بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه گیلان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

گرایش (جبر)

پایان نامه کارشناسی ارشد

طبقه بندی بعضی از p-گروههای منظم و کاربردهای آن

از

مهدی لمتر کاظمی

استاد راهنما

دکتر منصور هاشمی

شهریور ۱۳۸۷

تقدیم به

همسر مهربانم

و

پدر و مادر عزیزم

تقدیر و تشکر

سپاس خداوند مهربان و علیم را که توفیق گام نهادن در مسیر علم و لذت بردن از آن را به من عطا فرمود که به سامان رساندن این پایان نامه جز با مدد و لطفش امکان نمی یافت .

بر خود لازم می دانم که از استاد راهنمای اندیشمند و گرانقدرم ، آقای دکتر منصور هاشمی که با رهنمود های ارزنده خود همواره گره گشای مشکلاتم در این پایان نامه بودند تشکر کنم که اگر حسن و قوتی در این پژوهش باشد بی شک از راهنمایی های ایشان است و کاستی ها و لغزش ها از بی تجربگی من می باشد .

از محضر اساتید بزرگوار و ارجمند آقای دکتر حبیب الله انصاری و آقای دکتر شهاب الدین ابراهیمی بدلیل زحماتشان و داوری این پایان نامه کمال تشکر و سپاس را دارم .

در پایان والاترین سپاس را به محضر خانواده عزیزم که همواره مرا یاری کردند و همسر مهربانم و خانواده ی محترم ایشان که مشوقم بودند و مرا درک کردند ابراز می دارم.

فهرست مندرجات

فهرست علائم اختصاری :

بستار نرمال مجموعه R	$\overline{R}$
n بر m قابل قسمت است	$m \mid n$
A زیرگروه B است	$A \leq B$
A زیرگروه واقعی B است	$A < B$
A با B یکریخت است	$A \cong B$
زیرگروه تولیدشده با مجموعه ی X	$\langle X \rangle$
A زیرگروه نرمال B است	$A \lhd B$
مرتبه g	$\lvert g \rvert$
مرکز G	$Z(G)$
زیرگروه مشتق G	G'
مرکزساز H در G	$C_G(H)$
نرمالساز H در G	$N_G(H)$
زیرگروه فراتینی G	$\Phi(G)$
کوچکترین عدد طبیعی d که گروه متناهی مولد G با d عضو تولید می شود	$d(G)$
گروه آزاد بر مجموعه X	$F(X)$
نمایش گروه با مجموعه ی مولد X و مجموعه روابط R	$\langle X \mid R \rangle$
حلقه اعداد صحیح به پیمانه n	Z_p
جابجاگر $x_{۱}, \ldots, x_n$	$[x_{۱}, \ldots, x_n]$
ضریب دوجمله ای	$\binom{m}{n}$

چکیده

طبقه بندی بعضی از p-گروههای منظم و کاربردهای آن

مهدی لمترکاظمی

قضیه ی پایه ای p-گروههای منظم توسط هال[1] ، اثبات شده است . اخیرا سو[2] ، اثبات تازه ای برای آن ارائه نموده است که کوتاه تر و مفیدتر از اثبات هال است . در این پایان نامه براساس [۱۵] و [۱۷] و بـا اسـتفاده از ایـن اثبـات تازه ، برخی p-گروه های منظم را رده بندی می کنیم و بوسیله ی آن به رده بندی گروههـای از مرتبـه $p^۴$ و $p^۵$ برای $p \geq ۵$ (pعددی اول) می پردازیم .

کلمات کلیدی : گروه ، p-گروه منظم ، L- سری ، پایا ، پایه ی یکتا

P-Hall [1]
Ming-Yao-Xu [2]

Abstract

A classification of some regular p-groups and its applications

Mehdi Lamtar Kazemi

The regular p-groups basis theorem proved by P-Hall. Lastly Xu give a new proof for it that is shorter and useful than Halls proof. In this thesis from [15] , [17] and by this proof we classification some regular p-groups and we give a new approach to classification of groups of orders p^4, p^5 for $p \geq 5$,(p is prime) .

Key words : group , regular p-group , L-seri , invariant , uniqe basis

مقدمه

رده بندی p-گروههای از مرتبه ی p^n برای n های کوچک مسئله خیلی مهمی در نظریه ی گروههای متناهی است . برای $p > ۲$ چنین رده بندی فقط برای $n \leq ۷$ در [۷,۸,۱۰,۱۲] انجام شده است .

p-گروه منظم توسط *هال* تعریف شده است. در سال ۱۹۳۳ *هال* یک قضیه ی اساسی برای این گروهها ثابت کرد . اخیراً سو اثبات دیگری برای این قضیه ارائه نمود که کوتاهتر و مفیدتر از اثبات *هال* است . این اثبات به ما این امکان را می دهد که یک پایه یکتا برای p-گروههای منظم بدست آوریم که در بعضی از مسائل رده بندی می تواند مورد استفاده قرار گیرد .

ما در این پایان نامه براساس مقالات [۱۵] و [۱۷] به رده بندی p-گروه های از مرتبه ی $p^۴$ و $p^۵$ برای $p \geq ۵$ (p عددی اول) می پردازیم .

ابتدا در فصل اول بصورت خلاصه مقدمات و مفاهیم پیشنیاز را بیان می کنیم .

در فصل دوم به رده بندی p-گروههای منظم با e- پایاهای $(e,۱,۱)$ پرداخته و بوسیله ی آن گروههای از مرتبه ی $p^۴$ برای $p \geq ۵$ را رده بندی می کنیم .

در فصل سوم چنین رده بندی را برای p-گروههای منظم با e- پایاهای $(e,۱,۱,۱)$ برای $e \geq ۲$ و همچنین برای گروهها با e- پایاهای $(۱,۱,۱,۱,۱)$ ارائه می دهیم و با استفاده از نتایج بدست آمده به رده بندی گروههای از مرتبه ی $p^۵$ برای $p \geq ۵$ خواهیم پرداخت .

فصل اول

۱-۱ مفاهیم مقدماتی گروهها

۱-۲ p-گروههای منظم و L- سری ها

دراین فصل آن دسته از مفاهیم و قضایایی را مورد بررسی قرار می دهیم که در فصل های آتی مورد نیاز می باشند .

۱- ۱ مفاهیم مقدماتی گروهها

۱ . نمایش گروه

تعریف ۱ – ۱ – ۱. فرض کنیم F یک گروه ، X یک مجموعه و $\theta : X \to F$ یک تابع باشد . در این صورت F را بر X آزاد گوییم ، هرگاه به ازای هر گروه مانند G و هر تابع مانند $\alpha : X \to G$ یک همریختی منحصر بفرد مانند $\beta : F \to G$ موجود باشد بطوریکه $\theta o \beta = \alpha$.

تعریف ۱ – ۱ – ۲. فرض می کنیم X یک مجموعه و $F(X)$ گروه آزاد روی X باشد . اگر $R \subseteq F(X)$ و $\overline{R}$ بستار نرمال R باشد (اشتراک زیرگروههای نرمال F که شامل R هستند) آنگاه نماد $\langle X | R \rangle$ را برای گروه $\frac{F}{\overline{R}}$ به کار برده و آن را یک نمایش می نامیم .

تعریف ۱ – ۱ – ۳. فرض کنیم G یک گروه و X مولدی برای آن باشد ، یعنی $G = \langle X \rangle$. اگر F گروه آزاد روی X باشد $(F = F(X))$ آنگاه با تعریف گروه آزاد ، یک همریختی پوشا مانند $\beta : F \to G$ وجود دارد که $G \cong \frac{F}{Ker \beta}$. اکنون اگر R زیرمجموعه ای از F باشد که مولدی برای گروه $\ker \beta$ است ، آنگاه $\ker \beta = \langle R \rangle$ و $\overline{R} = \ker \beta$ (زیرا $\ker \beta$ زیرگروه نرمال است) .

با این مقدمات گوییم گروه G دارای نمایش $\langle X | R \rangle$ است و می نویسیم $G = \langle X | R \rangle$. همچنین X را مجموعه ی مولد و R را رابطه های گروه $G = \langle X | R \rangle$ می نامیم . اگر $r \in R$ (که کلمه ای در R است) آنگاه علامت $r = 1$ را در نمایش $G = \langle X | R \rangle$ به کار می بریم .

تعریف ۱ — ۱ — ۴. گروه G با نمایش متناهی نامیده می شود ، اگر دارای نمایشی مانند $\langle X \mid R \rangle$ باشد که در آن X و R متناهی اند .

بنابراین اگر $X = \{x_۱,...,x_n\}$ و $R = \{r_۱,...,r_k\}$ ، می نویسیم $G = \langle x_۱,...,x_n \mid r_۱ = ... = r_k = ۱ \rangle$.

مثال ۱ — ۱ — ۵. نمایش چند گروه مقدماتی بصورت زیر است :

(i) $\langle x \mid x^n = ۱ \rangle$ ، گروه دوری از مرتبه ی n .

(ii) $D_{۲n} = \langle x, y \mid x^۲ = ۱ , y^n = ۱ , (xy)^۲ = ۱ \rangle$ ، گروه دو وجهی از مرتبه ی $۲n$.

(iii) $Q_{۲n} = \langle x, y \mid x^{۲n-۱} = ۱ , y^۲ = x^{۲n-۲}, xyx = y \rangle$ ، $n \geq ۳$ ، گروه چهارگان تعمیم یافته .

تعریف ۱ — ۱ — ۶. فرض کنیم G یک گروه و $N \lhd G$ و یک زیرگروه از G مانند H موجود باشد بطوریکه $G = HN$ و $H \cap N = ۱$. در این صورت G را ضرب نیم مستقیم N و H گوییم و با نماد $G = H \ltimes N$ نشان می دهیم . در اینصورت هر عضو G دارای نمایش یکتا به صورت hn است بطوریکه $h \in H$ و $n \in N$.

۲ . گروههای فوق دوری

تعریف ۱ — ۱ — ۷. گروه G را فوق دوری گوییم ، هرگاه دارای زیرگروه نرمالی مانند N باشد بطوریکه N و G/N دوری باشند .

به نتایج زیر درباره ی گروههای فوق دوری نیاز داریم :

قضیه ۱ — ۱ — ۸ (هوپرت[1] [۶]). فرض کنیم p عدد اول فرد و A, B دو p-گروه دوری باشند . در این صورت $G = AB$ فوق دوری است.

---

[1] Huppert

قضیه ۱—۱—۹ (نیومن[1] و سو[۹]). هر p-گروه فوق دوری G ، (p عدد فرد) دارای نمایش زیر است :

$G=\left\langle a,b \,\middle|\, a^{p^{r+s+u}}=1,\ b^{p^{r+s+t}}=a^{p^{r+s}},\ a^{b}=a^{1+p^{r}} \right\rangle$ بطوریکه u,t,s,r اعداد صحیح هستند $u\le r$

$u\ge 0$ ، $t\ge 0$ ، $s\ge 0$ و $r\ge 1$ که این گروه با $\langle r,s,t,u \rangle$ نمایش داده می شود . بوسیله ی مقادیر مختلف از پارامترهای u,t,s,r با شرایط بالا ، p-گروههای فوق دوری غیر یکریخت را بدست می آوریم .

۳ . گروههای پوچتوان و زیرگروه فراتینی

تعریف ۱—۱—۱۰. گروه G را پوچتوان گویند ، اگر دارای سری بصورت $1=G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_n=G$ باشد بطوریکه ، اولاً $G_i \lhd G$ و ثانیاً $\frac{G_{i+1}}{G_i}\le Z\left(\frac{G}{G_i}\right)$ برای $0\le i\le n-1$ که به آن سری مرکزی می گوییم . طول کوتاهترین سری مرکزی گروه G را رده ی پوچتوانی گروه گوییم که با $c(G)$ نمایش می دهیم .

مثال ۱—۱—۱۱. گروههای آبلی نمونه ای از گروههای پوچتوانند و رده ی پوچتوانی آنها یک است . همچنین به راحتی می توان نشان داد که هر p-گروه متناهی پوچتوان است .

یکی از زیرگروههای پوچتوان مهم گروههای متناهی زیرگروه فراتینی است که ساختار گروههای متناهی پوچتوان به آن وابسته است .

تعریف ۱—۱—۱۲. فرض کنیم G یک گروه باشد . اشتراک همه ی زیرگروههای ماکسیمال G را زیرگروه فراتینی G می نامند و آن را با علامت $\Phi(G)$ نشان می دهند . اگر G فاقد زیر گروه ماکسیمال باشد بر طبق قرار داد $\Phi(G)=G$.

تعریف ۱—۱—۱۳. عضو g از G را غیرمولد گویند در صورتی که اگربه ازای $X\subseteq G$ داشته باشیم $G=\langle X,g\rangle$ آنگاه $G=\langle X\rangle$.

---

[1] Newman

اثبات لم و قضایای زیر در [۱] آمده است .

لم ۱ - ۱ - ۱۴. فرض کنیم G یک گروه متناهی و $C \subseteq G$ و $D \subseteq \Phi(G)$. در این صورت اگر $G = \langle C, D \rangle$ آنگاه $G = \langle C \rangle$ یعنی زیرگروه فراتینی گروه G برابر است با مجموعه ی تمام اعضای غیر مولد گروه G .

قضیه ۱ - ۱ - ۱۵. فرض کنیم G یک p-گروه متناهی باشد در این صورت داریم $\Phi(G) = G'\mho_1(G)$.

قضیه ۱ - ۱ - ۱۶(قضیه ی پایه ای برنساید) . فرض کنیم G یک p-گروه متناهی باشد و $|G/\Phi(G)| = p^r$ ، در این صورت هر مجموعه ی مولد G با t عضو دارای زیرمجموعه ای r عضوی است که G را تولید می کند .

تعریف ۱ - ۱ - ۱۷. زیرگروه H از گروه G را مشخصه گوییم ، اگر به ازای هر خودریختی از G مانند α داشته باشیم $\alpha(H) = H$.

تعریف ۱ - ۱ - ۱۸. فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروه آن باشد در اینصورت H را مرکزساز خود گویند اگر $C_G(H) \leq H$ و $Z(H) = C_G(H)$.

تعریف ۱ - ۱ - ۱۹. فرض کنیم G یک گروه و H زیرگروه آن و g عضوی از G باشند ، در اینصورت :

$$gH = \{ gh : \text{عضوی از } H \text{ است } h \}$$

را یک همدسته ی چپ H در G گوییم .

رابطه ی هم ارزی مقابل را تعریف می کنیم : $\quad x \sim y \Leftrightarrow x^{-1}y \in H$

در اینصورت همدسته های چپ H در G کلاسهای هم ارزی تحت این رابطه هستند . یک نماینده از این کلاس هم ارزی را یک نماینده ی همدسته می گویند .

۴. جابجاگرها

در این بخش چند فرمول برای محاسبه ی جابجاگرها ارائه می دهیم .

اثبات قضایای زیر در [۱۳] آمده است .

قضیه ۱—۱—۲۰. فرض کنید G یک p-گروه باشد که $c(G)=c$ و فرض کنیم که $a_1,\dots,a_i,\dots,a_c \in G$ و $1\leq i\leq c$. فرض کنید $i_1,\dots,i_c$ اعداد صحیح دلخواهی باشند ، در این صورت $[a_1^{i_1},\dots,a_c^{i_c}]=[a_1,\dots,a_c]^{i_1\dots i_c}$.

قضیه ۱—۱—۲۱. فرض کنید G گروه فوق دوری باشد و z,y,x اعضای G باشند :

(۱). اگر $z\in G'$ ، در این صورت $[z,x]^{-1}=[z^{-1},x]$.

(۲). اگر $y\in G'$ ، در این صورت $[xy,z]=[x,z][y,z]$ و $[z,xy]=[z,x][z,y]$.

(۳). $[x,y^{-1},z]^{y}=[y,x,z]$ و $[x,y,z^{x}]=[x,y,z]$.

(۴). $[x,y,z][y,z,x][z,x,y]=1$.

(۵). اگر $z\in G'$ ، در این صورت $[z,y,x]=[z,x,y]$.

برای بیان دو فرمول بعدی ما قرارداد زیر را بیان می کنیم :

برای هر عدد صحیح و مثبت j,i داریم $[ia,jb]=\left[a,b,\underbrace{a,\dots a}_{i-1},\underbrace{b,\dots,b}_{j-1}\right]$ ، لذا :

(۶). برای هر عدد صحیح و مثبت n,m ، $[a^m,b^n]=\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}[ia,jb]^{\binom{m}{i}\binom{n}{j}}$.

(۷). فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد در این صورت : $(ab^{-1})^n=a^n\prod_{i+j\leq n}[ia,bj]^{\binom{n}{i+j}}b^{-n}$.

تعریف ۱—۱—۲۲. فرض می کنیم G یک گروه ، N زیرگروه نرمال آن و $a,b\in G$ باشند . از نماد $a\equiv b$ (هنگ N) برای بیان اینکه a و b در یک همدسته از N در G هستند استفاده می کنیم . به عبارت دیگر اگر $a^{-1}b\in N$ باشد .

۱-۲ p-گروههای منظم و L- سری ها

۱. p-گروههای منظم

در این قسمت ابتدا چند مفهوم در مورد p-گروهها را معرفی خواهیم کرد .

فرض کنیم G یک p-گروه متناهی باشد ، از نمادهای $c(G)$ به عنوان (رده پوچتوانی) و $d(G)$ (کوچکترین عدد طبیعی d که گروه G با d عضو تولید می شود- کوچکترین مقدار مولد ها) و $p^{e(G)}$ (نمای G) استفاده می کنیم .

تعریف ۱ — ۲ — ۱. برای هر عدد صحیح n تعریف می کنیم :

$$. G_n = \Big[\underbrace{G, G, \ldots, G}_{\text{n بار}}\Big] = \left\langle \ [a_1, a_2, \ldots, a_n] \ \middle| \ a_i \in G \ \right\rangle$$

سری مرکزی پایینی G را بصورت $G = G_1 > G_2 > \ldots > G_{c+1} = 1$ داریم .

همچنین $Z_0(G) = 1$ و $Z_1(G) = Z(G)$ و $Z_n(G)$ بوسیله ی استقرا برای $n > 1$ به صورت زیر تعریف می کنیم .

$$Z\left(G/Z_{n-1}(G)\right) = Z_n(G)/Z_{n-1}(G)$$

سری مرکزی بالایی G را بصورت $1 = Z_0(G) < Z_1(G) < \ldots < Z_c(G) = G$ نشان می دهیم .

تعریف ۱ — ۲ — ۲ برای هر عدد صحیح s که $0 \le s \le e$ تعریف می کنیم :

$$\Lambda_s(G) = \left\{a \in G : a^{p^s} = 1\right\} \quad \text{و} \quad \Omega_s(G) = \left\langle \Lambda_s(G) \right\rangle$$

$$V_s(G) = \left\{a^{p^s} : a \in G\right\} \quad \text{و} \quad \mho_s(G) = \left\langle V_s(G) \right\rangle$$

در این صورت

$$1 = \Omega_0(G) < \Omega_1(G) \le \ldots \le \Omega_e(G) = G$$

سری توانی بالایی

و $$G=\mho_0(G)>\mho_1(G)>\ldots>\mho_e(G)=1$$

سری توانی پایینی Gنامیده می شوند که دارای طول های مساوی $e=e(G)$ می باشند .

تعریف ۱ — ۲ — ۳. p-گروه متناهی G را منظم گوییم اگر برای هر $a,b\in G$ داشته باشیم

$(ab)^p=a^pb^pc_1{}^p\ldots c_s{}^p$ بطوریکه $c_1,\ldots,c_s\in\langle a,b\rangle'$.

تعریف ۱ — ۲ — ۴. p-گروه متناهی G، p- آبلی نامیده می شود اگر برای هر دو عضو $a,b\in G$ داشته باشیم

$(ab)^p=a^pb^p$.

قضیه ۱ — ۲ — ۵. فرض کنید G یک p-گروه منظم باشد. در این صورت G ، p- آبلی است اگر و تنها اگر

$\exp(G')=p$.

برهان : بنا به قضیه ای در [۱۳] برای هر $a,b\in G$ داریم : $(ab)^p=a^pb^p[b,a]^{\frac{p(p-1)}{2}}$.

فرض می کنیم G گروهی p- آبلی باشد لذا بنا به تعریف خواهیم داشت $[b,a]^{\frac{p(p-1)}{2}}=e$. حال چون $\langle[b,a]\rangle$ زیرگروه p-گروه G است لذا $|\langle[b,a]\rangle|=p^t$. لذا $p^t\mid\frac{p(p-1)}{2}$ و این نتیجه می دهد که $t=1$. لذا $|[b,a]|=p$ و $\exp(G')=p$.

برعکس : اگر $\exp(G')=p$ آنگاه $|[b,a]|=p$ لذا $[b,a]^{\frac{p(p-1)}{2}}=e$ و این یعنی $(ab)^p=a^pb^p$. □

تعریف ۱ — ۲ — ۶. p-گروه متناهی G را فوق- خاص گوییم ، اگر $G'=Z(G)$ و $|G'|=p$ باشد .

گروههای D_8 و Q_8 مثالهایی از چنین گروههایی هستند .

تعریف ۱ — ۲ — ۷. گروه G را ضرب مرکزی از زیرگروههای نرمالش مانند $G_1,\ldots,G_n$ گوییم ، اگر $G=G_1G_2\ldots G_n$ بطوریکه به ازای $i\neq j$ داشته باشیم $[G_i,G_j]=1$ و $G_i\cap\prod_{j\neq i}G_j=Z(G)$ برای هر i .

در [۱۴] آمده است که هر p-گروه فوق- خاص ضرب مرکزی زیرگروههای غیرآبلی از مرتبه ی p^{3} خود است.

ساختار توانی p-گروههای منظم ویژگی های اساسی زیر را داراست :

لم ۱ — ۲ — ۸. فرض کنید G یک p-گروه منظم باشد و $\exp(G)=p^{e}$ که $e>0$ در این صورت به ازای هر $0\leq i\leq e$ داریم :

$$\mho_{i}(G)=\left\langle g^{p^{i}} \,\middle|\, g\in G\right\rangle=\left\{g^{p^{i}}:g\in G\right\} \quad (1)$$

$$\Omega_{i}(G)=\left\langle g\in G \,\middle|\, g^{p^{i}}=1\right\rangle=\left\{g\in G:g^{p^{i}}=1\right\} \quad (2)$$

$$\left|\mho_{i}(G)\right|=\left|G/\Omega_{i}(G)\right| \quad (3)$$

$$a^{p^{i}}=b^{p^{i}}\Leftrightarrow\left(ab^{-1}\right)^{p^{i}}=1\Leftrightarrow\left(a^{-1}b\right)^{p^{i}}=1 \quad (4)$$

$$\left[a^{p^{i}},b\right]=1\Leftrightarrow[a,b]^{p^{i}}=1\Leftrightarrow\left[a,b^{p^{i}}\right]=1 \quad (5)$$

لم ۱ — ۲ — ۹. فرض کنیم G یک p- گروه منظم باشد و $\exp(G)=p^{e}$ و $e>0$

در اینصورت برای $1\leq i\leq e$ داریم :

$$\left|\Omega_{i}(G)/\Omega_{i-1}(G)\right|=\left|\mho_{i-1}(G)/\mho_{i}(G)\right|$$

قرار می دهیم $\left|\Omega_{i}(G)/\Omega_{i-1}(G)\right|=p^{\omega_{i}}$ بنابراین $\omega=\omega_{1}\geq\omega_{2}\geq\ldots\geq\omega_{e}=0$.

تعریف ۱ — ۲ — ۱۰. در لم فوق $(\omega_{1},\ldots,\omega_{e})$ را ω- پایاهای گروه G می نامیم .

برای $1\leq j\leq\omega=\omega_{1}$ ، از e_{j} برای بیان تعداد ω_{i} هایی که $\omega_{i}\geq j$ است استفاده می کنیم . در این صورت $e=e_{1}\geq e_{2}\geq\ldots\geq e_{\omega}\geq1$ و $(e_{1},\ldots,e_{\omega})$ را e- پایاهای G می نامیم .

اگر گروه آبلی باشد $p^{e_{1}},\ldots,p^{e_{\omega}}$ همان مرتبه های عناصر پایه می باشند .

مثال ۱ — ۲ — ۱۱. فرض کنیم $G=\left\langle a,b,c \middle| a^{p^{2}}=b^{p^{2}}=c^{p}=1,\ [a,b]=c\ ,\ [a,c]=[b,c]=1 \right\rangle$

بطوریکه $p>2$. در اینصورت G دارای e- پایاهای $(2,2,1)$ می باشد .

تعریف ۱ — ۲ — ۱۲. فرض کنیم G یک p-گروه و $b_1,...,b_\omega$ اعضای G باشد . گوییم $(b_1,...,b_\omega)$ یک پایه ی یکتا $(U.B)$ برای G است اگر هر عضو $g\in G$ دارای نمایش یکتا به فرم $g=b_1^{\alpha_1}b_2^{\alpha_2}..b_\omega^{\alpha_\omega}$ و $0\le\alpha_j\le o(b_j)$ و $1\le j\le\omega$ باشد .

هال در [۴] ثابت کرد که هر p-گروه منظم حداقل یک پایه ی یکتا دارد و مرتبه های اعضای پایه توسط گروه مشخص می شود . او دو قضیه ی زیر را ثابت کرد :

قضیه ۱ — ۲ — ۱۳. فرض کنید $(b_1,...,b_r)$ یک $U.B$ برای p-گروه منظم G با پایاهای $(e_1,...,e_\omega)$ باشد ، در این صورت $r=\omega$ و مرتبه ی b_i ها نزولی از مرتبه ی p^{e_i} هستند .

قضیه ۱ — ۲ — ۱۴. هر p-گروه منظم حداقل یک $U.B$ دار د .

برای مشخص کردن تفسیر ما از قضیه ی فوق ابتدا L- سری ها را برای p-گروههای منظم تعریف می کنیم .

تعریف ۱ — ۲ — ۱۵. فرض کنیم G یک p-گروه منظم باشد . قرار دهید $W_i(G)=\mho_1(G)\Omega_i(G)$.

برای $0\le i\le e$ بدست می آوریم :

$$G=W_e(G)\ge W_{e-1}(G)\ge\ldots\ge W_0(G)=\mho_1(G)$$

با حذف بخشهای تکراری در عبارت بالا آن را به صورت زیر ساده می کنیم

$$G=L_0(G)>L_1(G)>\ldots>L_\omega(G)=\mho_1(G) \qquad (*)$$

(*) را یک L- سری از G می نامیم .

به جای اثبات قضیه ی $(1-2-14)$ ، **سو** قضیه ی زیر را ثابت کرد که در [17] آمده است.

قضیه ۱ – ۲ – ۱۶. فرض کنید G یک p-گروه منظم و $G=L_0(G)>L_1(G)>...>L_\omega(G)=\mho_1(G)$ یک L-سری از G باشد . برای $1\le i\le \omega$ ، $b_i\in L_{i-1}(G)-L_i(G)$ را طوری انتخاب می کنیم که $o(b_i)$ کوچکترین مقدار ممکن باشد . در این صورت $(b_1,...,b_\omega)$ یک $U.B$ از G است .

با استفاده از اثبات قضیه ی بالا نتیجه زیر را داریم که در [15] آمده است .

نتیجه ۱ – ۲ – ۱۷. فرض کنید

$$G=L_0(G)>L_1(G)>...>L_\omega(G)=\mho_1(G) \quad \text{و} \quad G=W_e(G)\ge W_{e-1}(G)\ge ...\ge W_0(G)=\mho_1(G)$$

W - سری و L- سری از p-گروه منظم G باشند . در اینصورت برای هر $i=0,1,...,e-1$ داریم

. $W_i(G)=L_{\omega_{i+1}}(G)$