همگرایی سری اختلال است، به وسیله رلیچ[8] در مرجع [۸] و کاتو[9] در مراجع [۱۰،۹] بنا نهاده شده است. موضوع اصلی دیگر در نظریه اختلال برای عملگرهای خطی اختلالی در طیف پیوسته است که توسط فردریش[10] در مرجع [۱۱] بنیان گذاری شده است و ارتباط نزدیکی با نظریه پراکندگی دارد. ازمراجع استانداردی که دراین زمینه ازآنها نام برده شده است می‌توان به [۱۲] و کتاب مقدماتی در فنون اختلال تألیف نایفه[11] اشاره کرد.

در هر حال، روش‌های اختلال که جواب را بر حسب پارامترهای کوچک و بزرگ محاسبه می‌کنند حائز اهمیت هستند. زیرا این روش‌ها به طور وسیعی در علوم و مهندسی بکار گرفته می‌شوند. این‌گونه روش‌های اختلال از نبودن پارامترهای کوچک در معادله رنج می‌برند. یعنی این روش‌ها برای مسائلی معتبر هستند که در معادله پارامتر کوچک وجود داشته باشد. البته این گونه معادلات در مسائل کاربردی زیاد نیستند. برای مرتفع کردن این مشکل موجود در استفاده از روش‌های اختلال کلاسیک، دانشمندان زیادی روش های دیگری که به روش های غیراختلال[12] معروف هستند را معرفی کردند.

از جمله آنها می توان به لیاپانوف[13] [۱۳] اشاره کرد که در سال ۱۸۹۲ روش پارامتر مصنوعی را معرفی کرد. همان طوری که از نام روش پیداست، لیاپانوف یک پارامتر کوچک مصنوعی[14] در معادله وابسته

---

[5] -Homotopy method
[6] - He's homotopy perturbation method
[7] - Perturbation method
[8] - F. Rellich
[9] - T. Kato
[10] - K. O. Friedrichs
[11] - A. H. Nayfe
[12] - Non-perturbation method
[13] - A. M. Lyapunov

می نشاند که معمولاً ضریب جمله غیرخطی است. آدومین[۱۵] در سال ۱۹۸۰ روش تجزیه[۱۶]را معرفی کرد [١٦-١٤] که به هیچ‌وجه به پارامتری بستگی ندارد. از روش‌های دیگر می‌توان به روش δ- بسط[۱۷] اشاره کرد، که توسط کارمیشن و همکارانش[۱۸] (ترجمه شده در سال ۱۹۹۰) [۱۷] مطرح شد. البته نباید فراموش کرد که لیائو[۱۹] در سال ۱۹۹۲ [۱۸،۱۹] هم روشی موسوم به روش تحلیلی هموتوپی[۲۰] را معرفی کرد که این روش عملکردی شبیه به روش‌های اختلال دارد. از طرفی روش هموتوپی به دلیل خاصیت همگرایی سرتاسری یک ابزار سودمند برای حل مسائل غیرخطی محسوب می شود [۲۰]. این روش بیشتر برای حل مسائل معکوس غیرخطی[۲۱][۲۱] و مسائل بهینه سازی[۲۲] [٢٤-٢٢] به‌کار گرفته می‌شود. بنا به آنچه ذکر شد، روش‌های اختلال و هموتوپی ابزارهای مهم و مفیدی در مواجه با مسائل غیرخطی علوم و مهندسی هستند. در این پایان نامه ظهور یک روش قوی، کارا، قابل اطمینان و آینده‌دار را در حل مسائل غیرخطی که ترکیب جالب روش‌های اختلال کلاسیک و هموتوپی است مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

جی هوان خی[۲۳]، استاد مکانیک دانشگاه دونگهوای چین، در سال ۱۹۹۹ میلادی یک روش اختلال مدرن [٤،٥] بنام روش اختلال هموتوپی[٢٤] را معرفی کرد که اولاً تمام خواص اختلال کلاسیک را دارا می‌باشد و ثانیاً این روش نه‌تنها برای پارامتر کوچک بلکه برای پارامترهای خیلی بزرگ هم معتبر است. این روش برخلاف روش‌های اختلال پیشین دیگر وابسته به پارامتر کوچک که شاید از بزرگترین ضعف‌های روش‌های اختلال است، نمی‌باشد. در این روش پارامتر کوچک (پارامتر همبستگی[۲۵]) برای ساخت بسط پارامتری استفاده می‌شود که تا این مرحله مشابه با روش اختلال معمولی می‌باشد. در ادامه روش اختلال هموتوپی با بکارگیری مفهوم هموتوپی در توپولوژی اقدام به ساخت یک معادله هموتوپی ساده می‌کند. ساختن این معادله هموتوپی به نحوی است که باعث حذف پارامتر در مؤلفه‌های جواب و در نهایت در جواب نهایی می‌شود. این مزیت روش خی، نسبت به روش‌های

---

[١٤] - Artificial small parameter method
[١٥] - G. Adomian
[١٦] - Decomposition method
[١٧] - Expansion
[١٨] - A. V. Karmishin et al.
[١٩] - S. J. Liao
[٢٠] - Homotopy analysis method
[٢١] - Non linear inverse problems
[٢٢] - Opimization problems
[٢٣] - Ji – Huan He
[٢٤] - Homotopy perturbation method
[٢٥] - Embedding parameter

اختلال کلاسیک می‌باشد. متذکر می‌شویم که روش‌های اختلال کلاسیک بر پایه وجود یک پارامتر کوچک در معادله مربوطه استوار است. به این ترتیب روش اختلال هموتوپی هی نه تنها برای پارامترهای کوچک بلکه برای پارامترهای بسیار بزرگ هم معتبر می‌باشد. این روش دیگر وابسته به پارامتر نیست.

مزیت دیگر روش اختلال هموتوپی خی می‌تواند ساختن هموتوپی‌های مختلف برای یک مسأله غیرخطی باشد که به همگرایی جواب شتاب دهد. طبیعت روش هی به گونه‌ای است که حل یک مسأله غیرخطی مشکل را به حل بی‌شمار مسأله خطی ساده تبدیل می‌کند. با حل این مسائل خطی ساده مؤلفه‌های جواب یکی پس از دیگری با کمترین زحمت ممکن تعیین می‌شوند که در نهایت جواب به صورت یک سری بی‌پایان در نظر گرفته می‌شود.

این روش به وسیله خود خی در چندین معادله غیرخطی بکار گرفته شده است که درهمه حالتها روش عملکرد عالی داشته است[۷-٤]. این روش به دلیل سادگی در حل و دقت بالا مورد توجه محققین بسیاری در سرتاسر جهان قرار گرفته است که از میان آنها می‌توان به ازیش[۲٦] [۲۵،۲٦]، آریل[۲۷] [۲۷]، بلندز[۲۸] [۳۱-۲۸]، عباس بندی[۲۹] [۳۲،۳۳]، صابری نجفی[۳۰] [۳۷-۳٤]، گنجی[۳۱] [۳۸،۳۹] و ... اشاره کرد که توانستند این روش را با موفقیت در معادلات غیرخطی مختلفی پیاده کنند. در این پایان نامه در فصلهای سه، چهار و پنج به ترتیب روشهای تجزیه آدومین، شروع مجدد و اختلال هموتوپی برای حل معادله $f(x)=0$ به کار گرفته شده اند و نتایج حاصل در فصل پنجم با یکدیگر مقایسه شده اند.

---

۲٦ - T. Ozis
۲۷ - D. D. Ariel
۲۸ - A. Belendez
۲۹ - S. Abbasbandi
۳۰ - J. Saberi - Najafi
۳۱ - D. D. Ganji

فصل اول
روش اختلال هموتوپی

در این فصل ابتدا مقدماتی را در مورد واژه هموتوپی بیان و سپس ساختار روش اختلال هموتوپی را برای حل معادلات تابعی بیان می‌کنیم. در ادامه به بحث در مورد همگرایی این روش خواهیم پرداخت و با ارائه قضایایی در این مورد و ذکر مثال همگرایی روش را بررسی خواهیم کرد.

۱-۱ هموتوپی

۱-۱-۱ تعریف

یک توپولوژی درمجموعه X گردایه ای مانند τ از زیرمجموعه های X است که در شرایط زیر صدق کند

۱- ϕ و X به τ متعلق است.

۲- اجتماع اعضای هر زیر گردایه τ به τ متعلق است.

۳- اشتراک اعضای هر زیر گردایه متناهی τ به τ متعلق است.

۱-۱-۲ تعریف

فرض کنید X مجموعه‌ای باشد که برای آن توپولوژی τ مشخص باشد. در این صورت زوج مرتب (X,τ) را یک فضای توپولوژیک[۳۲] می‌نامند.

۱-۱-۳ تعریف

فرض کنید که X یک فضای توپولوژیک باشد. تابع پیوسته $h:[a,b]\to X$ را یک مسیر (قوس) گویند. نقطه $h(a)$ را نقطه آغازی و نقطه $h(b)$ را نقطه پایانی می‌نامند. همچنین گویند که h این دو نقطه را به هم وصل می‌کند.

۱-۱-٤ تعریف

فرض کنید $f,g:[\circ,\text{۱}]=I\to X$ مسیرهایی در X باشند به گونه ای که $f(\circ)=g(\circ)=x_\circ$ و $f(\text{۱})=g(\text{۱})=x_\text{۱}$. گوییم f و g هموتوپ هستند هرگاه نگاشت پیوسته ای چون $F:I\times I\to X$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که

$$F(x,\circ)=f(x),\qquad F(x,\text{۱})=g(x)$$
$$F(\circ,t)=x_\circ\,,\qquad F(\text{۱},t)=x_\text{۱}\,.$$

F را یک هموتوپی (مسیر) میان f و g می‌نامند. اگر f و g هموتوپ باشند، می نویسیم $f\approx g$.
اکنون تعریف می‌کنیم $F_t=F(x,t)$ برای $x,t\in I$، آنگاه $F_\circ=f$ و $F_\text{۱}=g$ و $F_t(\circ)=x_\circ$ و $F_t(\text{۱})=x_\text{۱}$ بنابراین $t\to F_t$ یک خانواده از مسیرها بوده که f را بر روی g قرار می‌دهد. به طور معادل $\{F_t\}_{\circ\le t\le \text{۱}}$ را یک هموتوپی گویند.

۱-۱-۵ تعریف

فرض کنید $f,g:X\to Y$ نگاشت‌های پیوسته‌ای باشند. گوییم f با g هموتوپیک است هرگاه نگاشت پیوسته‌ای چون $F:X\times I\to Y$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که برای هر $x\in X$، $F(x,\circ)=f(x)$ و $F(x,\text{۱})=g(x)$.

برای توضیح بیشتر برای هر $\circ\le t\le\text{۱}$ نگاشت پیوسته $F_t:X\to Y$ را چنین تعریف می کنیم: برای هر $x\in X$، $F_t(x)=F(x,t)$. اینک t را پارامتر زمان در نظر می‌گیریم آنگاه در لحظه $t=\circ$

[۳۲] -Topological space

داریم $F_0 = f$ و در لحظه $t = 1$ داریم $F_1 = g$. بنابراین اگر t را از صفر تا یک تغییر دهیم آنگاه به گونه‌ای پیوسته f بر g قرار می‌گیرد.

۱-۱-۶ نظریه هموتوپی

هموتوپی یک نگاشت پیوسته از بازه $[0,1]$ به یک فضای تابعی می‌باشد که درآن مفهوم پیوستگی نسبت به توپولوژی فضای تابعی تعریف می‌شود به طوریکه وقتی پارامتر λ از صفر تا یک تغییر کند، هموتوپی $\rho(\lambda)$ تابع $\rho(0) = f$ را به تابع $\rho(1) = g$ تغییر شکل می‌دهد. در این صورت به توابع f و g هموتوپیک گفته می‌شود. نگاشت‌های هموتوپی ابزارهای اساسی و پایه‌ای در توپولوژی هستند و یک روند سودمند برای تعریف کلاس‌های هم ارزی توابع فراهم می‌کنند. در اینجا خلاصه‌ای از نظریه هموتوپی برای حل معادلات عملگری غیرخطی نظیر مسائل معکوس بیان می‌شود. درحالت کلی، یک مسأله معکوس غیرخطی می‌تواند مانند یک معادله عملگری غیرخطی به صورت زیر فرمول بندی شود

$$F(m) = y, \tag{1-1}$$

یا به صورت یک مسأله کمینه سازی مانند

$$\min \left\| F(m) - y \right\|^2, \tag{1-2}$$

که در معادلات (۱-۱) و (۱-۲) ، m مدلی است که باید معکوس شود، y یک مجموعه به اصطلاح از مشاهدات و F یک مدل مقدم است که از یک معادله دیفرانسیل حاکم مقتضی محاسبه شده است. توجه کنید که مسائل (۱-۱) و(۱-۲) به شدت غیرخطی می‌باشند. بنابراین باید یک حدس اولیه خوب از مدل m هنگامی که می‌خواهیم یک الگوریتم عددی اجرا شود، فراهم نمود. به وسیله ترکیب یک تابع هدف[33] $F(m)$و یک پارامتر هموتوپی $\lambda \in [0,1]$ و یک تابع ساده $G(m)$، یک تابع هموتوپی ساخته می‌شود به طوریکه

$$H(m,0) = G(m), \qquad H(m,1) = F(m) - y \tag{1-3}$$

دستگاه شروع معادلات غیرخطی $G(m) = 0$ می‌تواند به طور دلخواه انتخاب شود و حداقل یک جواب معلوم مانند m^0 دارد که می‌تواند به عنوان یک حدس اولیه در تمام محاسبات انتخاب شود. انتظار می‌رود که منحنی $m = m(\lambda)$ که در آن $\lambda \in [0,1]$، وجود داشته باشد به‌طوریکه در معادله هموتوپی زیر صدق کند

[33] - Target function

$$H(m,\lambda)=\circ \qquad (\text{٤-١})$$

بنـابراین واضـح اسـت کـه $m(\circ)=m^{\circ}$ و $m(\text{١})=m^{\bullet}$، جـوابی از معادلـه عملگـری (١-١) باشـند. بنابراین $m(\lambda)$ یک منحنی است که m° را به $m^{\bullet}$ پیوند می‌دهد. اگر بعضی ازفنون عددی را بـرای دنبـال کردن این منحنی یعنی $m^{\bullet}$ از یک نقطه معلوم m° بکار ببریم، آنگاه در نهایت می‌توانیم بـه جـواب $m^{\bullet}$ برسیم. به طور کلی دو راه برای تعقیب این منحنی وجود دارد

راه اول. اولین راه بر پایه این فرض است که $H(m,\lambda)$ نسبت به m و λ دیفرانسیل پذیر باشد. با گرفتن دیفرانسیل از دو طرف معادله (١-٤) خواهیم داشت

$$H'_m(m,\lambda)dm+H'_\lambda(m,\lambda)d\lambda=\circ. \qquad (\text{٥-١})$$

به خاطر اینکه m درشرط اولیه $m(\circ)=m^{\circ}$ صدق می‌کند، مسأله بدست آوردن $m(\lambda)$ به یک مسأله مقدار اولیه از معادله دیفرانسیل معمولی(١-٤) تبدیل می‌شود. به وسیله فرمول انتگرال گیری عددی، می توان یک تقریب از $m^{\bullet}=m(\text{١})$ را بدست آورد.

راه دوم. دومین راه تقسیم کردن بازه $[\circ,\text{١}]$ به صورت $\circ=\lambda_{\circ}<\lambda_{\text{١}}<\ldots<\lambda_N=\text{١}$ وسپس بکارگیری بعضی روش های عددی برای حل پی در پی معادلات عملگری

$$H(m,\lambda_k)=\circ, \qquad k=\circ,\text{١},\text{٢},\ldots,N. \qquad (\text{٦-١})$$

است. چون جواب $m^{k+\text{١}}$ از معادله مرتبه $k+\text{١}$ محاسبه می‌شود (توجه کنید که معادلـه مرتبـه صـفر از قبل معلوم است)، پس می‌تواند به عنوان تقریب اولیه معادله مرتبه k از معادله (١-٦) بکار بـرده شـود. وقتی که $\lambda_k-\lambda_{k-\text{١}}$ به اندازه کافی کوچک باشد پیش‌بینی می‌شود که $m^{k-\text{١}}$ یـک تقریـب خـوب بـرای m^k باشد، به طوریکه به وسیله یک روش تکراری با همگرایی سرتاسری می‌توان به نتیجه همگرای آن رسید. برای مشاهده مثالی در این زمینه خواننده را به [٢١] رجوع می‌دهیم.

١-٢ روش اختلال هموتوپی خی

در بخش ١-١-٦ توضیح داده شد که ایده هموتوپی وقتی به یک ابـزار قـوی در آنـالیز عـددی تبـدیل می‌شود که با حداقل یک روش سرتاسر همگرا ترکیب شود. به طور نمونه در [٢١] روش هموتوپی بـا روش تفاضلات متناهی ترکیب شده است که برای حل معادله موج غیرخطی بکار گرفته شده است. بـه

این نکته هم اشاره می‌کنیم که روش مذکور ممکن است کارا باشد ولی حجم محاسبات بالاست و برای اجرا کننده روش، خسته کننده می‌باشد. از طرف دیگر توضیح داده شد که روش‌های اختلال به طور وسیعی درعلوم و مهندسی بکار گرفته می‌شوند. دامنه کاربرد این روش‌ها به واسطه وجود کمیت اختلال و همچنین پارامترهای فیزیکی کوچک یا بزرگ در مسائل مربوطه محدود است.

روش اختلال هموتوپی توسط جی هوان خی در سال ۱۹۹۹ مطرح شد [٤] و به وسیله خود شخص خی در سال ۲۰۰۰ به طور رسمی معرفی شد [٥]. این روش برخلاف روش‌های هموتوپی و اختلال، دیگر از محاسبات زیاد و پارامترهای کوچک یا بزرگ رنج نمی‌برد. درمقایسه باروش‌های اختلال کلاسیک، روش اختلال هموتوپی تمام خواص روش‌های اختلال کلاسیک را دارا می‌باشد و از اینها گذشته این روش ترکیبی، دیگر به هیچ پارامتری وابسته نمی‌باشد. جالب است توجه کنیم که روش اختلال هموتوپی برای حل معادلات تابعی غیرخطی ابداع شده است. برای توضیح ایده اساسی و پایه‌ای روش اختلال هموتوپی، جی هوان خی معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر را با شرایط مرزی متناظر با آن به صورت زیر

$$A(u) = f(r), \quad r \in \Omega \tag{۱-۷}$$

$$B(u, \partial u / \partial n) = 0, \quad r \in \Gamma \tag{۱-۸}$$

که در آن، A عملگر دیفرانسیل کلی، B عملگر مرزی، $f(r)$ یک تابع تحلیلی و Γ مرزدامنه Ω است در نظر گرفت [۲۹،۳۲]. عملگر A را می‌توان به دو قسمت خطی L و غیرخطی N تقسیم کرد. بنابراین معادله (۱-۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$L(u) + N(u) = f(r) \tag{۱-۹}$$

خی یک هموتوپی به شکل $H(v,p): \Omega \times [0,1] \to \Re$ ساخت به طوریکه معادلات زیر برقرار باشند

$$H(v,p) = (1-p)[L(v) - L(y_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0 \tag{۱-۱۰}$$

یا

$$H(v,p) = L(v) - L(y_0) + pL(y_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \tag{۱-۱۱}$$

که y_0 یک تقریب اولیه و v جواب تقریبی معادله (۱-۷) است. معادله (۱-۱۰) یا (۱-۱۱) یک معادله اختلال با پارامتر همبستگی نامیده می‌شود و می‌توان آن را به وسیله روش‌های مرسوم اختلال حل نمود

که این روش‌ها، با بکار بردن متغیر همبستگی p مانند یک پارامتر کوچک این کار را انجام می‌دهند. واضح است که $H(v,p)$ یک هموتوپی را تعریف می‌کند زیرا که شرایط

$$H(v,0)=L(v)-L(y_0)=0 \tag{۱۲-۱}$$

$$H(v,1)=A(v)-f(r)=0 \tag{۱۳-۱}$$

برقرارند. وقتی p از صفر تا یک تغییر می‌کند، معادله $H(v,p)$ از $L(v)-L(y_0)$ به $A(v)-f(r)$ تغییر می‌کند که در توپولوژی به این حالت تغییر شکل[۳۴] گویند و $L(v)-L(y_0)$ و $A(v)-f(r)$ را هموتوپیک[۳۵] نامند. حال برای حل معادله (۱-۱۰) یا (۱-۱۱) پارامتر همبستگی p را مانند یک پارامتر کوچک بکار می‌بریم و فرض می‌کنیم جواب (۱-۱۰) یا (۱-۱۱) به صورت یک سری بر حسب p باشد، یعنی

$$v=v_0+pv_1+p^2v_2+\cdots \tag{۱۴-۱}$$

وقتی $p\to 1$، معادله (۱-۱۰) یا (۱-۱۱) متناظر معادله (۱-۷) می‌شود و به این ترتیب سری (۱-۱۴) جواب تقریبی معادله (۱-۷) می شود، یعنی

$$u(x)=\lim_{p\to 1} v=v_0+v_1+v_2+\cdots \tag{۱۵-۱}$$

سری (۱-۱۵) در اغلب موارد همگراست، هر چند که سرعت همگرایی آن به عملگر غیرخطی $A(v)$ وابسته است. جی هوان خی در مورد همگرایی سری حاصل شده در (۱-۱۵) در [٤] بحث کرده است که نتیجه بحث آن به شرح زیر می‌باشد. اگر شرایط زیر برقرار باشند، سری داده شده در معادله(۱-۱۵) همگرا است.

الف. مشتق مرتبه دوم $A(v)$ نسبت به v باید کوچک باشد، زیرا پارامتر p ممکن است نسبتاً بزرگ باشد یعنی $p\to 1$

ب. نرم $L^{-1}\partial N/\partial v$ باید کوچکتر از یک باشد یعنی $\left\|L^{-1}\partial N/\partial v\right\|\le 1$

[۳۴] - Deformation
[۳۵] - Homotopic

۱-۳ همگرایی[۳۶] روش اختلال هموتوپی [۸۲]

معادله تابعی $A(u)=f(r)$ را در نظر بگیرید. همان‌طور که مشاهده کردید به وسیله روش هموتوپی، یک هموتوپی $H(v,p):\Omega\times[0,1]\to\Re$ که در رابطه

$$L(V)-L(u_0)+pL(u_0)+p\big(N(V)-f(r)\big)=0, \qquad (۱-۱٦)$$

صدق کند، می‌توان ساخت. فرض کنیم L^{-1} عملگر معکوس عملگر خطی L باشد. با اعمال این عملگر در طرفین رابطه (۱-۱٦) داریم

$$V-u_0+pu_0+p\big(L^{-1}N(V)-L^{-1}f(r)\big)=0 \qquad (۱-۱۷)$$

رابطه فوق معادل است با

$$V=u_0+p\big(L^{-1}f(r)-L^{-1}N(V)-u_0\big) \qquad (۱-۱۸)$$

حال فرض کنیم $V=\sum_{i=0}^{\infty}p^i v_i$، رابطه (۱-۱۸) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$V=u_0+p\left[L^{-1}f(r)-\left(L^{-1}N\right)\left[\sum_{i=0}^{\infty}p^i v_i\right]-u_0\right] \qquad (۱-۱۹)$$

از طرفی هنگامی که $p\to 1$، تابع V تحت شرایطی به u همگرا می‌شود، لذا می‌توان نوشت

$$u=L^{-1}f(r)-L^{-1}N\Big(\sum_{i=0}^{\infty}v_i\Big)=L^{-1}f(r)-\sum_{i=0}^{\infty}(L^{-1}N)v_i \qquad (۱-۲۰)$$

حال یک شرط کافی را در مورد همگرایی روش اختلال هموتوپی به صورت زیر بیان می‌کنیم.

۱-۳-۱ قضیه (شرط کافی همگرایی)

فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $\mathrm{N}:X\to Y$ یک نگاشت انقباضی باشد یعنی

$$\forall v,\bar{v}\in X\ ;\ \left\|\mathrm{N}(v)-\mathrm{N}(\bar{v})\right\|\le\gamma\left\|v-\bar{v}\right\|,\ \ 0<\gamma<1 \qquad (۱-۲۱)$$

دراین صورت Nبنا بر قضیه نقطه ثابت باناخ، دارای یک نقطه ثابت مانند u می‌باشد یعنی $\mathrm{N}(u)=u$.

اکنون دنباله تولید شده از روش اختلال هموتوپی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$V_n=\mathrm{N}(V_{n-1}),\quad V_{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}u_i,\ \ n=1,2,3,\dots \qquad (۱-۲۲)$$

در حقیقت مطابق بحثی که در بخش قبل صورت گرفت می توان گفت که $\mathrm{N}=L^{-1}N$. فرض کنیم $V_0=v_0=u_0\in B_r(u)$ که $B_r(u)=\left\{u^*\in X\,\middle|\,\left\|u^*-u\right\|<r\right\}$ در این صورت خواهیم داشت

الف) $\left\|V_n-u\right\|\le\gamma^n\left\|v_0-u\right\|$.

---

[۳۶] -Convergence