بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی دکتری رشته ی ریاضی گرایش آنالیز هارمونیک

خواص جبری و توپولوژیکی L^p–جبرهای وزنی روی گروه ها

استاد راهنما:

دکتر علی رجالی

استادان مشاور:

دکتر محمود لشکری زاده

دکتر رسول نصر اصفهانی

پژوهشگر:

فاطمه ابطحی

۱۳۸۸/۱۰/۲۷

خرداد ماه ۱۳۸۸

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه دکتری رشته ریاضی محض گرایش آنالیز (هارمونیک) خانم فاطمه ابطحی فروشانی

تحت عنوان:

خواص جبری و توپولوژیکی p - جبرهای وزنی روی نیم گروهها

در تاریخ ...۸۸/۳/۲۷..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ....عالی.......... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکتر علی رجالی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر محمود لشکری زاده بمی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد مشاور پایان نامه	دکتر عبدالرسول نصر اصفهانی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۴- استاد داور داخل گروه	دکتر محمدرضا پوریای ولی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۵- استاد داور داخل گروه	دکتر مجید فخار	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۶- استاد داور خارج گروه	دکتر حمیدرضا ابراهیمی ویشکی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۷- استاد داور خارج گروه	دکتر فرید بهرامی	با مرتبه علمی استاد	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

خداوند بزرگ و بلند مرتبه را شاکرم که مرا از الطاف خود بهره‌مند ساخت تا بتوانم اندکی از مسیر پر فراز و نشیب دانش را پشت سر بگذارم. در راستای مرحمت‌های خداوندی، از کمک‌های بی دریغ استاد راهنمای گرامی‌ام، جناب آقای دکتر رجالی و اساتید مشاور بزرگوارم، جناب آقای دکتر لشکری زاده و جناب آقای دکتر نصر اصفهانی، کمال تشکر را دارم که در این چند سال مرا از راهنمایی‌هایشان بهره‌مند کردند و این پایان نامه را مرهون زحمات و کمک‌های بی شائبه‌ی این بزرگواران می دانم. همچنین از جناب آقای دکتر ابراهیمی (دانشگاه فردوسی مشهد)، جناب آقای دکتر بهرامی (دانشگاه صنعتی اصفهان)، جناب آقای دکتر پوریای ولی (دانشگاه اصفهان) و جناب آقای دکتر فخار (دانشگاه اصفهان)، که داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند سپاسگزاری می کنم. امید است در پناه عنایت الهی بتوانم در این مسیر ثابت قدم بوده، به سوی کمال و پیشرفت قدم بردارم.

رسید مژده که آمد بهار و سبزه دمید
وظیفه گر برسد مصرفش گل است و نبید

صفیر مرغ برآمد بط شراب کجاست
فغان فتاد به بلبل نقاب گل که کشید

مکن ز غصه شکایت که در طریق طلب
براحتی نرسید آن که زحمتی نکشید

ز روی ساقی مهوش گلی بچین امروز
که گرد عارض بستان خط بنفشه دمید

من این مرقع رنگین چو گل بخواهم سوخت
که پیر دردفروشش بجرعه ای نخرید

عجایب ره عشق ای رفیق بسیار است
ز پیش آهوی این دشت شیر نر بدوید

چنان کرشمه ساقی دلم ز دست ببرد
که با کسی دگرم نیست برگ گفت و شنید

ز میوه‌های بهشتی چه ذوق دریابد
هر آن که سیب زنخدان شاهدی نگزید

بکوی عشق منه بی دلیل راه قدم
که گم شد آن که درین ره برهبری نرسید

خدای را مددی ای دلیل راه حرم
که نیست بادیه عشق را کرانه پدید

گلی نچید ز بستان آرزو حافظ
مگر نسیم مروت درین هوا نوزید

چکیده :

فرض کنیم G یک گروه فشرده ی موضعی باشد و $0<p<\infty$. در این پایان نامه ضرب پیچشی را روی فضای $L^p(G)$ مورد بررسی قرار می دهیم و شرایطی لازم و کافی به دست می آوریم برای این که برای هر f و g در این فضا، $g*f$ به عنوان یک تابع موجود باشد. همچنین با فرض این که w یک تابع وزن روی G است همین مطلب را برای $L^p(G,w)$ مورد مطالعه قرار می دهیم. سپس شرایطی روی گروه G و تابع وزن w به دست می آوریم برای این که $L^p(G,w)$ تحت ضرب پیچشی بسته باشد. همچنین نشان می دهیم این فضا با ضرب نقطه ای توابع تنها در صورتی یک جبر باناخ است که G گسسته باشد و $w\geq 1$. در پایان این فضا را با ضرب پیچشی در نظر می گیریم و شرایطی را بررسی می کنیم که $L^p(G,w)$ تحت آن یک جبر باناخ باشد.

کلمات کلیدی: تابع وزن ، جبر باناخ ، حدس L^p ، ضرب پیچشی .

فهرست مندرجات

پیش گفتار

برای گروه موضعاً فشرده‌ی G با اندازه‌ی هار λ روی آن و $۰ < p \leq \infty$، فضای لبگ $L^p(G)$ فضایی شناخته شده در آنالیز هارمونیک است. می‌دانیم که این فضا با عمل جمع برداری و ضرب اسکالر نقطه‌ای، یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است و برای $۱ \leq p < \infty$ با نرم

$$\|f\|_p = \left(\int_G |f(x)|^p d\lambda(x)\right)^{۱/p},$$

یک فضای باناخ و برای $۰ < p < ۱$، با شبه نرم

$$\|f\|_p = \int_G |f(x)|^p d\lambda(x),$$

یک فضای شبه نرمدار است. برای معرفی ضربی روی $L^p(G)$ برای این که یک جبر باناخ باشد، در نظر اول ضرب نقطه‌ای توابع به ذهن می‌رسد. اما این فضا با ضرب نقطه‌ای، تنها در صورتی یک جبر باناخ است که G گسسته باشد و در نتیجه این فضا، به فضای بسیار ساده‌ای مبدل می‌شود که دیگر جایی برای بررسی خیلی از خواص آن به عنوان یک جبر باناخ نمی‌ماند. اما ضرب طبیعی دیگری روی $L^p(G)$ وجود دارد که موسوم به ضرب پیچشی است. ضرب پیچشی $*$ روی فضای تمام توابع λ–اندازه پذیر مختلط مقدار f و g روی G، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-۱}x)d\lambda(y)$$

برای هر $x \in G$ که به ازای آن $y \mapsto f(y)g(y^{-۱}x)$ تابعی λ– انتگرالپذیر باشد. به سادگی می‌توان نشان داد که برای $p = ۱$، فضای $L^{۱}(G)$ تحت ضرب پیچشی یک جبر باناخ است؛ لذا

$$\|f * g\|_{۱} \le \|f\|_{۱}\|g\|_{۱} \qquad (f, g \in L^{۱}(G)).$$

همچنین به سادگی نشان داده می‌شود که برای هر $۱ < p < \infty$ و گروه فشرده‌ی G، فضای $L^p(G)$ با ضرب پیچشی همواره یک جبر باناخ است. عکس این مطلب به صورت یک حدس به نام حدس L^p مطرح بود و ریاضی‌دانان زیادی این حدس را مورد بحث و بررسی قرار دادند.

در سال ۱۹۶۱، زلازکو [۳۴] این حدس را برای گروه‌های آبلی و همچنین در سال ۱۹۶۳ در [۳۵] برای $۲ < p < \infty$ و گروه دلخواه G حل نمود. راجاگوپلن در [۱۹] و [۲۰] و [۲۱] در حالات زیر حدس L^p را ثابت کرد.

(الف) $p \ge ۲$ و G گسسته باشد.

(ب) $p = ۲$ و G کاملاً ناهمبند باشد.

(ج) $p > ۱$ و G گروهی پوچتوان یا به صورت ضرب نیم –مستقیم دو گروه آبلی است.

به علاوه حدس مذکور برای $p = ۲$ و گروه موضعاً فشرده‌ی دلخواه G در سال ۱۹۶۸ توسط رایکرت [۲۶] اثبات شد. در سال ۱۹۶۹، گرینلیف [۸] حدس L^p را برای $p > ۱$ و گروه‌های میانگین‌پذیر ثابت نمود. بالاخره در سال ۱۹۹۰ سایکی [۳۰] با یک اثبات منحصر به فرد نشان داد که حدس L^p برای هر گروه موضعاً فشرده درست است؛ یعنی $L^p(G)$ تنها در حالتی یک جبر باناخ است که G فشرده باشد.

این پایان نامه که مشتمل بر سه فصل است، به بررسی بیشتر عمل پیچش روی فضای لبگ $L^p(G)$ و فضای وزن‌دار $L^p(G, \omega)$، که ω یک تابع وزن روی G است، می‌پردازد.

در فصل اول، ضرب پیچشی $*$ را روی فضای تمام توابع λ–اندازه‌پذیر در نظر می‌گیریم و تنها به وجود $f * g$ به عنوان یک تابع، برای هر $f, g \in L^p(G)$ توجه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که برای $۰ < p < ۱$ این شرط معادل با گسسته بودن G است. سپس همین مطلب را برای $۲ < p < \infty$،

مطالعه می‌کنیم و ثابت می‌کنیم همین شرط ضعیف نیز فشردگی G را نتیجه می‌دهد. در حقیقت، نشان می‌دهیم برای $۲ < p < \infty$ شرایط زیر معادلند.

(الف) $L^p(G)$ تحت ضرب پیچشی یک جبر باناخ است.

(ب) $L^p(G)$ تحت ضرب پیچشی بسته است.

(ج) برای هر $f, g \in L^p(G)$، $f * g$ به عنوان یک تابع موجود است.

(د) G یک گروه فشرده است.

همچنین مثال‌هایی ارایه می‌دهیم که نشان می‌دهند برای $۱ \le p \le ۲$، نتیجه‌ای متفاوت به دست می‌آید. در حقیقت ثابت می‌کنیم که اگر G یک گروه موضعاً فشرده و تک پیمانه‌ای باشد و $۱ \le p \le ۲$، آن گاه برای هر $f, g \in L^p(G)$، $f * g$ همواره به عنوان یک تابع موجود است. سپس در بخش دوم، کمی بیشتر پیش رفته، شرایط لازم و کافی به دست می‌آوریم برای این که برای هر $f, g \in L^p(G)$، $f * g$ تابعی انتگرال‌پذیر، تقریباً کراندار و یا در بی‌نهایت صفر می‌شود؛ در حقیقت، بررسی می‌کنیم که چه وقت $L^p(G) * L^p(G)$، مشمول در $L^\infty(G)$، $C_۰(G)$ و یا $L^۱(G)$ است.

در فصل دوم، با فرض این که ω یک تابع وزن زیرضربی روی G است، وجود $f * g$ را به عنوان یک تابع، برای هر $f, g \in L^p(G, \omega)$ مورد بررسی قرار می‌دهیم و برای $۰ < p < ۱$ نشان می‌دهیم که این شرط با گسسته بودن G معادل است و در حقیقت نتیجه‌ی به دست آمده مستقل از انتخاب تابع وزن ω است. سپس برای $۲ < p < \infty$، یک شرط لازم اساسی به دست می‌آوریم. در حقیقت نشان می‌دهیم اگر برای هر $f, g \in L^p(G, \omega)$، $f * g$ به عنوان یک تابع موجود باشد، آن گاه G یک گروه σ-فشرده است. همچنین برای بعضی از انواع گروه‌ها، یک شرط لازم و کافی به دست می‌آوریم. در پایان، شرایطی را به دست می‌آوریم که تحت آن‌ها، برای هر $f, g \in L^p(G, \omega)$، $f * g$ انتگرال‌پذیر، متعلق به $C_۰(G, ۱/\omega)$ و یا $L^\infty(G, ۱/\omega)$ است. مطالب این فصل اگر چه در برخی موارد تعمیم مستقیم نتایج فصل قبل است ولی به جهت تفاوت در بخشی از نتایج و یا اثبات آن‌ها، جداگانه تنظیم شده است. لازم به ذکر است که این نتایج حتی در حالت $\omega \equiv ۱$، جدید هستند و

بررسی، آن‌ها به طور مجزا، می‌تواند منجر به ایده‌های جدیدی برای ادامه‌ی کار باشد.

در فصل سوم، ابتدا نشان می‌دهیم $L^p(G,\omega)$ با ضرب نقطه‌ای توابع تنها در صورتی یک جبر باناخ است که G گسسته باشد و $\omega \geq ۱$. این نتیجه ما را به این سؤال رهنمون می‌کند که چه موقع $L^p(G,\omega)$ تحت ضرب پیچشی یک جبر باناخ است؟ ابتدا خواص موروثی را مطالعه می‌کنیم و به عنوان مثال نشان می‌دهیم اگر $L^p(G,\omega)$ یک جبر باناخ باشد، آن گاه برای هر زیرگروه باز H و هر زیر گروه فشرده و نرمال N از G فضاهای $L^p(H,\omega)$ و $L^p(G/N,\dot{\omega})$ نیز جبرهای باناخ هستند که $\dot{\omega}$ تابع وزن حاصل از ω روی G/N است و در همین فصل معرفی می‌شود. همچنین نشان می‌دهیم که برای هر $۱ < p < \infty$ وگروه آبلی G، بسته بودن $L^p(G,\omega)$ تحت ضرب پیچشی، σ-فشردگی G را نتیجه می‌دهد. سپس در بخش دوم با فرض این که ω یک تابع وزن دلخواه روی G است، یک شرط کافی برای این که $L^p(G,\omega)$ تحت ضرب پیچشی یک جبر باناخ باشد ارایه می‌دهیم و عکس آن را روی بعضی از انواع گروه‌ها بررسی می‌کنیم و به عنوان مثال نشان می‌دهیم این شرط روی گروه‌های آبلی یک شرط لازم و کافی است. بنابراین به عنوان یک پرسش مطرح می‌کنیم که برای کدام گروه‌ها و وزن ها این شرط، لازم و کافی است. در پایان با توجه به این که $L^۱(G,\omega)$ به عنوان یک جبر باناخ همواره دارای یک همانی تقریبی کراندار است، با فرض این که $L^p(G,\omega)$ تحت ضرب پیچشی یک جبر باناخ است، نشان می‌دهیم که $L^p(G,\omega)$، همواره دارای یک همانی تقریبی است و زمانی این همانی تقریبی، کراندار است که G یک گروه گسسته باشد.

فصل ۱

خواص ضرب پیچشی روی $L^p(G)$

در این فصل که مشتمل بر دو بخش است، برای هر $۰ < p < \infty$ و گروه موضعاً فشرده‌ی G، ضرب پیچشی $*$ را روی فضای تمام توابع λ-اندازه پذیر روی G یادآوری می‌کنیم و سپس خواص این ضرب را روی فضای $L^p(G)$، مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش اول، با فرض $۰ < p < ۱$، یک شرط لازم و کافی برای این که برای هر $f, g \in L^p(G)$، $f * g$ به عنوان یک تابع موجود باشد ارایه می‌دهیم. سپس همین ویژگی را برای $۱ \le p < \infty$ مطالعه می‌کنیم و برای $۲ < p < \infty$ ثابت می‌کنیم که این شرط معادل با فشردگی G است. همچنین برای $۱ < p \le ۲$ نشان می‌دهیم که اگر G تک پیمانه‌ای باشد، آن گاه برای هر $f, g \in L^p(G)$، $f * g$ همواره به عنوان یک تابع موجود است. در بخش دوم شرایطی لازم و کافی به دست می‌آوریم که تحت آن ها $L^p(G) * L^p(G)$ مشمول در $L^۱(G)$، $L^\infty(G)$ و یا $C_۰(G)$ باشد.

۱—۱ وجود ضرب پیچشی روی فضای $L^p(G)$

فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک موضعاً فشرده باشد؛ یعنی، یک گروه G که در عین حال یک فضای توپولوژیک موضعاً فشرده و هاسدورف است به طوری که عمل دوتایی $(x,y)\mapsto xy$ از $G\times G$ به G و نیز نگاشت وارون $x\mapsto x^{-۱}$ از G به G پیوسته باشد. از [۱۰] می‌دانیم که گروه موضعاً فشرده‌ی G دارای یک اندازه‌ی هارچپ است؛ یعنی یک اندازه‌ی رادون مثبت λ روی G به طوری که برای هر زیرمجموعه‌ی بورل A از G و $x\in G$، $\lambda(xA)=\lambda(A)$.

فرض کنیم $\mathcal{B}(G)$، σ—جبر مجموعه‌های بورل در G باشد. در این صورت برای هر $x\in G$، تابع مجموعه‌ای $\lambda_x:\mathcal{B}(G)\to[۰,\infty]$ با ضابطه‌ی $A\mapsto\lambda(Ax)$ یک اندازه‌ی هار چپ است. با توجه به یکتایی اندازه‌ی هار چپ λ با تقریب یک ثابت، به ازای یک عدد ثابت $\Delta(x)$ داریم $\lambda_x=\Delta(x)\lambda$. به راحتی دیده می‌شود که Δ مستقل از انتخاب λ است و لذا به گروه موضعاً فشرده G، تابعی مانند $\Delta:G\to(۰,\infty)$ اختصاص می یابد به طوری که

$$\lambda(Ax)=\Delta(x)\lambda(A)\qquad (A\in\mathcal{B}(G)).$$

تابع Δ را تابع پیمانه‌ای G نامیم. گروه G را تک پیمانه‌ای نامیم اگر برای هر $x\in G$ داشته باشیم $\Delta(x)=۱$.

حال ضرب پیچشی $*$ را روی فضای توابع λ—اندازه پذیر مختلط مقدار به صورت زیر تعریف می‌کنیم . برای هر دو تابع λ—اندازه پذیر $f,g:G\to\mathbb{C}$ روی G، قرار می‌دهیم

$$(f*g)(x)=\int_G f(y)g(y^{-۱}x)d\lambda(y)$$

برای هر $x\in G$ که به ازای آن $y\mapsto f(y)g(y^{-۱}x)$ تابعی λ— انتگرالپذیر باشد.

۱ تعریف. *فرض کنیم G یک گروه توپولوژیک موضعاً فشرده و g و f دو تابع λ—اندازه‌پذیر*

مختلط مقدار روی G باشند. گوییم $f * g$ به عنوان یک تابع موجود است اگر برای تقریباً هر $x \in G$، $f * g(x)$ موجود باشد.

برای هر $۰ < p < \infty$، فضای لبگ معمول روی G را با $L^p(G)$ نمایش می‌دهیم؛ در واقع، قرار می‌دهیم

$$L^p(G) := \left\{ f : G \to \mathbb{C} \mid \text{ اندازه پذیر} - \lambda \text{ تابعی } f \text{ و } \int_G |f(x)|^p d\lambda(x) < \infty \right\}.$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $L^p(G)$، با ضرب اسکالر و جمع نقطه‌ای توابع یک فضای برداری روی $\mathbb{C}$ است. لازم به ذکر است در حالتی که G گسسته است، اندازه‌ی هار λ، همان اندازه‌ی شمارنده روی G است؛ در حقیقت این فضا همان فضای $\ell^p(G)$ است که در زیر تعریف شده است

$$\ell^p(G) := \left\{ f : G \to \mathbb{C}\, ,\ \sum_{x \in G} |f(x)|^p < \infty \right\}.$$

در حالتی که $۰ < p < ۱$، برای هر $f \in L^p(G)$ قرار می‌دهیم

$$\|f\|_p := \int_G |f(x)|^p d\lambda(x).$$

در این صورت $\|.\|_p$ یک شبه نرم روی فضای $L^p(G)$ است و لذا $L^p(G)$ یک فضای متریک کامل است؛ [۳۱]، صفحه‌ی ۵۳. قضیه‌ی زیر ضرب پیچشی را روی این فضا مورد بررسی قرار می‌دهد و شرطی لازم روی G ارایه می‌کند برای این که برای هر $f, g \in L^p(G)$، $f * g$ به عنوان یک تابع موجود باشد.

۱.۱-۱ قضیه. *فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد و $۰ < p < ۱$. اگر برای هر $f, g \in L^p(G)$، $f * g$ به عنوان یک تابع موجود باشد، آن گاه G یک گروه گسسته است.*

اثبات. فرض کنیم G ناگسسته باشد. در این صورت زیرمجموعه‌ی باز O از G موجود است به طوری که $\overline{O}$ فشرده است و $۰ < \lambda(O^{۲}) < \infty$. برای هر $n \in \mathbb{N}$، زیر مجموعه‌ی باز O_n از O

را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که $\overline{O_n}$ فشرده و $\lambda(O_n) < ۲^{-n}$ و برای هر $n \neq k$، داشته باشیم $O_n \cap O_k = \emptyset$. در حقیقت با توجه به این که

$$\lambda(O) = \sup\{\lambda(\overline{U}) : U \subseteq O \text{ باز و } U ,\ \overline{U} \text{ فشرده}\},$$

بنابراین زیرمجموعه‌ی باز $U_۱$ از O موجود است به طوری که $\overline{U_۱}$ فشرده است و

$$\lambda(O) - ۱/۲ < \lambda(\overline{U_۱}).$$

قرار می‌دهیم $O_۱ = O \setminus \overline{U_۱}$ و در نتیجه $\lambda(O_۱) < ۱/۲$. به طور مشابه

$$\lambda(O \setminus \overline{O_۱}) = \sup\{\lambda(\overline{U}) : U \subseteq O \setminus \overline{O_۱},\ \overline{U} \text{ فشرده}\}.$$

بنابراین زیرمجموعه‌ی باز $U_۲$ از $O \setminus \overline{O_۱}$ موجود است به طوری که $\overline{U_۲}$ فشرده است و

$$\lambda(O \setminus \overline{O_۱}) - ۱/۴ < \lambda(\overline{U_۲}).$$

قرار می‌دهیم $O_۲ = O \setminus (\overline{O_۱} \cup \overline{U_۱})$ و در نتیجه $\lambda(O_۲) < ۱/۴$. به طور استقرایی برای هر $n > ۰$، زیرمجموعه‌ی باز U_n از $O \setminus \overline{O_۱} \cup \cdots \cup \overline{O_{n-۱}}$ موجود است به طوری که $\overline{U_n}$ فشرده است و

$$\lambda(O \setminus (\overline{O_۱} \cup \cdots \cup \overline{O_{n-۱}})) - ۱/۲^n < \lambda(\overline{U_n}).$$

قرار می‌دهیم

$$O_n = O \setminus (\overline{O_۱} \cup \cdots \cup \overline{O_{n-۱}} \cup \overline{U_n}).$$

بنابراین

$$\lambda(O_n) < ۱/۲^n$$

و برای هر $n \neq k$، $O_n \cap O_k = \emptyset$. توابع g و f را روی G به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\chi_{O_n}(x)}{\lambda(O_n)^{۱/p}\, n^{۱+۱/p}} \qquad (x \in G)$$

و

$$g(x) = \chi_{O^{۲}}(x) \qquad\qquad (x \in G).$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $f, g \in L^p(G)$. برای هر $x \in O$ داریم

$$\begin{aligned}
(f * g)(x) &= \int_G f(y) g(y^{-۱}x) d\lambda(y) \\
&= \sum_{n=۱}^{\infty} \int_{O_n} \frac{۱}{\left((\lambda(O_n))^{۱/p}\, n^{۱+۱/p}\right)}\, d\lambda(y) \\
&= \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{\lambda(O_n)^{۱/p}\, n^{۱+۱/p}} \int_{O_n} d\lambda(y) \\
&\geq \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{\lambda(O_n)^{۱-۱/p}}{n^{۱+۱/p}} \\
&\geq \sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^{n(۱/p-۱)}}{n^{۱+۱/p}}.
\end{aligned}$$

با استفاده از آزمون ریشه به سادگی می‌توان نشان داد که سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۲^{n(۱/p-۱)}}{n^{۱+۱/p}}$$

واگراست و در نتیجه $(f * g)(x) = \infty$. این تناقض حکم قضیه را ثابت می‌کند. ■

یادآوری می‌کنیم که برای $۱ < p < \infty$، حدس L^p بیان می‌کند که $L^p(G)$ تحت ضرب پیچشی بسته است اگر و تنها اگر G فشرده باشد. این حدس با تاریخچه‌ای طولانی روی حالت‌های خاص آن، نهایتاً در سال ۱۹۹۰ تایید گردید.

نتیجه‌ی زیر این هم‌ارزی را برای $۰ < p < ۱$ مورد مطالعه قرار می‌دهد و گزاره‌ای متناظر با آن را بیان می‌کند. قبل از بیان این نتیجه، یادآوری می‌کنیم که یک فضای برداری A روی $\mathbb{C}$، یک جبر نامیده می‌شود اگر عمل دوتایی $(x,y) \mapsto xy$ به نام ضرب موجود باشد به طوری که برای هر $x, y, z \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$ داشته باشیم

(الف) $(xy)z = x(yz)$.

(ب) $x(y+z)=xy+xz$.

(ج) $(y+z)x=yx+zx$.

(د) $(\alpha x)y=\alpha(xy)=x(\alpha y)$.

در این حالت A را یک جبر شبه نرمدار می‌نامیم اگر مجهز به یک شبه نرم $\|.\|$ باشد به طوری که A تحت آن کامل باشد و نیز برای هر $x,y\in A$ داشته باشیم

$$\|xy\|\le\|x\|\|y\|.$$

اگر $0<p<1$ و G یک گروه گسسته باشد، آن گاه برای هر $f,g\in\ell^p(G)$ داریم

$$\begin{aligned}\|f*g\|_p &= \sum_{x\in G}\left(\sum_{y\in G}f(y)g(y^{-1}x)\right)^p\\ &\le \sum_{y\in G}f(y)^p\sum_{x\in G}g(x)^p\\ &= \|f\|_p\|g\|_p.\end{aligned}$$

بنابراین $\ell^p(G)$ یک جبر شبه نرمدار است. از این خاصیت همراه با قضیه‌ی قبل، نتیجه‌ی زیر به دست می‌آید.

۱—۲.۱ نتیجه. *فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده باشد و $0<p<1$. در این صورت گزاره های زیر معادل هستند.*

(الف) $L^p(G)$ یک جبر شبه نرمدار است.

(ب) $L^p(G)$ تحت ضرب پیچشی بسته است.

(ج) برای هر $f,g\in L^p(G)$، $f*g$ به عنوان یک تابع موجود است.

(د) G گسسته است.

برای $1\le p<\infty$ وضعیت کاملاً متفاوت است. دراین حالت برای هر $f\in L^p(G)$ قرار می‌دهیم

$$\|f\|_p=\left(\int_G|f(x)|^p d\lambda(x)\right)^{1/p}.$$

$\|.\|_p$ یک نرم روی فضای $L^p(G)$ است؛ قضیه‌های ۱۲.۶ و ۱۲.۷ از [۱۰] را ببینید. در حقیقت $L^p(G)$ با این نرم یک فضای باناخ است ([۱۰] قضیه‌ی ۱۲.۸). هدف این است که تابع بودن $f * g$ را برای $1 \leq p < \infty$ مورد بررسی قرار دهیم. با استفاده از قضیه‌ی فوبینی به سادگی می‌توان نشان داد که برای هر $f, g \in L^1(G)$، $f * g$ همواره به عنوان یک تابع موجود است. این مطلب برای هر $1 < p \leq 2$، هنوز یک سؤال باز است. در حالتی که G یک گروه تک پیمانه‌ای باشد به این سؤال پاسخ مثبت می‌دهیم. پیش از آن نامساوی هولدر تعمیم یافته را یادآوری می‌کنیم.

۱—۳.۱ قضیه. *فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده و $f_1, \cdots, f_n \in L^1(G)$ توابعی نامنفی باشند. همچنین فرض کنیم $\beta_1, \cdots, \beta_n$ اعداد حقیقی نامنفی باشند به طوری که $\beta_1 + \cdots + \beta_n = 1$. دراین صورت $f_1^{\beta_1} \cdots f_n^{\beta_n} \in L^1(G)$ و نیز*

$$\int_G f_1(x)^{\beta_1} \cdots f_n(x)^{\beta_n} d\lambda(x) \leq \|f_1\|_1^{\beta_1} \cdots \|f_n\|_1^{\beta_n}.$$

اثبات. به نتیجه‌ی ۱۲.۵ از [۱۰] رجوع کنید. ■

۱—۴.۱ قضیه. *فرض کنیم G یک گروه موضعاً فشرده‌ی تک پیمانه‌ای باشد و $1 < p \leq 2$. دراین صورت برای هر $f, g \in L^p(G)$، $f * g$ همواره به عنوان یک تابع موجود است.*

اثبات. ابتدا فرض کنیم $1 < p < 2$ و $f, g \in L^p(G)$. قرار می‌دهیم

$$\alpha_1 = (2 - p)/p \quad \text{و} \quad \alpha_2 = \alpha_3 = (p - 1)/p.$$

بنابراین برای هر $x \in G$ داریم

$$\int_G (|f(xy)|^p |\tilde{g}(y)|^p)^{\alpha_1} \, |f(xy)^p|^{\alpha_2} |\tilde{g}(y)^p|^{\alpha_3} \, d\lambda(y) \quad = \quad \int_G |f(xy)| \, |\tilde{g}(y)| \, d\lambda(y)$$