بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه مازندران

دانشکده علوم پایه

تعمیم قاعده سیمپسون روی انتگرالهای چندگانه

(با استفاده از تعمیم ترکیب محدب قاعده های ذوزنقه ونقطه میانی)

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی

استاد راهنما:

دکتر حسن حسین زاده

استاد مشاور:

دکتر منوچهر زند

نگارش:

مرتضی پیری

اسفند ۱۳۸۰

«بسمه تعالی»

دانشگاه مازندران
معاونت آموزشی
تحصیلات تکمیلی

«ارزشیابی پایان‌نامه در جلسه دفاعیه»

دانشکده علوم پایه

نام و نام‌خانوادگی : مرتضی پیری شمارهٔ دانشجوئی : ۷۸۵۲۴۷۷۰۶

رشته تحصیلی : ریاضی کاربردی مقطع : کارشناسی ارشد سال تحصیلی : ۸۱-۸۰

عنوان پایان‌نامه: تعمیم قاعده سیمپسون روی انتگرال‌های چندگانه

تاریخ دفاع : چهار شنبه ۸۰/۱۲/۱۵

نمره پایان‌نامه (به عدد) : ۱۸٫۹

نمره پایان‌نامه (به حروف) : هیجده و نه دهم

هیأت داوران

استاد راهنما: آقای دکتر حسن حسین‌زاده امضاء

استاد مشاور: آقای دکتر منوچهر زند امضاء

استاد مدعو: آقای دکتر قاسم علیزاده امضاء

استاد مدعو: آقای دکتر رضا عامری امضاء

نماینده تحصیلات تکمیلی: آقای دکتر عبدالعلی نعمتی امضاء

تقدیم به پدر ، مادر بزرگوار و همسر مهربانم

اسفند ۱۳۸۰

مرتضی پیری

تقدیر و تشکر

لازم می دانم از راهنمایی های استد گرانقدر دکتر حسن حسین زاده که در نگارش پایان نامه بنده را مساعدت فرموده وبه عنوان معلّم علم واخلاق از محضر درس ایشان بهره برده ام ، تشکر و قدردانی نمایم. از جناب آقای دکتر منوچهر زند نیز که به عنوان استاد مشاور تقبل زحمت فرموده اند کمال تشکر را دارم. همچنین از آقای پروفسور Alan Horwitz از دانشگاه Penn State که با روی باز از بنده استقبال کرده و فدوی را راهنمایی فرموده اند نیز سپاسگزارم.

اسفند ۱۳۸۰

مرتضی پیری

فهرست مطالب

عنوان — صفحه

چکیده

در این نوشته سعی شده است با مروری بر روش های انتگرال گیری عددی و تعمیم آن به نواحی چند وجهی D_n از R^n به انتگرال های چندگانه و حل عددی آنها از منظری دیگر نگریسته شود.با وجود روش های بسیار در حل عددی انتگرال های چندگانه روی نواحی مختلف و ارائه دستورات متعدد روی هر کدام از این نواحی، رویکرد ما در ارائه دستورات، صرفاً قاعده سیمپسون می باشد.یکی از روش های به دست آوردن قاعده سیمپسون، درونیابی و روش دوم با استفاده از ترکیب محدب دو قاعده ذوزنقه و نقطه میانی می باشد. در این نوشته هر چند به درونیابی و استفاده از دستورات آن نیز برای مقایسه با دستورات دیگر پرداخته می شود ولی هدف اصلی تعمیم قاعده سیمپسون از روش دوم است. ابتدا با استفاده از همین روش و با ایده توسعه قاعده سیمپسون، برای چند جمله ای های از درجه پنجم یک فرمول دقیق می سازیم و در فصول بعدی با تعمیم قاعده های ذوزنقه و نقطه میانی به نواحی چند وجهی D_n از R^n و ترکیب محدب آنها قاعده سیمپسون را به نواحی چندگانه تعمیم خواهیم داد.

مقدمه

در هزاران سال پیش ارشمیدس فرمول هایی برای محاسبه سطوح نواحی مختلف وحجم اجسامی مانند کره مخروط وسهمیوار پیدا کرد.روش انتگرال گیری ایشان مدرن بود با توجه به اینکه ایشان با مفاهیم جبر،تابع و حتی اعداد اعشاری آشنا نبودند.لا یپنیتز و نیوتن مفاهیم ریاضیات پایه را کشف کردند وکار آنها روی مفهبم مشتق وانتگرال بود که با این مفاهیم مسایل مهم بسیاری در ریاضیات و نجوم را حل کردند.فوریه روی نمایش مسایل انتقال حرارت با یکسری توابع مثلثاتی مطالعه می کرد سری های فوریه امروز کاربرد هایی در زمینه های پزشکی ،یادگیری زبان های خارجی و موسیقی دارند.

گوس اولین جدول انتگرال ها را ساخت و با عده ای دیگرکاربرد انتگرال ها درفیزیک و ریاضی را ادامه داد.کوشی انتگرال ها را به حوزه اعداد مختلط برد. ریمان ولبگ انتگرال گیری را با یک پایه منطقی قوی تعریف کردند. لیوویل یک الگو برای ساختار انتگرال گیری بوسیله تشخیص انتگرال توابع مقدماتی نا معین ارائه کرد. هرمیت یک الگوریتم برای انتگرال گیری از توابع گویا پیدا کرد .بعدها استراوسکی این الگوریتم را برای عبارت گویای پیچیده تر توسعه داد. در قرن بیستم قبل از پدید آمدن رایانه ها، ریاضیات تئوری انتگرال گیری و کاربرد آن در نوشتن جداول انتگرال و تبدیلات انتگرالی را توسعه داد.از ریاضیدانانی که در این روند توسعه نقش به سزایی داشته اند می توان به افراد ذیل اشاره کرد.

G.N.Watson,E.C.Titchmarsh,E.W.Barents,H.Mellin,C.S.Meijer,w.Grobner,N.Hotreiter,A.Erdelyi,L.Lewin,Y.L.Luke,W.Magnus,A.Apelblat,F.Oberhettinger,I.S.Gradshteyn,H.Exton,H.M.Srivastava,A.Prudnikov

در حال حاضر دانشمندان بزرگی روی روش های عددی حل انتگرال های چند گانه تحقیق می کنند.هر کدام از آنها به نحوی از کاملترین مرجع موجود یعنی کتاب Approximate Calculate of Multiple Integrals بهره برده اند. از دانشمندانی که در حال حاضر در این زمینه تحقیق می کنندپروفسور Alan Herwitz از دانشگاه Penn State می باشد که برای اطلاعات بیشتر می توان به سایت ایشان www.math.psu.edu/horwitz مراجعه کرد. ورئیس دپارتمان ریاضی دانشگاه واشنگتن ،پرفسور Alan Genz که دارای مقالات زیادی پیرامون این موضوع می باشد.برای مطالعه مقالات وآشنایی با ایشان به آدرس www.sci.wsu.edu/math/faculty/genz مراجعه نمایید.از دیگر دانشمندان می توان به پرفسور Philip Rabinowitz اشاره کرد که در این زمینه آنالیز عددی،تئوری تقریب سالها تحقیق نموده اندو مقالات وکتب زیادی در زمینه تقریب درونیابی و انتگرال گیری عددی دارند.برای اطلاعات بیشتربه آدرس www.dam.brown.edu/people/davisمراجعه نمایید.

فصل اول

انتگرال‌های عددی

مقدمه

انتگرال‌گیری عددی مطالعه چگونگی یافتن ارزش عددی برای یک انتگرال است که کوادراتور نامیده شده است. اگر تابع زیر انتگرال تغییر علامت نداده و حد بالا از حد پائین انتگرال بزرگتر باشد مقدار انتگرال مساحت زیر منحنی را می‌دهد و آن یکی از مفاهیم مهم آنالیز عددی است.

در واقع هدف محاسبه تقریب یک انتگرال متناهی است وقتی انتگرال دقیق آن مشخص نبوده و یا نتوانیم مقدار دقیق آن را بیابیم. تطابق همین مسأله برای انتگرال‌های چندبعدی به نام انتگرال‌گیری چندگانه یا *Cubature* نامیده می‌شود.

انتگرال‌های عددی همواره در آغاز برای توزیع توابع و دیگر کمیت‌ها کاربرد داشته‌اند و در سالهای اخیر روی روشهای تجربی بیز و مدل‌های ترکیبی تأثیر مهمی داشته‌اند. تعدادی از روشهای جدید در آمار به انتگرال‌های چندگانه حتی با ابعاد بسیار بالا وابسته‌اند. در این فصل قوانین کودراتور کلاسیک و چند روش پیشرفته همراه با

نرم‌افزارهای مورد استفاده در این زمینه‌ها شرح می‌دهیم. توصیف روش‌های اولیه در فصل به وسیله $Stewart$[31] می‌باشد. یک منبع عمومی روی انتگرال‌های عددی [۵] می‌باشد. و بیشتر موضوعات جدید از [۸] و [۲۹] استفاده شده است. شیوه‌های انتگرال‌گیری جدید با تأکید روی روش‌های آماری و کاربرد آن در [۹] و [۱۰] بیان شده است.

۱ـ۱ قاعده ذوزنقه

ساده‌ترین قانون کوادراتور، قانون ذوزنقه است. این دستور مانند بسیاری از روش‌ها، هم به روش هندسی و هم به روش تحلیلی به دست می‌آید. ایده هندسی آن تقریب ناحیه زیر منحنی $y = f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ به وسیله مساحت ذوزنقه احاطه شده با نقطه $(b, f(b))$ و $(a, f(a))$ و $(b, \circ)$ و $(a, \circ)$ می‌باشد یعنی

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2}\{f(a) + f(b)\}$$

از لحاظ تحلیلی درونیابی $f(x)$ در نقاط b, a به وسیله چندجمله‌ای خطی می‌باشد.

از قاعده ذوزنقه انتظار نمی‌رود که نتایج دقیق روی یک بازه بزرگتر بدهد، بنابراین به وسیله جمع نتایج این قاعده روی بازه‌های کوچکتر، می‌توانیم تقریب دقیق را روی هر بازه به دست آوریم. لذا بازه $[a,b]$ را به وسیله نقاط به n زیر بازه مساوی تقسیم می‌کنیم.

$$a = x_\circ \langle x_1 \langle \ldots \langle x_{n-1} \langle x_n = b$$

و در نظر می‌گیریم:

$$h = \frac{b-a}{n}$$

در حالت عمومی طول بازه‌ها $i = 0,1,\dots,n$ $x_i = a + ih$ می‌باشد.

اجرای قاعده ذوزنقه روز هر زیر بازه $i = 1,2,\dots,n$ و $[x_{i-1}, x_i]$ و جمع آنها قاعده ذوزنقه مرکب را به دست می‌دهد.

$$\int_a^b f(x)dx \cong h\left\{\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2}\right\}$$

معادله خط راست برای قاعده ذوزنقه‌ای مرکب از نظریه تقریب چندجمله‌ای‌ها به دست می‌آید. فرض کنید $cT_n(f)$ تقریب f روی $[a,b]$ به وسیله قاعده ذوزنقه‌ای مرکب باشد.

لذا داریم:

$$\int_a^b f(x)dx - cT_h(f) = -\frac{(b-a)f''(\xi)}{12}h^2$$

توجه کنید که خطا از مرتبه h^2 است. اگر تعداد نقاط را دو برابر کنیم خطابه وسیله یک فاکتور چهار کم می‌شود.

۱ـ۲ قاعده سیمپسون

قاعده عمومی‌تری از قاعده ذوزنقه، قاعده سیمپسون است.

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{4}\left\{f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right\}$$

قاعده سیمپسون از درونیابی $f(x)$ به وسیله یک چندجمله‌ای درجه دوم در نقاط a و $\frac{a+b}{2}$ و b می‌تواند به دست آید. مانند قاعده ذوزنقه، قاعده سیمپسون نیز روی بازه‌های کوچک کاربرد دارد. برای n زوج قاعده سیمپسون مرکب به صورت زیر است:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{n-2} + 4f_{n-1} + f_n)$$

فرض کنید $CS_h(f)$ تقریب f به وسیله قاعده سیمپسون روی $[a,b]$ و f مشتق چهارم پیوسته روی $[a,b]$ داشته باشد پس:

$$\int_a^b f(x)dx - CS_h(f) = -\frac{(b-a)}{180}f^{(4)}(\xi)h^4 \qquad \xi \in [a,b]$$

اگر چه قاعده سیمپسون از انتگرال‌گیری یک چندجمله‌ای درجه دوم روی هر زیربازه به دست آمده اما توان چهارم خطا بدین معنی است که این قاعده برای چندجمله‌ایهای حداکثر از درجه سه دقیق است. و این یعنی قاعده سیمپسون یک حالت خاصی از کوادراتور گوسی است که توضیح داده خواهد شد.

۱ـ۳ دستورهای نیوتن ـ کاتس

قاعده ذوزنقه از هر چندجمله‌ای خطی به طور دقیق انتگرال‌گیری می‌کند.

در حالت کلی به دنبال قانونی با $n+1$ نقطه هستیم که از هر چندجمله‌ای از درجه n به طور دقیق انتگرال بگیرد. این همان قانون نیوتن ـ کاتس است.

فرض کنید $x_0, x_1, \dots, x_n$ نقاط متمایز در بازه $[a,b]$ باشند. قصد داریم ثابت‌های $A_0, A_1, \dots, A_n$ را تعیین کنیم به طوری که:

$$\int_a^b f(x)dx \cong A_0 f(x_0) + \dots + A_n f(x_n) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

برای هرچندجمله‌ای f حداکثر از درجه n، این مساله یک حل زیبا در قسمت چندجمله‌ای‌های لاگرانژ دارد.

i-امین چندجمله‌ای لاگرانژ روی نقاط $x_0,\dots,x_n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_i(x) = \prod_{i \neq j = 0}^{n} \left(\frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right)$$

آنگاه

$$A_i = \int_a^b l_i(x)\,dx \qquad i = 0,1,\dots,n$$

A_iها ضرایب منحصر به فرد دستور نیوتن ـ کاتس هستند. در این قانون طول زیربازه‌ها مساوی است. اگر چه A_iها یک بیان تحلیلی ظریف دارند، اما ارزیابی پایداری آنها مشکل است. در هر صورت برای قوانین از درجه پایین می‌توانیم از روش ضرایب نامعین استفاده کنیم. با استفاده از به کارگیری این تکنیک برای سه نقطه $0, \frac{1}{2}, 1$ روی بازه $[0,1]$ به طوری که برای $f(x) = 1, x, x^2$ دقیق باشد، همان قاعده سیمپسون به دست می‌آید.

۱ـ۴ انتگرال کلن شاو ـ کرتیس

فرمول‌های نیوتن ـ کاتس با طول بازه مساوی برای تعداد نقاط کم کاربرد دارند. گفته می‌شود برای حداکثر $n = 8$. در صورتی که n افزایش یابد، قدرمطلق ضرایب A_i بزرگ می‌شود و این ارزیابی انتگرال را ناپایدار می‌کند. لذا در انتخاب طول بازه باید از یک روش ظریف استفاده کرده برای مثال جهت این که ضرایب نه تنها مثبت بلکه پایداری جواب را حفظ کنند، استفاده از نقاط چبیشف روی بازه $[a,b]$ بهتر است.

$$x_i = \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\frac{i\pi}{n} \qquad i = 0,1,\dots,n$$

که ضرایب فوریه به صورت زیر است:

$$a_j = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n}{}'' f(x_i)\cos\frac{ij\pi}{n}$$

(علامت " یعنی عنصر اول و آخر جمع نصف شده‌اند)

در صورتی که n زوج باشد فرمول کلن شاو ـ کرتیس به صورت زیر است:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2}\left\{a_0 - \frac{2a_2}{(1)(3)} - \frac{2a_4}{(3)(5)} - \dots - \frac{2a_{n-2}}{(n-3)(n-1)} - \frac{a_n}{(n-1)(n+1)}\right\}$$

مانند قاعده‌های نیوتن ـ کاتس، کلن شاور ـ کرتیس از چندجمله‌ای‌های از درجه n یا کمتر به طور دقیق انتگرال می‌گیرد. اما در عمل این روش به روشهای هم مرتبه دیگر به جهت خواص چندجمله‌ای‌های چبیشف ترجیح داده می‌شود. خطای این روش می‌تواند از سرعت کاهش ضرایب a_j تخمین زده شود.

۱ـ۵ دستور گوسی

یک چندجمله‌ای درجه n به وسیله $n+1$ ضریب چندجمله‌ای تعیین می‌شود.

ما دیده‌ایم که $n+1$ ضریب $A_0, A_1, \dots, A_n$ در $n+1$ نقطه دستور نیوتن ـ کاتس انتخاب شده و قانون برای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه n دقیق است.

در کوادراتور گوس طول‌های $x_0, \dots, x_n$ ، $n+1$ درجه آزادی دیگر نیز دارند، که از آن جهت افزایش دقت قانون روی چندجمله‌ای‌های از درجه $2n+1$ استفاده می‌شود.

فرمول دستور گوسی به صورت ذیل است:

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \cong A_0 f(x_0) + \dots + A_n f(x_n)$$

که $w(x)$ تابع وزن روی بازه $[a,b]$ مثبت است.

انتخاب صحیح $x_0,\dots,x_n$ صفرهای یک چندجمله‌ای متعامد از درجه $n+1$ را به دست می‌دهد. دو تابع f و g با وزن $w(x)$ روی بازه $[a,b]$ متعامد نامیده می‌شوند اگر داشته باشیم:

$$\int_a^b f(x)g(x)w(x)dx = 0$$

برای هر بازه و هر تابع وزن، دنباله منحصر به فرد $\{p_i\}_0^\infty$ از چندجمله‌ای‌ها با $\deg(p_i) = i$ موجود است که هر چندجمله‌ای در این دنباله با دیگر چندجمله‌ای‌ها متعامد است.

فرض کنید $x_0,\dots,x_n$ صفرهای چندجمله‌ای متعامد P_{n+1} باشند. x_iها حقیقی و ساده در بازه $[a,b]$ می‌باشند.

لذا

$$A_i = \int_a^b l_i(x)w(x)dx \quad , \qquad i = 0,1,\dots,n$$

که l_i ، i-امین چندجمله‌ای لاگرانژ روی $x_0,\dots,x_n$ است.

برای هر تابع f فرض کنید:

$$G_n f = A_0 f(x_0) + \dots + A_n f(x_n)$$

آنگاه

$$G_n f = \int_a^b f(x)w(x)dx$$

برای تمام چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه $2n+1$ برقرار است.