بسم اللّه الرحمن الرحيم

دانشگاه اراک

دانشکده علوم– گروه ریاضی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (گرایش آنالیز ریاضی)

تحت عنوان:

نقاط انتهایی و ثابت توابع مجموعه‌ای مقدار انقباضی

استاد راهنما:

دکتر سیروس مرادی

استاد مشاور:

دکتر داوود علی‌محمدی

توسط:

راحله شمسی

زمستان ۱۳۹۱

بسم ا... الرحمن الرحیم

نقاط انتهایی وثابت توابع مجموعه ای مقدارانقباضی

توسط:

راحله شمسی

پایان نامه

ارائه شده به مدیریت تحصیلات تکمیلی به عنوان بخشی از فعالیت های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض (گرایش آنالیزریاضی)

از

دانشگاه اراک

اراک-ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیته پایان نامه با درجه:(۱۸,۷۵)

دکترسیروس مرادی(استاد راهنما و رئیس کمیته)..استادیار

دکترداودعلیمحمدی (استاد مشاور)..استادیار

دکتراسماعیل پیغان(داور)..استادیار

زمستان۱۳۹۱

چکیده

هدف اصلی در این پایان‌نامه، بررسی قضایای انقباضی روی نگاشت‌های چندمقداری است. در این پایان‌نامه، انواع نگاشت‌های مجموعه مقدار انقباضی آورده می‌شود و توسیعی از قضایای ندلر و دافر–کانکو و ژنگ–سانگ ارائه می‌شود.

فهرست مندرجات

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

این فصل مشتمل بر دو بخش است که در آن مقدمات لازم برای فصل‌های بعدی آورده شده است. در بخش اول، تعریف فضای متریک، فضای توپولوژیک،فضای نرمدار، شبه پیوسته بالایی، شبه پیوسته پایینی، قضیه اشتراک کانتور و تعریف نقطه‌ی انتهایی و نقطه‌ی ثابت آورده شده است.

در بخش دوم، با معرفی نقطه‌ی ثابت و تعریف انواع انقباض به بیان قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت باناخ می‌پردازیم و سپس توسیع‌هایی از این قضیه را بیان می‌کنیم.

۱.۱ فضاهای متریک

در این بخش به معرفی فضاهای متریک، فضاهای نرمدار و تعاریف مربوطه می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱ : فرض کنیم X مجموعه‌ای ناتهی باشد. نگاشت $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ یک متر بر X نامیده می‌شود اگر

الف) به ازای هر $x, y \in X$؛ $\quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ب) به ازای هر $x, y \in X$؛ $\quad d(x,y) = d(y,x)$

ج) به ازای هر $x, y, z \in X$؛ $\quad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

اگر d یک متر بر X باشد، آن گاه (X,d) را یک فضای متریک می‌نامیم.

تعریف ۲.۱.۱ : فضای متریک (X,d) و نقطه‌ی $x \in X$ و عدد $r > 0$ مفروض‌اند. در این صورت $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ گوی باز به مرکز x و به شعاع r نامیده می‌شود. همچنین $\overline{B}(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leq r\}$ گوی بسته به مرکز x و به شعاع r نامیده می‌شود.

ابتدا چند مفهوم مقدماتی از فضاهای متریک را می آوریم.

یادآوری ۳.۱.۱ : دنباله‌ی $\{p_n\}$ را در فضای متریک (X,d) همگرا می‌نامیم اگر نقطه‌ای مانند $p \in X$ وجود داشته باشد که به ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد صحیح مثبتی چون N موجود باشد به طوری که به ازای هر $n \geq N$ داشته باشیم $d(p_n, p) < \varepsilon$.

می‌دانیم اگر $p \in X$ و $p' \in X$ موجود باشند و $\{p_n\}$ به p و p' همگرا باشد آن گاه $p = p'$.

در فضای متریک (X,d)، E کراندار است هرگاه عدد حقیقی مانند M و نقطه‌ای مانند $p \in X$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $q \in E$، $d(p,q) < M$. در واقع E کراندار است هرگاه E در یک گوی باز قرار گیرد.

توجه داریم که اگر $\{p_n\}$ یک دنباله همگرا باشد آن گاه کراندار نیز خواهد بود ولی هر دنباله‌ی کرانداری لزوماً همگرا نیست. به عنوان مثال دنباله $p_n = (-1)^n$ در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی کراندار است ولی همگرا نیست. همچنین می‌دانیم $\{p_n\}$ همگرا به $p \in X$ است اگر و تنها اگر هر زیردنباله $\{p_n\}$ همگرا به p باشد.

دنباله‌ی $\{p_n\}$ در فضای متریک (X,d) کوشی نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیح مثبتی چون N یافت شود به طوری که به ازای هر $n \geq N$ و $m \geq N$ داشته باشیم $d(p_n, p_m) < \varepsilon$.

برای اطلاعات بیشتر در مورد فضاهای متریک می‌توان به مرجع [۱۴] مراجعه کرد.

نکته ۴.۱.۱ : در هر فضای متریک، هر دنباله‌ی همگرا کوشی نیز هست ولی عکس این مطلب لزوماً برقرار نیست. مثلاً دنباله $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای $X=(0,2]$ با متر اقلیدسی کوشی است ولی همگرا نیست.

تعریف ۵.۱.۱ : فضای متریک (X,d) را کامل گوییم هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

تعریف ٦.۱.۱ : نگاشت $\psi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ را شبه پیوسته بالایی گوییم هرگاه برای هر دنباله‌ی $\{t_n\}$ که $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=t$ نتیجه بگیریم $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\psi(t_n)\leq\psi(t)$ و نگاشت $\varphi:X\to\mathbb{R}$ را شبه پیوسته پایینی گوییم هرگاه برای هر $\{t_n\}$ که $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=t$ داشته باشیم $\psi(t)\leq\lim\limits_{n\to\infty}\inf\varphi(t_n)$.

توجه داریم که هر تابع پیوسته، شبه پیوسته پایینی و شبه پیوسته بالایی است ولی عکس این مطلب برقرار نیست.

مثال ۷.۱.۱ : نگاشت $\psi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم:

$$\psi(x)=\begin{cases} x, & 0\leq x\leq 2,\\ -1, & 2<x.\end{cases}$$

ψ پیوسته نیست اما شبه پیوسته پایینی است و همچنین نگاشت $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ با ضابطه

$$\varphi(x)=\begin{cases} 3-x, & 0\leq x\leq 3,\\ 3, & 3<x.\end{cases}$$

پیوسته نیست اما شبه پیوسته بالایی است.

حال در اینجا به تعریف توپولوژی و فضای توپولوژیک می‌پردازیم.

تعریف ۸.۱.۱ : گردایه‌ی τ از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی ناتهی X را یک توپولوژی بر X می‌نامیم هرگاه:

الف) $\emptyset, X \in \tau$،

ب) اگر $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ گردایه‌ای دلخواه از اعضای τ باشد آن گاه $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha \in \tau$ (τ تحت اجتماع دلخواه بسته باشد)،

ج) برای هر تعداد متناهی $V_1, V_2, ..., V_n$ در τ نتیجه شود $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \in \tau$ (τ تحت اشتراک متناهی بسته باشد).

در این صورت زوج مرتب (X, τ) را یک فضای توپولوژیک و اعضای τ را مجموعه‌های باز در X نامگذاری می‌کنیم.

به عنوان مثال، برای هر $X \neq \emptyset$، $\tau_1 = \mathbb{P}(X)$ و $\tau_2 = \{\emptyset, X\}$ دو توپولوژی روی X هستند.

اگر (X, d) یک فضای متریک و τ گردایه‌ی تمام مجموعه‌های باز در X باشد آن گاه (X, τ) یک فضای توپولوژیک است. در این صورت (X, τ) فضای توپولوژیک تولید شده توسط متر d نامیده می‌شود.

حال فرض کنیم (X, τ) یک فضای توپولوژیک باشد. در این صورت:

الف) نقطه‌ی p یک نقطه‌ی حدی مجموعه $E \subset X$ است هرگاه هر همسایگی p شامل نقطه‌ای چون $q \in E$ غیر از p باشد.

ب) مجموعه $E \subset X$ را بسته گوییم هرگاه هر نقطه‌ی حدی E در E باشد. همچنین E را باز گوییم هرگاه E^c بسته باشد.

ج) اگر $E \subset X$ و E' مجموعه‌ی تمام نقاط حدی E در X باشد در این صورت بستار E در X که با $\overline{E}$ نمایش داده می‌شود عبارت است از مجموعه $\overline{E} = E \cup E'$.

د) زیرمجموعه‌ی E از فضای توپولوژیک (X,τ) را فشرده می‌نامیم هرگاه هر پوشش باز شامل E، زیرپوششی متناهی داشته باشد. درواقع برای هر گردایه $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ در τ که $E \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ نتیجه بگیریم $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ یافت می‌شوند که $E \subseteq U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$.

ه) E کامل است هرگاه E بسته و هر نقطه‌ی E یک نقطه‌ی حدی آن باشد.

لازم به ذکر است که هر فضای متریک فشرده کامل است. به عنوان مثال در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی، مجموعه $E=[0,1]$ یک مجموعه کامل است.

قضیه ۹.۱.۱ : فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل باشد. هرگاه $\{K_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های فشرده و ناتهی باشد که $K_n \supseteq K_{n+1}$، آن گاه $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} K_n$ ناتهی خواهد بود.

تعریف ۱۰.۱.۱ : فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک و $E \subseteq X$ ناتهی باشد. قطر E را با $diamE$ نشان می‌دهیم و چنین تعریف می‌کنیم

$$diamE = \sup\{d(p,q) : p,q \in E\}.$$

لم ۱۱.۱.۱ : E کراندار است اگر و تنها اگر $diamE < \infty$.

تعریف ۱۲.۱.۱ : فرض کنیم F میدان اعداد مختلط یا میدان اعداد حقیقی باشد. یک فضای برداری بر میدان F مجموعه‌ای ناتهی چون X است که عناصرش را بردار می‌نامیم و در آن دو عمل به نام جمع و ضرب اسکالر تعریف شده است که دارای خواص زیر باشد:

— به ازای هر بردار x و y داریم $x+y=y+x$ و همچنین برای هر سه بردار x، y و z خواهیم داشت $x+(y+z)=(x+y)+z$.

— بردار منحصر به فرد 0 موجود است به طوری که به ازای هر $x \in X$، $x + 0 = x$.

— به ازای هر $x \in X$، بردار منحصر به فرد $-x$ چنان موجود است که $x + (-x) = 0$.

همچنین به هر جفت (α, x) که $x \in X$ و α اسکالر است بردار $\alpha x \in X$ چنان نظیر است که $1x = x$ و $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ و قوانین بخش پذیری $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ و $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$ برقرار می‌باشد (توجه داریم که 1 همان عضو همانی میدان F است).

در ادامه به بیان فضای نرمدار و فضای باناخ می‌پردازیم.

تعریف ۱۳.۱.۱ : فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان F باشد. نگاشت $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ را یک نرم می‌نامیم هرگاه دارای خواص زیر باشد:

الف) به ازای هر $x \in X$، $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ , \ \|x\| \geq 0$،

ب) به ازای هر $\alpha \in F$ و $x \in X$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$،

ج) به ازای هر $x, y \in X$، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (نامساوی مثلثی).

فضای برداری X مجهز به نرم $\|.\|$ را یک فضای نرمدار می‌نامیم.

به عنوان مثال $\mathbb{R}^n$ با نرم $\|(x_1, x_2, ..., x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ یک فضای برداری نرم‌دار می‌باشد. این نرم روی $\mathbb{R}^n$ را نرم اقلیدسی می‌نامیم.

تعریف ۱۴.۱.۱ : فرض کنیم $(X, \|.\|)$ یک فضای نرم‌دار بر میدان F باشد. تابع $d : X \times X \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $d(x,y) = \|x - y\|$ یک متر بر X است که متر حاصل از نرم $\|.\|$ بر X نامیده می‌شود.

تعریف ۱۵.۱.۱ : فضای نرمدار $(X, \|.\|)$ را باناخ گوییم هرگاه متر حاصل از نرم، یک متر کامل بر X باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱ : یک فضای برداری نرم‌دار مانند X را یک فضای نرم‌دار محدب یکنواخت می‌نامیم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد مثبتی مانند δ یافت شود به طوری که به ازای هر دو بردار $x, y \in X$، اگر $\|x\| \leq 1 + \delta$ و $\|y\| \leq 1 + \delta$ و $\|x + y\| > 2$، آن گاه $\|x - y\| \leq \varepsilon$.

تعریف ۱۷.۱.۱ : فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. زیرمجموعه‌ی ناتهی K از X، پروکسیمال نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in X$، یک عضو $k \in K$ وجود داشته باشد به طوری که $d(x, k) = d(x, K)$ که $d(x, K) = \inf\{d(x, y); y \in K\}$. درواقع K پروکسیمال است هرگاه برای هر $x \in X$، فاصله x از K در حداقل یکی از نقاط K اتخاذ شود.

در ادامه نمادهای زیر را که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد، معرفی می‌کنیم.

نماد گذاری ۱۸.۱.۱ : فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد.

۱ــ $CB(X)$ نشان دهنده‌ی خانواده‌ی تمام زیرمجموعه‌های ناتهی، بسته و کراندار X است.

۲ــ $CL(X)$ نشان دهنده‌ی خانواده‌ی تمام زیرمجموعه‌های بسته و ناتهی X است.

۳ــ $BP(X)$ نشان دهنده‌ی خانواده‌ی تمام زیرمجموعه‌های کراندار X است.

۴ــ $CP(X)$ نشان دهنده‌ی خانواده‌ی تمام زیرمجموعه‌های فشرده X است.

۵ــ $K(X)$ نشان دهنده‌ی خانواده‌ی تمام زیرمجموعه‌های ناتهی و فشرده X است.

۶ــ $B(X)$ نشان دهنده‌ی زیرمجموعه‌های ناتهی و کراندار X است.

۷ــ خانواده‌ی همه‌ی زیرمجموعه‌های پروکسیمال کراندار از X توسط $P(X)$ تعریف می‌شود.

چون هر مجموعه فشرده، بسته و کراندار نیز می‌باشد، می‌توان نتیجه گرفت $K(X) \subseteq CB(X)$.
توجه داریم که در حالت کلی تساوی $K(X) = CB(X)$ برقرار نیست. زیرا در بعضی از فضاهای متریک، فشردگی با بسته و کرانداری معادل نیست.

در صده بیستم و در سال ۱۹۱۴ فلیکس هاسدورف[1] (۱۸۶۹–۱۹۴۲) ایده کلی فضای توپولوژیکی را مطرح کرد. فضای هاسدورف به نام فلیکس هاسدورف از پایه‌گذاران توپولوژی نام‌گذاری شده است.

در زیر تعریف فضای متریک هاسدورف را می‌آوریم.

تعریف ۱۹.۱.۱ : فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $A,B \subseteq X$ زیرمجموعه‌های ناتهی باشند. متریک هاسدورف تعمیم یافته و القا شده توسط d به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(A,B) := \begin{cases} \max\{\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{y\in B} d(y,A)\} & \max < \infty \\ \infty & O.W. \end{cases}$$

که در آن $d(x,A) = \inf\{d(x,y) : y \in A\}$.

چنین Hی خوشتعریف است و متریک هاسدورف تعمیم‌یافته، القا شده توسط d نامیده می‌شود. در لم زیر نشان می‌دهیم که H یک متر روی $CB(X)$ است و چون $K(X) \subseteq CB(X)$، H روی $K(X)$ نیز یک متر است. درواقع، $(CB(X),H)$ و $(K(X),H)$ فضاهای متریک هستند و اگر (X,d) یک فضای متریک کامل باشد، $(CB(X),H)$ و $(K(X),H)$ نیز فضاهای متریک کامل خواهند بود.

لم ۲۰.۱.۱ : فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و برای هر $A \in CB(X)$ و $\varepsilon > 0$، ε–همسایگی A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$N_\varepsilon(A) := \{x \in A; d(x,A) < \varepsilon\}.$$

حال برای $A,B \in CB(X)$، قرار می‌دهیم:

$$H(A,B) := \inf\{\varepsilon > 0; A \subseteq N_\varepsilon(B), B \subseteq N_\varepsilon(A)\}.$$

---

[1] F. Hausdorff

آن گاه $(CB(X), H)$ یک فضای متریک است و H متریک هاسدورف روی $CB(X)$ نامیده می‌شود. به آسانی دیده می‌شود که

$$H(A,B) := \max\{\sup_{x\in A} d(x,B), \sup_{y\in B} d(y,A)\}.$$

برای اثبات این که H یک متر است باید نشان دهیم:

۱) به ازای هر A و B از $CB(X)$، $H(A,B) \geq 0$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $A = B$.

۲) به ازای هر A و B از $CB(X)$، $H(A,B) = H(B,A)$.

۳) به ازای هر A، B و C از $CB(X)$، $H(A,B) \leq H(A,C) + H(C,B)$.

به وضوح اگر $x \in A$، آن گاه $\inf\limits_{y\in A} d(x,y) = 0$. بنابراین برای هر $\varepsilon > 0$، $x \in N_\varepsilon(A)$. لذا برای هر $\varepsilon > 0$، $A \subseteq N_\varepsilon(A)$ و $H(A,A) = 0$.

از طرف دیگر اگر برای هر $\varepsilon > 0$، $x \in N_\varepsilon(A)$، آن گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $y_n \in A$ وجود دارد که $d(x,y_n) < \frac{1}{n}$. درنتیجه $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$. پس $x \in \bar{A} = A$. با توجه به این مطلب نتیجه می‌شود اگر $H(A,B) = 0$ آن گاه $A = B$.

با توجه به تعریف، واضح است که برای هر A و B در $CB(X)$، $H(A,B) = H(B,A)$ و $H(A,B) \geq 0$. بنابراین کافی است نشان دهیم نامساوی مثلثی برقرار است.

فرض کنیم $A, B, C \in CB(X)$. قرار می‌دهیم $\sigma := H(A,C)$ و $\mu := H(C,B)$ و فرض کنیم $\rho > 0$. چون $A \subseteq N_{\sigma+\frac{\rho}{2}}(C)$، پس اگر $a \in A$، $c \in C$ وجود دارد به طوری که $d(a,c) \leq \sigma + \frac{\rho}{2}$. همچنین چون $C \subseteq N_{\mu+\frac{\rho}{2}}(B)$، $b \in B$ وجود دارد به طوری که $d(c,b) \leq \mu + \frac{\rho}{2}$. بنابراین برای هر $a \in A$، $b \in B$ وجود دارد به طوری که

$$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) \leq \sigma + \mu + \rho.$$

این اثبات می‌کند که برای هر $\rho > 0$، $A \subseteq N_{\sigma+\mu+\rho}(B)$. لذا

$$\inf\{\varepsilon > 0; A \subseteq N_\varepsilon(B)\} \leq \sigma + \mu.$$

با جابه‌جایی B و A در استدلال بالا نتیجه می‌شود

$$\inf\{\varepsilon > 0; B \subseteq N_\varepsilon(A)\} \leq \sigma + \mu.$$

بنابراین

$$H(A,B) \leq \sigma + \mu = H(A,C) + H(C,B).$$

و این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

در زیر برخی از خواص متریک هاسدورف را ارائه می‌دهیم:

۱) اگر A و B مجموعه‌های کراندار و ناتهی باشند $H(\overline{A},\overline{B}) = H(A,B)$.

۲) فرض کنیم A و B زیرمجموعه‌های کراندار و ناتهی از X باشند، آن گاه برای هر $x \in X$ داریم:

$$d(x,B) \leq d(x,A) + H(A,B).$$

۳) اگر $A, B \in CB(X)$ و $x \in A$، آن گاه برای هر $\varepsilon > 0$، $b \in B$ وجود دارد به طوری که

$$d(x,b) \leq H(A,B) + \varepsilon.$$

لم ۲۱.۱.۱ : فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $B \in CL(X)$. در این صورت برای هر $x \in X$ و $q > 1$، یک عضو $b \in B$ وجود دارد به طوری که

$$d(x,b) \leq qd(x,B).$$

تعریف ۲۲.۱.۱ : فرض کنیم $X \neq \emptyset$ و 2^X گردایه‌ای از همه زیرمجموعه‌های ناتهی X باشد. هر نگاشت از X به 2^X را یک نگاشت چندمقداری می‌نامند.

تعریف ۲۳.۱.۱ : فرض کنیم $F : X \to 2^X$ یک نگاشت مجموعه مقدار باشد:

۱) $x \in X$ را یک نقطه‌ی ثابت F گوییم هرگاه $x \in Fx$.

۲) $x \in X$ را یک نقطه‌ی انتهایی F گوییم هرگاه $Fx = \{x\}$.

تعریف ۲۴.۱.۱ : اگر (X, d) یک فضای متریک و $T : X \to X$ یک نگاشت باشد، آن گاه $x \in X$ یک نقطه‌ی ثابت T می‌باشد هرگاه $Tx = x$.

۲.۱ توابع انقباضی و قضایای نقطه‌ی ثابت

در این بخش، با معرفی انقباض، ابتدا قضیه نقطه‌ی ثابت باناخ را بیان می‌کنیم و سپس به بیان قضیه‌های نقطه‌ی ثابت کنان، چریچ و توسیع‌های آن‌ها پرداخته و تفاوت این قضایا با قضیه نقطه‌ی ثابت باناخ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱ : نگاشت $T : X \to X$ را یک انقباض گوییم اگر عدد حقیقی $0 \leq q < 1$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$d(Tx, Ty) \leq q d(x, y).$$

به عنوان مثال نگاشت $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $Tx=\frac{1}{3}x+1$ یک انقباض در $\mathbb{R}$ با متر اقلیدسی می‌باشد.

برای اولین بار در سال ۱۹۲۳ باناخ[1] [۹] نتیجه‌ای مهم در زمینه‌ی نقطه‌ی ثابت نگاشت‌های انقباضی به نام قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت باناخ را اثبات کرد. باناخ برای حل معادله دیفرانسیل کوشی از این قضیه استفاده کرد و روشی را برای تقریب جواب معادله کوشی با استفاده از این قضیه به کار برد.

قضیه ۲.۲.۱ : فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل و نگاشت $T:X\to X$ یک انقباض باشد. در این صورت T دارای یک نقطه‌ی ثابت منحصربه‌فرد است و به ازای هر $x_0\in X$ دنباله‌ی $\{T^nx_0\}$ به این نقطه‌ی ثابت همگراست.

مثال ۳.۲.۱ : $X=[0,1]$ را با متر اقلیدسی در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $T:X\to X$ با ضابطه‌ی $Tx=\frac{1}{4}x$ تعریف شده باشد. در این صورت T یک انقباض است و لذا طبق قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت باناخ دارای نقطه‌ی ثابت منحصربه‌فرد $x=0$ است.

مثال ۴.۲.۱ : $X=[0,\infty)$ را با متر اقلیدسی در نظر می‌گیریم. به وضوح (X,d) کامل است. همچنین نگاشت $\left\{\begin{array}{l} T:X\to X \\ Tx=x^2 \end{array}\right.$ را در نظر می‌گیریم که نقاط $x=0$ و $x=1$ نقاط ثابت T هستند. به وضوح T نمی‌تواند انقباض باشد چون نقطه‌ی ثابت آن منحصربه‌فرد نیست.

مثال ۵.۲.۱ : $\left\{\begin{array}{l} T:X\to X \\ Tx=x+1 \end{array}\right.$ انقباض نیست و نقطه‌ی ثابت هم ندارد.

[1] Banach

توجه ۶.۲.۱ : می‌توان بدون برقراری شرط انقباض، وجود نقطه‌ی ثابت برای بعضی از نگاشت‌ها را نتیجه گرفت. به عنوان مثال هر نگاشت پیوسته و کراندار $T : [0, \infty) \to [0, \infty)$ دارای نقطه‌ی ثابت است. (توجه داریم که شرط پیوستگی یک شرط اساسی این قضیه است.)

اثبات: چون نگاشت T کراندار است پس برد T هم کراندار است و لذا $m > 0$ یافت می‌شود که $T([0,\infty)) \subseteq [0, m]$. بنابراین $T([0,m]) \subseteq [0, m]$ و درنتیجه تابع $T : [0, m] \to [0, m]$ خوشتعریف است.

چون $[0, m]$ فشرده و T یک نگاشت پیوسته است پس T دارای نقطه‌ی ثابت است. □

در سال ۱۹۶۸ کنان[1] [۸] یک دسته‌ی جدید از توابع انقباضی را معرفی کرد و سپس وجود و یکتایی نقطه‌ی ثابت این توابع را مورد بررسی قرار داد.

قضیه ۷.۲.۱ : (قضیه کنان)[۸] فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک کامل و نگاشت $T : X \to X$ در شرط زیر صدق کند:

$$d(Tx, Ty) \le \lambda[d(x, Tx) + d(y, Ty)], \quad (\forall x, y \in X),$$

که در آن $\lambda \in [0, \frac{1}{2})$ یک مقدار ثابت است. آن گاه T دارای نقطه‌ی ثابت منحصربه‌فرد است و برای هر $x_0 \in X$ دنباله‌ی $\{T^n x_0\}$ به نقطه‌ی ثابت همگراست.

توجه ۸.۲.۱ : این نکته حائز اهمیت است که در قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت باناخ T باید پیوسته باشد ولی در قضیه‌ی کنان لزومی ندارد T پیوسته باشد.

---

[1] R. Kannan

مثال ۹.۲.۱ : تابع زیر در شرط قضیه‌ی کنان صدق می‌کند ولی پیوسته نیست.

$$Tx = \begin{cases} 0 & -\infty < x \leq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} < x < \infty \end{cases}$$

به وضوح T در $x = \frac{1}{2}$ پیوسته نیست ولی داریم:

$$d(Tx, Ty) \leq \lambda[d(x, Tx) + d(y, Ty)], \quad \forall x, y \in X, \lambda \in [0, \frac{1}{2}).$$

در سال ۱۹۷۱ چریچ[1] [۴] توسیعی از قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت باناخ و قضیه نقطه ثابت کنان را به صورت زیر بیان کرد.

قضیه ۱۰.۲.۱ : فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک کامل و $0 \leq \alpha < 1$ و $T : X \to X$ یک نگاشت باشد به طوری که به ازای هر $x, y \in X$ نامساوی زیر برقرار باشد،

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha M(x, y),$$

که در آن

$$M(x, y) = \max\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{1}{2}[d(x, Ty) + d(y, Tx)]\}.$$

در این صورت T دارای نقطه‌ی ثابت منحصربه‌فرد است و به ازای هر $x_0 \in X$ دنباله‌ی $\{T^n x_0\}$ به نقطه‌ی ثابت فوق همگراست.

توجه ۱۱.۲.۱ : توجه داریم که در قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت باناخ T پیوسته است ولی در قضیه‌ی چریچ لزومی ندارد که T پیوسته باشد. برای این منظور مثال زیر را می‌آوریم.

---

[1] L. Ćirić

مثال ۱۲.۲.۱ : $X=[0,4]$ را با متر اقلیدسی در نظر می‌گیریم و نگاشت $T:X\to X$ را به صورت

$$Tx=\begin{cases} 0, & 0\le x<2,\\ \frac{1}{2}, & 2\le x\le 4.\end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. بدیهی است که اگر $x,y\in[0,2)$ یا $x,y\in[2,4]$ آن گاه

$$0=|Tx-Ty|\le\frac{1}{5}\max\{|x-y|,|x-Tx|,|y-Ty|,\frac{1}{2}[|x-Ty|+|y-Tx|]\}.$$

لذا فرض کنیم $x\in[0,2)$ یا $y\in[2,4]$، در این صورت

$$|Tx-Ty|\le\frac{1}{5}\max\{|x-y|,|x-Tx|,|y-Ty|,\frac{1}{2}[|x-Ty|+|y-Tx|]\}.$$

بنابراین T در شرط قضیه‌ی چریچ با $\alpha=\frac{1}{5}$ صدق می‌کند و $x=0$ نقطه‌ی ثابت منحصربه‌فرد T است اما T پیوسته نیست.

تعریف ۱۳.۲.۱ : فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل و $T:X\to CB(X)$ یک نگاشت مجموعه‌ای مقدار باشد. T را انقباضی گوییم هرگاه $H(Tx,Ty)\le\alpha d(x,y)$، برای هر $x,y\in X$ که در آن $0\le\alpha<1$ یک مقدار ثابت است.

در ادامه به معرفی چند نوع دیگر انقباض برای توابع تک مقداری و مجموعه‌ای مقدار می‌پردازیم و سپس قضایای مهمی که در این زمینه اثبات شده است را می آوریم.

تعریف ۱۴.۲.۱ : فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک کامل باشد. نگاشت $T:X\to X$، φ—انقباضی ضعیف نامیده می‌شود اگر یک نگاشت $\varphi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ با شرط $\varphi(0)=0$ و $\varphi(t)>0$ برای هر $t>0$ موجود باشد به طوری که

$$d(Tx,Ty)\le d(x,y)-\varphi(d(x,y)),\quad \forall x,y\in X.$$