دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی


پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی

# کاربرد W-TGM برای حل معادلات با مشتقات جزئی


استاد راهنما : دکتر علی داوری

پژوهشگر: ندا کارگر


آبان ۱۳۹۱

تقدیر و تشکر

ستایش خدای را که به من اظهار کمال دوستی فرمود با آن که از من بی نیاز بود.

این مجموعه را مرهون راهنمایی های استاد گرامی و بزرگوارم جناب آقای دکتر علی داوری می دانم که فراتر از یک استاد راهنما در نهایت صبر و شکیبایی مرا تشویق و راهنمایی نموده اند. بر خود لازم می دانم از زحمات بی دریغ ایشان صادقانه سپاسگزاری کنم گرچه تشکر من قطره ای در برابر دریای بیکران محبت ها و کمک های ایشان می باشد. از درگاه ایزد منان توفیقی روز افزون برای ایشان خواهانم.

زحمات اساتید داور، جناب آقای دکتر کیوان مهاجر، داور داخلی و جناب آقای دکتر مهدی قاسمی، داور خارجی را ارج نهاده و از ایشان تشکر می کنم.

همچنین از دوستان عزیز و گرانقدرم سرکار خانم افضلی پور و آقایان، حاجی شریفی، شاکری، آزادی، احمدی، قادری و دیگر دوستان که به بنده لطف داشتند به پاس محبت های بی دریغ شان کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان از خانم ها، فرهمند و غازی سپاسگزارم.

تقدیم به

گران بهاترین سرمایه های زندگی ام

پدر و مادر عزیزم

## چکیده

در این پایان‌نامه حل معادله‌ی انتشار حرارت $u_t = -au_x + \nu u_{xx}$ برای $a, \nu > 0$ با شرایط مرزی متناوب در حالت یک بعدی و دوبعدی در نظر گرفته شده است، در حالت یک بعدی روش‌های تفاضلات متناهی، موجک گالرکین و موجک تیلورگالرکین روی آن پیاده‌سازی و از نظر خطا با یکدیگر مقایسه شده‌اند. درنهایت با استفاده از تکنیک فشرده‌سازی داده‌ها هزینه محاسباتی را کاهش می‌دهیم. در حالت دو بعدی نیز روش‌های موجک گالرکین و موجک تیلورگالرکین روی معادله انتشار حرارت فوق پیاده‌سازی شده و دقت آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.



**کلیدواژه‌ها:** موجک – روش گالرکین- روش تیلورگالرکین- معادلات سهموی- معادلات هذلولوی

# فهرست مطالب

# پیش گفتار

مدل بندی مسائل و پدیده‌های فیزیکی در بسیاری از زمینه‌های علمی منجر به حل یک معادله تابعی به صورت زیر می‌شود

$$Lu = f$$

که در آن $L : X \longrightarrow Y$ یک عملگر بین فضاهای تابعی $x$ و $y$ است و $u$ تابعی مجهول و $f$ تابعی معلوم است. به‌دست آوردن جواب برای معادلات تابعی همیشه امکان پذیر نبوده و در بسیاری موارد تقریبا غیرممکن است بنابراین باید از روش‌های تقریبی برای حل این مسائل استفاده کرد. انتخاب روش تقریبی برای حل این مسائل اغلب با توجه به شکل مسأله، پیچیدگی دامنه مساله و دقت مورد نیاز انجام می‌شود. روش‌های تقریبی که برای حل معادلات تابعی به کار می‌روند معمولا به دو دسته تقسیم می شوند: دسته اول: روش‌های موضعی[۱] هستند که در آنها دامنه تعریف مسأله به تعداد متناهی زیر دامنه تقسیم می‌شود سپس در هر زیر دامنه جواب مسأله توسط توابع پایه‌ای مناسب تقریب زده می‌شود. روش تفاضلات متناهی[۲] و روش عناصر متناهی[۳] از جمله مهمترین و پرکاربردترین روش‌های موضعی هستند که روش تفاضلات متناهی در مسائل با دامنه پیچیده دارای کارایی و دقت خوبی است. دسته دوم: روش‌های فراگیر[۴] هستند که برای حل عددی مسائل، جواب مساله را در سراسر دامنه به صورت مجموعی از توابع پایه‌ای مناسب تقریب می‌زنند. روش‌های فراگیر معمولا برای حل مسائلی که دارای ساختار و شکل دامنه ساده‌ای هستند و به دقت بیشتری نیاز دارند به کار می‌روند. بدون تردید مهمترین و موفق‌ترین روش‌های فراگیر برای حل معادلات تابعی به ویژه معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل

[۱] local methods

[۲] finite difference

[۳] finite elements

[۴] global methods

با مشتقات جزئی، روش‌های طیفی [۵] هستند. معرفی سری فوریه برای نمایش توابع متناوب توسط ژوزف فوریه [۶] در سال ۱۸۰۷ نقطه شروعی برای استفاده از روش‌های طیفی بود که در فصل دوم تعریف شده است [1,7,11]. در روش‌های طیفی تابع جواب به‌وسیله‌ی توابع پایه‌ای در سراسر دامنه تعریف مسأله به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n \varphi_n(x)$$

که درآن $\varphi_n(x)$ها توابع پایه‌ای و $a_n$ها ضرایب مجهول هستند که باید با توجه به شرایط مسأله و توابع پایه‌ای محاسبه شوند، نکته اساسی در روش‌های طیفی انتخاب توابع پایه‌ای و توابع آزمونی است که توابع آزمونی برای تضمین این که، سری به‌دست آمده برای تقریب تابع جواب، با حداکثر دقت ممکن در معادله صدق کند مورد استفاده قرار می‌گیرد. انتخاب توابع آزمونی، روش‌های طیفی را از یکدیگر متمایز می‌کند و با توجه به نوع انتخاب این توابع، سه دسته روش طیفی به نام‌های گالرکین [۷]، هم‌محلی [۸] و تاو [۹] برای تقریب جواب معادلات تابعی، می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند اولین کاربرد روش‌های طیفی، استفاده از روش گالرکین برای حل مسأله معادلات با مشتقات جزئی است که درفصل چهار این روش مورد بررسی قرار می‌گیرد [2,43] . در حل معادلات تابعی با استفاده از روش‌های طیفی، یک رویکرد بسیار مفید و کارآمد، استفاده از عملگرهای ماتریسی است، فرض کنید $\Phi(x) = [\varphi_1, \ldots, \varphi_N]$ یک مجموعه از پایه‌ها باشد برای تقریب تابع $u(x)$ به کار می‌رود و $L$ عملگری در معادله تابعی مورد نظر است در این صورت عملگر $M$ برای این مجموعه توابع پایه‌ای و عملگر $L$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$L\Phi(x) = M\Phi(x)$$

که در آن عملگر ماتریسی $M$ با توجه به توابع پایه‌ای و نوع عملگر $L$ قابل محاسبه است. در فصل سوم موجک‌های دوبشی [۱۰] که متعامدیکه با محمل فشرده و پیوسته هستند به طور کامل توضیح داده می‌شوند [1,3]. در روش طیفی گالرکین مجموعه توابع پایه‌ای را موجک‌های دوبشی در نظر می‌گیریم که منجر به ایجاد روش موجک

[۵] spectral methods

[۶] joseph fourier

[۷] galerkin

[۸] collocation

[۹] tau

[۱۰] daubechies wavelets

گالرکین[۱۱] می‌شود و در فصل ششم این روش روی معادله انتشار حرارت خطی $u_t = -au_x + \nu u_{xx}$ برای $a, \nu > 0$ پیاده‌سازی شده است [3,39,40,46]. از آن‌جاکه موجک‌های دوبشی نمایش صریحی ندارند، مشتق گرفتن از آن‌ها امکان پذیر نیست لذا در فصل پنجم یک روند کلی برای محاسبه مشتق این موجک‌ها با استفاده از ضرایب مرتبط[۱۲] و ماتریس مشتق [۱۳] معرفی می‌کنیم [3,5,25,45] . درفصل ششم روش‌های تفاضلات متناهی، موجک گالرکین و موجک تیلورگالرکین روی معادله انتشار حرارت خطی پیاده‌سازی شده و نهایتا درفصل هفتم این روش‌ها از نظر خطا با یکدیگر مقایسه شده‌اند [3,19].

[۱۱] galerkin wavelet

[۱۲] connection coefficients

[۱۳] differential matrix

# فصل ۱

# تعاریف و قضایای اولیه

در این فصل به مرور قضایایی از آنالیزحقیقی و آنالیزتابعی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای دانستن مطالب بیشتر به [1,4,5,6,7] مراجعه شود.

## ۱.۱ فضاهای نرم‌دار

**تعریف ۱.۱.۱** تابع حقیقی $||.||$ بر روی فضای برداری $X$ یک نرم نامیده می‌شود اگر شرایط زیر برقرار باشد:

1. $||x|| \geq 0\ ,\ ||x|| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

2. $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

3. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

که در آن $x$ و $y$ عناصر دلخواهی از $X$ هستند و$\alpha$ یک اسکالر دلخواه است.

**تعریف ۲.۱.۱** فضای برداری $X$ خطی نامیده می‌شود. اگر

$$||x+y|| = ||x|| + ||y||; \qquad \forall x, y \in X$$

**تعریف ۳.۱.۱** فضای خطی $X$ مجهز به نرم $||.||$ را یک فضای خطی نرم‌دار می‌نامند.

**تعریف ۴.۱.۱** اگر $V$ یک فضای برداری بر روی میدان $\mathbb{F}$ باشد، یک پایه برای $V$، مجموعه‌ای مستقل خطی از بردارهای $V$ است که فضای $V$ را پدید می‌آورد و فضای $V$ را با بعد متناهی گوییم هرگاه یک پایه‌ی متناهی داشته باشد.

**تعریف ۵.۱.۱** یک فضای خطی همانند $X$، فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود اگر تابعی حقیقی مانند $(.,.)$ بر روی $X \times X$ تعریف شده باشد که برای هر $x, y, z \in X$ و هر اسکالر $\alpha$ و $\beta$ در شرایط زیر صدق نماید:

1. $(x, y) = \overline{(x, y)}$
2. $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$
3. $(x, x) \geq 0$
4. $(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

**تعریف ۶.۱.۱** زیرفضای $S$ از فضای ضرب داخلی $X$ را متعامد می‌نامیم اگر برای هر $x, y \in S$ که $x \neq y$ داشته باشیم $(x, y) = ۰$ و آن را با نماد $x \perp y$ نشان می‌دهیم. همچنین زیر فضای $S$ از $X$ را متعامدیکه می‌نامیم اگر به ازای هر $x, y \in S$ داشته باشیم:

$$(x, y) = \begin{cases} ۰ & x = y \\ ۱ & x \neq y \end{cases}$$

و زیرفضای مکمل متعامد $S$ را با $S^{\perp}$ نشان می‌دهیم که شامل همه‌ی عناصری از $X$ است که بر $S$ عمود باشند، به عبارت دیگر:

$$S^{\perp} = \{y \in X | y \perp S\}$$

**تعریف ۷.۱.۱** فضای خطی نرم دار $X$ را کامل می‌گوییم هرگاه هر دنباله‌ی کوشی در آن به نقطه‌ای از $X$ همگرا باشد.

**تعریف ۸.۱.۱** یک فضای ضرب داخلی کامل، فضای هیلبرت نامیده می‌شود.

فضای هیلبرت مورد استفاده در این پایان‌نامه تمام توابع $L^{۲}[a, b]$ است که عبارت است از:

$$L^{۲}[a, b] = \{x(t) \mid \int_a^b |x(t)|^{۲} \mathrm{d}t < \infty\}$$

**تعریف ۹.۱.۱** مجموعه‌ی توابع $C_{\circ}^{\infty}(\Omega)$ را مجموعه‌ی توابع بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر با محمل فشرده روی ناحیه‌ی $\Omega$ می‌نامیم.

**تعریف ۱۰.۱.۱** فرض کنید توابع مختلط $f$و $g$ بربازه ی $[a,b]$ تعریف شده باشند و تابع وزن $w(x)$ در بازه ی $[a,b]$ تعریف شده و مثبت باشد، ضرب داخلی $f$و $g$ نسبت به تابع وزن $w(x)$ برابر با:

$$(f,g)=\int_a^b w(x)f(x)\overline{g(x)}dx$$

**تعریف ۱۱.۱.۱** نامساوی کوشی شوارتز[۱] اگر$X$ فضای ضرب داخلی باشد آن گاه:

$$||(x,y)||\leq ||x||.||y||;\forall x,y\in X$$

**تعریف ۱۲.۱.۱** در زیر سه نرم معروف را نام می‌بریم:

1. $||x||_1=|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|=\sum_{i=1}^n |x_i|$ (نرم یک یا نرم مجموع)
2. $||x||_2=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}$ (نرم دویا نرم اقلیدسی)
3. $||x||_\infty=\max_{1\leq i\leq n}|x_i|$ (نرم ماکزیمم یا نرم بی‌نهایت)

**تعریف ۱۳.۱.۱** فضای $L^{۲}([a,b])$ ،مجموعه‌ی همه‌ی توابع مربع انتگرالپذیر روی $[a,b]$ است به عبارتی:

$$L^{۲}([a,b])=\{f:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}\text{یا}\mathbb{C};\quad \int_a^b |f(t)|^{۲}dt<\infty\}$$

فضای $L^{۲}$ از بعد نامتناهی است به عنوان مثال اگر $a=\circ$ و $b=۱$ مجموعه توابع $\{۱,t,t^{۲},\ldots\}$ به $L^{۲}([\circ,۱])$ تعلق دارند. اما تابع $f(t)=\frac{۱}{t}$ به $L^{۲}([\circ,۱])$ تعلق ندارد زیرا:

$$\int_{\circ}^{۱}\frac{۱}{t^{۲}}\mathrm{d}t=\infty$$

در بخش بعد به بررسی برخی خواص تعامد و تصویرمتعامد در فضای ضرب داخلی می‌پردازیم که پیش نیازهای فصل(۳) هستند.

[۱] cauchy schwarz

### ۱.۱.۱ تعامد

**تعریف ۱۴.۱.۱** فرض کنید $V$ یک فضای ضرب داخلی باشد دراین صورت:

۱. بردارهای $x$ و $y$ متعامدند هرگاه $\langle x,y\rangle=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_n\overline{y_n}=0$

۲. دو زیرفضای $V_1,V_2$ متعامدند اگرهر بردار در $V_1$ بر هر یک از بردارهای$V_2$ عمود باشد.

۳. گردایه بردارهای $e_i$، $i=1,2,\dots,N$ متعامد یکه‌اند،هرگاه هر $e_i$ دارای طول واحد باشد یعنی$||e_i||=$ ۱ وبرای $\langle e_i,e_j\rangle=0, i\neq j$

۴. یک پایه متعامدیکه با یک دستگاه متعامدیکه برای $V$، یک پایه ازبردارهای $V$ است که متعامد یکه‌اند.

**تعریف ۱۵.۱.۱** دوتابع $f,g$ را نسبت به تابع وزن $w(x)$ بربازه‌ی $(a,b)$ متعامد گویند هرگاه $\langle f,g\rangle=0$

**تعریف ۱۶.۱.۱** دنباله توابع $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ را دنباله توابع متعامد یکه می‌نامند هرگاه برای هر $n,m$ طبیعی داشته باشیم:

$$(f_n,f_m)=d_n\delta_{n,m}$$

که در آن

$$\delta_{n,m}=\begin{cases}1 & n=m\\ 0 & n\neq m\end{cases}$$

دلتای کرانکر نام دارد.

### ۲.۱.۱ تصویرمتعامد

**تعریف ۱۷.۱.۱** فرض کنید $V_0$ زیرفضایی با بعد متناهی ازفضای ضرب داخلی $V$ باشد. برای هر بردار$v\in V$ تصویر متعامد $v$ برروی $V_0$ بردار یکتای $v_0\in V_0$ است که نزدیک‌ترین بردار به $v$ است، یعنی:

$$||v-v_0||=\min_{w\in V_0}||v-w||$$

**تعریف ۱۸.۱.۱** فرض کنید $V$ یک فضای ضرب داخلی و $V_\circ$ یک زیرفضای $N-$بعدی با پایه‌ی متعامدیکه $\{e_۱, e_۲, \dots, e_N\}$ باشد. تصویر متعامد برای $v \in V$ بر روی زیرفضای $V_\circ$ را با $v_\circ = \sum_{i=۱}^{N} a_i e_i$ نشان می‌دهیم که در آن $a_i = \langle v, e_i \rangle$ است.

**قضیه ۱.۱.۱** فرض کنید $V$ یک فضای ضرب داخلی و $V_\circ$ یک زیرفضای با بعد متناهی از $V$ باشد. اگر $v_\circ$ تصویر متعامد $v$ در $V_\circ$ باشد، آن‌گاه $v - v_\circ$ برهر بردار در $V_\circ$ عمود است.

**اثبات.** به [1] رجوع شود . ■

**تعریف ۱۹.۱.۱** فرض کنید $V$ یک فضای ضرب داخلی و $V_\circ$ زیر فضایی از آن باشد آن‌گاه متمم متعامد $V_\circ$ که با $V_\circ^\perp$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ی همه‌ی بردارهای $V$ است که بر $V_\circ$ عمودند یعنی:

$$V_\circ^\perp = \{v \in V \text{ s.t } \langle v, w \rangle = \circ \ \forall w \in V_\circ\}$$

**قضیه ۲.۱.۱** فرض کنید $V_\circ$ زیرفضای بابعد متناهی، از فضای ضرب داخلی $V$ باشد. هر بردار $v \in V$ را می‌توان به طور یکتا به صورت $v = v_\circ + v_۱$ نوشت که $v_\circ \in V_\circ$ و $v_۱ \in V_\circ^\perp$ است. یعنی $V = V_\circ \oplus V_\circ^\perp$.

**اثبات.** به [1] رجوع شود. ■

## ۲.۱ عملگرهای خطی

عملگرهای خطی خانواده‌ای از عملگرها هستند که دارای خواص ماتریس‌ها هستند در این بخش با عملگرهای خطی و نرم آن‌ها آشنا می‌شویم که پیش نیازهای فصل (۴) و (۷) هستند.

**تعریف ۱.۲.۱** فرض کنید $X$ و $Y$ دو فضای خطی باشند آن‌گاه $L : X \longrightarrow Y$ را یک عملگر خطی گویند اگروتنهااگر برای هر $x, y \in X$ و برای اسکالرهای $\mu$ و $\lambda$ داشته باشیم:

$$L(\lambda x + \mu y) = \lambda L(x) + \mu L(y)$$

**تعریف ۲.۲.۱** فرض کنید که $X$ و $Y$ دو فضای خطی نرم‌دار و $L : X \longrightarrow Y$ یک عملگرخطی باشد. آن‌گاه $L$ را کراندار گویند هرگاه ثابت مثبت $M$ در $\mathbb{R}$ موجود باشد به طوری که برای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$||L(X)|| \leq M||x||$$

### ۱.۲.۱ بردارویژه و مقدارویژه

**تعریف ۳.۲.۱** اگر $L$ عملگر خطی روی فضای برداری $V$ باشد و به ازای یک بردار غیر صفر $X$ در $V$ و یک اسکالر $\lambda$ داشته باشیم $L(X) = \lambda X$ آن‌گاه $\lambda$ را مقدارویژه‌ی $L$ و $X$ را بردارویژه $L$، متناظر با $\lambda$ می‌نامند.

**تعریف ۴.۲.۱** مجموعه‌ی بردارهای ویژه‌ای از $L$ را که با مقدارویژه‌ی $\lambda$ متناظرند، فضای ویژه‌ی$L$ متناظر با $\lambda$ می‌نامند.

**تعریف ۵.۲.۱** فرض کنیم $L$ عملگری خطی روی فضای برداری $V$ باشد در این صورت فضای پوچ $L$ را با $N_L$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$N_L = \{x \in V \mid L(x) = ۰\}$$

از آن‌جاکه $L(X) = \lambda X$ هم‌ارز $(L - \lambda I)(X) = ۰$ است، نتیجه می‌شود که$X$ یک بردارویژه‌ی $L$ متناظر با مقدارویژه‌ی $\lambda$ است اگروفقط‌اگر در فضای‌پوچ ویژه‌ی $\lambda I - L$ باشد.

برای دانستن مطالب بیشتر به [4] مراجعه شود.

## ۳.۱ پایه

یکی از مفاهیم اساسی در جبرخطی، پایه‌ها هستند. همان‌گونه که می‌دانیم یک مجموعه‌ی مستقل‌خطی از بردارها تشکیل یک پایه برای یک فضای برداری می‌دهند، اگر آن فضا را تولید کنند. وجود یک پایه در یک فضا باعث می‌شود تا عناصر آن فضا به آسانی قابل نمایش و مقایسه باشند. در این بخش به مطالبی می‌پردازیم که پیش نیازهای فصل (۴) هستند.

**تعریف ۱.۳.۱** مجموعه‌ی $S$ متشکل از بردارهای $\{\psi_i\}_{i=۱}^{\infty}$ در فضای ضرب داخلی $X$ یک پایه نامیده می‌شود اگر برای هر $u \in X$، ضرایب اسکالر $\alpha_i$ موجود باشند به‌طوری‌که:

$$u = \sum_{i=۱}^{\infty} \alpha_i \psi_i$$

اگر $\{\psi_i\}_{i=۱}^{\infty}$ متعامدیکه باشد، آن‌گاه $S$ یک پایه‌ی متعامد یکه نامیده می‌شود.

**تعریف ۲.۳.۱** تابع $f$ دارای محمل فشرده است اگر خارج یک بازه‌ی متناهی دارای مقدار صفر باشد.

## ۴.۱ خطا

در این بخش به بررسی خطاهای نسبی و مطلق می‌پردازیم که پیش نیازهای فصل (۵)و (۷) هستند.

**تعریف ۱.۴.۱** خطای مطلق

اگر $u_{exact}$ جواب دقیق و $u_{approx}$ جواب تقریبی مسأله باشد آن‌گاه قدر مطلق اختلاف این دو جواب را، خطای‌مطلق می‌نامند و به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$E = |u_{exact} - u_{approx}|$$

**تعریف ۲.۴.۱** خطای نسبی

خطای‌نسبی برای دو تابع $u_{exact}$ و $u_{approx}$ را با $\eta$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\eta = \frac{||u_{exact} - u_{approx}||_\infty}{||u_{exact}||_\infty}$$

## ۵.۱ همگرایی در $L^۲$

در این بخش همگرایی نقطه‌ای و همگرایی یکنواخت تعریف شده است که برای مطالعه بیشتر می‌توان به[1,6,7] مراجعه کرد.

**تعریف ۱.۵.۱** دنباله‌ی توابع $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در بازه ی $[a,b]$ به طور نقطه‌وار به تابع $f$ همگرا است هرگاه برای هر $x \in [a,b]$ و $\epsilon > ۰$، عدد صحیح مثبت $N(x)$ وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر $n \geq N(x)$ داشته باشیم:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

**تعریف ۲.۵.۱** دنباله‌ی توابع $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ به طور یکنواخت در بازه‌ی $[a,b]$ به $f$ همگرا است هرگاه برای هر $x \in [a,b]$ و $\epsilon > ۰$، عدد صحیح مثبت $N$ وجود داشته باشد به طوری‌که اگر $n \geq N$، آن گاه داشته باشیم:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

**تعریف ۳.۵.۱** دنباله‌ی توابع انتگرال‌پذیر $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ در $L^۲$ به $f$ همگرا است اگر وقتی $n$ به سمت بی‌نهایت میل می‌کند داشته باشیم:

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{L^۲} \longrightarrow ۰$$

همگرایی در $L^۲[a,b]$، همگرایی در میانگین نیز نامیده می‌شود.