بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی محض- آنالیز

فضاهای برداری با یکه ترتیبی

به کوشش

میلاد معظمی گودرزی

استاد راهنما

دکتر غلام‌حسین اسلام‌زاده

شهریور ۱۳۹۱

به نام خدا

اظهارنامه

اینجانب میلاد معظمی گودرزیدانشجوی رشته ی ریاضی محضگرایش آنالیز دانشکده ی علوم اظهار میکنم که این پایان نامه حاصل پژوهش خودم بوده و در جاهایی که از منابع دیگران استفاده کرده ام، نشانی دقیق و مشخصات کامل آن را نوشته ام، همچنین اظهار می کنم که تحقیق و موضوع پایان نامه ام تکراری نیست و تعهد مینمایم که بدون مجوز دانشگاه دستاوردهای آن را منتشر ننموده و یا در اختیار غیر قرار بدهم، کلیه حقوق این اثرمطابق با آیین نامه مالکیت فکری و معنوی متعلق به دانشگاه شیراز است.

نام و نام خانوادگی: میلاد معظمی گودرزی

تاریخ و امضا: ۱۳۹۲/۱/۱۹

به نام خدا

فضاهای برداری با یکه ترتیبی

به کوشش:

میلاد معظمی گودرزی

پایان نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه شیراز به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته‌ی:

ریاضی محض – آنالیز

از دانشگاه شیراز

شیراز

جمهوری اسلامی ایران

ارزیابی شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: عالی

دکتر غلامحسین اسلام‌زاده، دانشیار بخش ریاضی (رئیس کمیته)..............................

دکتر بهرام خانی رباطی، دانشیار بخش ریاضی ....

دکتر بهمن طباطبائی شوریجه، دانشیار بخش ریاضی..............................

شهریور ماه ۱۳۹۱

تقدیم به

بابا

سپاسگزاری

حال که با یاری پروردگار بر این مهم فایق آمدم، بر خود لازم میدانم که از زحمات بی دریغ عزیزانی که در این راه مشوقم بودند قدردانی کنم.

ازجناب آقای دکتر غلام‌حسین اسلام زادهاستاد راهنمای ارجمندم که راهنمایی هایشان روشنی بخش راهم بود سپاسگزارم.از اساتید محترم مشاور جناب آقایان دکتر بهرام خانی رباطی و دکتر بهمن طباطبائی شوریجه نیز کمال تشکر را دارم.

همچنین بر خود وظیفه می‌دانم که از خانواده عزیزم که با حمایت‌هایشان راه را بر من هموار نمودند، تشکر و قدردانی نمایم.

چکیده

فضاهای برداری با یکه ترتیبی

به کوشش
میلاد معظمی گودرزی

در این پایان‌نامه نظریه *-فضاهای برداری مرتب با یکه ترتیبی را گسترش می‌دهیم. نتایج اصلی راجع به تابعک‌های خطی با مقادیر مثبت و حالت‌ها را اثبات کرده، و نشان می‌دهیم که (نیم) نرم ترتیبی روی فضای عناصر خودالحاقی توسیع‌های چندگانه‌ای به (نیم) نرمی ترتیبی روی کل فضا می‌پذیرد. سه نمونه از این (نیم) نرم‌ها را به منظور مطالعه بیشتر انتخاب کرده و اهمیت آنها را برای جبرهای عملگری و دستگاههای عملگری مورد بحث قرار می‌دهیم. بعلاوه، روشی بر پایه تابعگون‌ها معرفی نموده تا بتوانیم بوسیله آن از یک فضای برداری مرتب با یکه ترتیبی، یک فضای مرتب ارشمیدسی بسازیم. سپس این فرآیند را برای توصیف مفهوم مقتضی خارج‌قسمت‌ها در رسته فضاهای مرتب ارشمیدسی به‌کارمی‌بندیم.

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

عنوان **صفحه**

فصل اول

مقدمه

کادیسون[۱] در [۵] ثابت کرد که هر فضای برداری حقیقی مرتب با یکه ترتیبی ارشمیدسی را می‌توان از طریق یک نگاشت حافظ ترتیب که یکه ترتیبی را به تابع ثابت ۱ می‌برد، به شکل یک زیرفضای برداری از فضای توابع حقیقی مقدارِ پیوسته روی یک فضای هاسدورفِ فشرده نمایش داد. به چنین زیرفضاهایی عموماً با عنوان *دستگاه‌های تابعی* اشاره می‌شود، و بنابراین نتیجه کادیسون قضیه نمایشی برای دستگاه‌های تابعی حقیقی فراهم می‌کند.

قضیه نمایش کادیسون موجب شد تا چوی[۲] و افراس[۳] [۲] قضیه نمایش مشابهی برای زیرفضاهای خودالحاقی شامل یکه از C^*-جبرهای یکدار به‌دست آورند. چنین زیرفضاهایی، همراه با یک *ترتیب ماتریسی طبیعی*، *دستگاه‌های عملگری* نامیده می‌شوند. دستگاه‌های عملگری، فضاهای برداری مختلطی هستند که دارای یک عمل $*$ می‌باشند و با عنوان $*$-*فضاهای برداری* به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

در هر $*$-فضای برداری V، عناصر خودالحاقی V_h یک زیرفضای حقیقی تشکیل می‌دهند و می‌توان با مشخص کردن مخروطی از عناصر مثبت $V^+ \subseteq V_h$، یک ترتیب روی V تعریف کرد. اگر (V, V^+) یک $*$-فضای برداری مرتب باشد، آن‌گاه (V_h, V^+) یک فضای برداری مرتب حقیقی است. به‌علاوه، عنصر $e \in V$ یکه ترتیبی (به‌ترتیب، یکه ترتیبی ارشمیدسی) برای (V, V^+) است اگر e یکه ترتیبی (به‌ترتیب، یکه ترتیبی ارشمیدسی) برای (V_h, V^+) باشد. اصول موضوع یک دستگاه عملگری، در درجه اول ایجاب می‌کند که این دستگاه عملگری یک $*$-فضای برداری مرتب با یکه ارشمیدسی e نیز باشد و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $*$-فضای برداری $M_n(V)$ همراه با یکه ترتیبی ارشمیدسی $e_n := \begin{pmatrix} e & & \\ & \ddots & \\ & & e \end{pmatrix}$ مرتب باشد.

توصیف چوی و افراس از دستگاه‌های عملگری یک نتیجه اساسی در زمینه فضاهای عملگری و نگاشت‌های کاملاً کراندار است، و دستگاه‌های عملگری در بسیاری از حوزه‌های دیگر نیز ابزار مفیدی بوده‌اند. چون یک فضای عملگری را می‌توان در یک دستگاه عملگری نشاند (برای نمونه [۹، قضیه ۱۳.۴] را ببینید) دستگاه‌های عملگری اغلب این امکان را می‌دهند تا مسائلی را که با نرم‌ها درگیر است به مسائلی که با مثبت بودن سروکار دارد و کار با آن‌ها راحت‌تر است، تبدیل کنیم.

علی‌رغم سودمندی دستگاه‌های عملگری در حوزه‌های دیگر، تلاش چندانی جهت ایجاد نظریه‌ای

[۱] R. V. Kadison

[۲] M. D. Choi

[۳] E. G. Effros

مختص به آن‌ها صورت نگرفته است. یک دلیل می‌تواند این باشد که اگرچه اطلاعات فراوانی درباره فضاهای برداری حقیقی مرتب وجود دارد [۱، ۶، ۷، ۱۱، ۱۳]، تقریباً هیچ توجهی به فضاهای برداری مختلط مرتب و $*$-فضاهای برداری مرتب نشده است. از آن‌جا که دستگاه‌های عملگری در هر سطحی از ماتریس‌ها، $*$-فضای برداری مرتب هستند، به نظر می‌رسد که نظریه‌ای با جزئیات کامل، پیش‌نیازی اساسی برای آنالیز دستگاه‌های عملگری باشد.

در این پایان‌نامه $*$-فضاهای برداری مرتب را مطالعه می‌کنیم. این کار را با نظر به دستگاه‌های عملگری انجام می‌دهیم و شالوده بحث را چنان بنا می‌کنیم که نظریه‌ای رسته‌ای برای دستگاه‌های عملگری بسازیم. با درنظر داشتن این نکته، دو موضوع مهم در دستور کارمان خواهد بود: نخست، نتایجی در مورد $*$-فضاهای برداری مرتب، مشابه نتایج موجود در نظریه فضاهای برداری حقیقی مرتب به اثبات می‌رسانیم. در برخی از موارد، مانند تابعک‌های خطی مثبت و حالت‌ها، نتایج حالتِ $*$-فضای برداری مشابه نتایج حالت حقیقی خواهد بود. اما در موارد دیگر مانند (نیم)نرم ترتیبی، شرایط $*$-فضای برداری، پدیده‌های تازه‌ای را بروز می‌دهد که در حالت حقیقی دیده نمی‌شود. موضوع دوم، تمرکز بر روی فضاهای مرتبی که یکه ترتیبی آن‌ها الزاماً ارشمیدسی نیست، خواهد بود. این موضوع دارای اهمیت است زیرا همان‌طور که در تحلیل‌مان خواهیم دید، خارج‌قسمت یک فضای برداری مرتب با یکه ترتیبی ارشمیدسی، خود دارای یکه‌ای ترتیبی است که الزاماً ارشمیدسی نمی‌باشد. این مسأله در مورد دستگاه‌های عملگری نیز مهم است. بنابراین داشتن فرآیندی رسته‌ای برای تشکیل یک فضای مرتب ارشمیدسی از فضای مرتبی با یکه ترتیبی مطلوب است.

این نوشتار به ترتیب زیر می‌باشد. در فصل اول، پیش‌نیازها و مفاهیم مقدماتی مورد نیاز را عنوان کرده، و در دو بخش ابتدایی قضیه‌های مورد نیاز در ادامه بحث را بدون اثبات بیان می‌کنیم. در ادامه این فصل، فضاهای برداری حقیقی مرتب و $*$-فضاهای برداری مرتب را تعریف می‌کنیم. اثبات نتایج موجود در بخش ۱.۱ را در [۳] می‌توان یافت.

فصل ۲ شامل نتایجی راجع به فضاهای برداری حقیقی مرتب با یکه ترتیبی است. در این فصل، نتایجی پایه‌ای همراه با اثبات ارائه داده و نسخه‌ای از قضیه‌های در مورد فضاهای مرتب ارشمیدسی را ثابت می‌کنیم، که در فضاهای مرتبی که فقط یکه ترتیبی دارند نیز به‌کار می‌روند. به عنوان مثال قضیه هان-باناخ[۴] برای فضاهای برداری مرتب ارشمیدسی آشناست (به [۵، نتیجه ۲.۱] مراجعه کنید) ولی ما صورتی از آن‌را در قضیه ۶.۱.۲ ثابت می‌کنیم که برای فضاهای مرتبی که یکه ترتیبی آن‌ها الزاماً ارشمیدسی نیست، نیز برقرار است. هم‌چنین حقایقی پایه‌ای در مورد نرم ترتیبی یک فضای

[۴] The Hahn-Banach Theorem

ارشمیدسی به اثبات رسانده و نشان می‌دهیم که در حالت غیرارشمیدسی این نرم تنها یک نیم‌نرم خواهد بود. در ادامه فرآیندی رسته‌ای به نام *ارشمیدسی‌سازی* معرفی نموده تا به‌وسیله آن از فضایی مرتب با یکه ترتیبی، یک فضای مرتب ارشمیدسی بسازیم. سپس خارج‌قسمت‌ها را در رسته فضاهای برداری حقیقی مرتب و رسته فضاهای برداری حقیقی مرتب ارشمیدسی مورد بحث قرار می‌دهیم.
پس از آن نتایجی را برای تابعک‌های مثبت و حالت‌ها ثابت می‌کنیم. هم‌چنین گونه‌ای از ارشمیدسی سازی را برای $*$-فضاهای برداری مرتب معرفی نموده، و خارج‌قسمت $*$-فضاهای برداری مرتب را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم.
در فصل ۳ نیم‌نرم‌هایی را روی $*$-فضاهای برداری مرتب درنظر می‌گیریم که با ترتیب سازگار هستند. مسأله توسیع (نیم)نرم ترتیبی روی عناصر خودالحاقی را به کل فضا بررسی نموده، نشان می‌دهیم که چندین راه برای این کار وجود دارد. به‌ویژه، درمی‌یابیم که خانواده‌ای از نیم‌نرم‌ها روی هر $*$-فضای برداری وجود دارد که نیم‌نرم ترتیبی را توسیع می‌دهند، و ثابت می‌کنیم که همه این نیم‌نرم‌ها در این خانواده دوبه‌دو هم‌ارز کراندارند،[5] و ازاین‌رو، همه آن‌ها یک توپولوژی را القا می‌کنند. به منظور مطالعه بیشتر سه نمونه از این نیم‌نرم‌ها را انتخاب می‌کنیم: نیم‌نرم ترتیبی مینیمال، نیم‌نرم ترتیبی ماکسیمال، و نیم‌نرم ترتیبی تجزیه.

سرانجام، در فصل ۴ مثال‌هایی از فضاهای برداری مرتبی را که در مطالعه جبرهای عملگری ظاهر می‌شوند، بررسی نموده و نرم‌های مینیمال، ماکسیمال و تجزیه را مورد تحلیل و بررسی قرار می‌دهیم. صورت مختلطی از قضیه کادیسون را ثابت می‌کنیم، که نشان می‌دهد هر $*$-فضای برداری مرتب ارشمیدسی V، با زیرفضایی خودالحاقی از $C(X)$ به‌ازای فضای هاسدورف فشرده‌ای مانند X، یکریخت ترتیبی یکدار است. به‌علاوه، این نشاندن نسبت به نرم ترتیبی مینیمال روی V و نرم سوپرمم روی $C(X)$ طولپا می‌باشد. در این موقعیت C^*-جبری یکدار مانند A و $*$-فضای مرتب (A, A^+) با یکه ترتیبی I را در نظر می‌گیریم. نرم‌های ترتیبی مینیمال، ماکسیمال و تجزیه روی A را توصیف و آن‌ها را به نرم عملگری مربوط می‌کنیم. هم‌چنین نشان می‌دهیم که برای هر $*$-فضای برداری مرتب ارشمیدسی V، نیم‌نرم‌های مینیمال و ماکسیمال برابرند اگر و فقط اگر $V \cong \mathbb{C}$. سرانجام، ترکیب‌های محدب نرم‌های مینیمال و ماکسیمال را بررسی نموده و نشان می‌دهیم روی هر $*$-فضای برداری مرتب ارشمیدسی غیر از $\mathbb{C}$، پیوستاری از نرم‌های ترتیبی وجود دارد و هم‌چنین نشان می‌دهیم که نرم ترتیبی تجزیه همواره ترکیب محدبی از نرم‌های ترتیبی مینیمال و ماکسیمال نیست.

[5]mutually boundedly equivalent

۱.۱ آنالیز تابعی

قرارداد: در این بخش منظور از $\mathbb{F}$ میدان اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ یا اعداد مختلط $\mathbb{C}$ است.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. تابع $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ را یک ضرب داخلی روی V می‌نامیم هرگاه چنان‌چه $\lambda \in \mathbb{F}$ و $x, y, z \in V$، آن‌گاه

۱. $\langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$،

۲. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$،

۳. $\langle x, x \rangle \geq 0$، و $\langle x, x \rangle = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. تابع $\| \cdot \| : V \to [0, \infty)$ را یک نیم‌نُرم روی V می‌نامیم هرگاه برای هر $v, w \in V$ و هر $\lambda \in \mathbb{F}$ شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

۲. $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.

تابع $\| \cdot \|$ یک نُرم است هرگاه علاوه بر دو شرط بالا داشته باشیم:

۳. $\|v\| = 0$ اگر و فقط اگر $v = 0$.

در این‌صورت دوتایی $(V, \| \cdot \|)$ را یک فضای نُرمدار می‌نامیم. در این حالت $d(v, w) = \|v - w\|$ یک متریک روی V تعریف می‌کند. هم‌چنین، هر فضای باناخ یک فضای نرمدار است که نسبت به متریک تعریف شده توسط نرم، کامل باشد.

دو نرم $\| \cdot \|$ و $||| \cdot |||$ روی V را نرم‌های معادل می‌نامیم هرگاه توپولوژی یکسانی روی V تعریف کنند.

گزاره ۳.۱.۱. اگر $\| \cdot \|$ و $||| \cdot |||$ دو نرم روی V باشند، آن‌گاه این دو نرم معادل‌اند اگر و فقط اگر دو عدد ثابت و مثبت مانند c و C موجود باشد به‌قسمی که

$$c\|v\| \leq |||v||| \leq C\|v\|$$

برای هر $v \in V$.

مثال ۴.۱.۱. اگر $\langle \cdot , \cdot \rangle$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری H باشد، و اگر برای هر $h \in H$ تعریف کنیم $\|h\| := \langle h, h \rangle^{1/2}$، آن‌گاه $\| \cdot \|$ یک نرم روی H است. در صورتی که H نسبت به متریک القایی توسط این نرم، کامل باشد، آن‌را یک فضای هیلبرت می‌نامیم.

مثال ۵.۱.۱. فرض کنید X یک فضای هاسدورف فشرده، و $C(X)$ فضای برداری تمام توابع مختلط پیوسته روی X باشد. اگر برای هر $f \in C(X)$ نرم سوپرمم f، یعنی $\|f\|$ را به‌صورت

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

تعریف کنیم، آن‌گاه $C(X)$ با این نرم به یک فضای باناخ تبدیل خواهد شد.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید V و W فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشند. در این‌صورت، نگاشت $f : V \to W$ را یک نگاشت خطی گوئیم هرگاه برای هر $v, w \in V$ و هر $\lambda \in \mathbb{F}$

$$f(\lambda v + w) = \lambda f(v) + f(w).$$

اگر $W = \mathbb{F}$، آن‌گاه f را تابعک $\mathbb{F}$-خطی می‌نامیم، و در صورتی که $V = W$ می‌گوئیم f یک عملگر روی V است.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید V و W دو فضای برداری باشند که نیم‌نرم‌هایی روی آن‌ها تعریف شده است. نگاشت خطی $f : V \to W$ را کراندار می‌نامیم هرگاه $b > ۰$ی موجود باشد به‌قسمی که $\|f(v)\| \leq b\|v\|$ برای هر $v \in V$. در این‌صورت، تعریف می‌کنیم

$$\|f\| := \inf\{b > ۰ : \|f(v)\| \leq b\|v\|,\ v \in V\}$$

و $\|f\|$ را نیم‌نرم f می‌گوئیم. در صورتی که V و W فضاهای نرمدار باشند، گاهی $\|f\|$ را نرم سوپرمم f یا به اختصار نرم f می‌نامیم. یادآوری می‌کنیم که برای هر نگاشت خطی کراندار f داریم

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup\{\|f(v)\| : \|v\| \leq ۱,\ v \in V\} \\ &= \sup\{\|f(v)\| : \|v\| = ۱,\ v \in V\} \\ &= \sup\{\|f(v)\|/\|v\| : v \neq ۰,\ v \in V\}.\end{aligned}$$

اگر $W = \mathbb{F}$، آن‌گاه f را تابعک $\mathbb{F}$-خطی کراندار می‌نامیم. هم‌چنین، گردایه تمام تابعک‌های خطی روی V را با V^* نشان می‌دهیم. اگر $f, g \in V^*$ و $\lambda \in \mathbb{F}$، تعریف می‌کنیم

$$(\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x).$$

در این‌صورت V^* یک فضای برداری است و آن را فضای دوگان V می‌نامیم. هم‌چنین، ملاحظه کنید که اگر V یک فضای نرمدار باشد، و اگر برای هر $f \in V^*$، $\|f\|$ را مانند آن‌چه در بالا آمده، تعریف کنیم، آن‌گاه V^* یک فضای باناخ خواهد بود.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد و گردایه تمام عملگرهای کراندار (نسبت به نرم سوپرمم) روی H را با $B(H)$ نشان دهید. در این‌صورت، اگر $X \in B(H)$ آن‌گاه عملگر X^* در $B(H)$ را الحاقیِ X می‌نامیم اگر برای هر $h, k \in H$، $\langle Xh, k\rangle = \langle h, X^*k\rangle$.

تذکر ۹.۱.۱. طبق [۳، قضیه II.۲.۲] عملگر X^* وجود دارد و منحصربه‌فرد است.

فضای برداری A روی $\mathbb{F}$ را یک جبر روی $\mathbb{F}$ می‌نامیم هرگاه یک عمل ضرب روی آن تعریف شده باشد به‌طوری که A با این عمل به یک حلقه تبدیل شود و اگر $\lambda \in \mathbb{F}$ و $a, b \in A$، آن‌گاه $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$. جبر A را یکدار گوئیم اگر به عنوان یک حلقه، دارای عنصر همانی باشد؛ در این حالت همانی را با ۱ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۱.۱. جبر A روی $\mathbb{F}$ را یک جبر باناخ می‌نامیم هرگاه یک نرم مانند $\|\cdot\|$ روی آن تعریف شده باشد به‌طوری که A با این نرم به یک فضای باناخ تبدیل شود و برای هر $a, b \in A$، $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$.

تعریف ۱۱.۱.۱. اگر A یک جبر باناخ یکدار باشد و $a \in A$، طیف a را با $\sigma(a)$ نمایش داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{F} : \text{معکوس‌پذیر نیست } a - \lambda\}.$$

اگر A یک جبر باناخ روی $\mathbb{C}$ باشد، نگاشت $a \mapsto a^*$ از A به A را یک برگشت می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b \in A$ و هر $\lambda \in \mathbb{C}$ شرایط زیر برقرار باشد:

۱. $(a^*)^* = a$،

۲. $(ab)^* = b^*a^*$،

۳. $(\lambda a + b)^* = \overline{\lambda}a^* + b^*$.

تعریف ۱۲.۱.۱. جبر باناخ A همراه با یک برگشت را یک C^*-جبر می‌نامیم به شرط آن‌که برای هر $a \in A$، $\|a^*a\| = \|a\|^2$. همچنین، اگر $a \in A$، آن‌گاه a مثبت است اگر $a = a^*$ و $\sigma(a) \subseteq [0, \infty)$.

مثال ۱۳.۱.۱. فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. اگر برای هر $X \in B(H)$، X^* را الحاقی X (تعریف ۷.۱.۱) تعریف کنیم، آن‌گاه $B(H)$ یک C^*-جبر است.

مثال ۱.۱.۱۴. فرض کنید X یک فضای هاسدورف فشرده باشد و فضای باناخ $C(X)$ را درنظر بگیرید. اگر ضرب عناصر $C(X)$ را همان ضرب معمولی توابع تعریف کنیم، وبرای هر $x \in X$ قرار دهیم $f^*(x) := \overline{f(x)}$، آن‌گاه $C(X)$ یک C^*-جبر خواهد بود.

قضیه ۱.۱.۱۵. *اگر H یک فضای هیلبرت باشد و $X \in B(H)$، آن‌گاه $X \geq 0$ اگر و فقط اگر $\langle Xh, h\rangle \geq 0$ برای هر $h \in H$.*

تعریف ۱.۱.۱۶. اگر A یک C^*-جبر باشد، تابعک خطی $f : A \to \mathbb{C}$ را مثبت می‌نامیم اگر $f(a) \geq 0$ برای هر عنصر مثبت a از A. هم‌چنین، گوئیم f یک حالت روی A است اگر f مثبت باشد و $\|f\| = 1$.

تذکر ۱.۱.۱۷. اگر f یک تابعک خطی مثبت و ناصفر باشد، آنگاه $\|f\| = f(1)$.

تعریف ۱.۱.۱۸. فرض کنید V یک فضای نرمدار باشد و برای هر $v \in V$، $p_v : V^* \to [0.\infty)$ را به‌صورت $p_v(f) = |f(v)|$ تعریف کنید. به‌سادگی می‌توان دید که p_v یک نیم‌نرم روی V^* است. گردایه همه مجموعه‌های به شکل $\bigcap_{i=1}^{n}\{f \in V^* : p_{v_i}(f - f_0) < \epsilon\}$ که $v_1, ..., v_n \in V$، $f_0 \in V^*$ و $\epsilon > 0$، برای یک توپولوژی روی V^* که آن را توپولوژی ضعیف-$*$ روی V^* می‌نامیم، تشکیل یک پایه می‌دهد.

اگر V یک فضای نرمدار باشد، آن‌گاه گوی واحد V، یعنی $\{v \in V : \|v\| \leq 1\}$ را با $\mathrm{ball}(V)$ نمایش می‌دهیم. قضیه زیر منسوب به الاغلو[6] است.

قضیه ۱.۱.۱۹. *اگر V یک فضای نرمدار باشد، آن‌گاه $\mathrm{ball}(V^*)$ در توپولوژی ضعیف-$*$ فشرده است.*

[6] L. Alaoglu

۲.۱ فضاهای برداری حقیقی مرتب

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید V یک فضای برداری حقیقی باشد. یک *مخروط* در V مجموعه‌ای ناتهی مانند $C \subseteq V$ است که خواص زیر را داشته باشد:

۱. $av \in C$ هرگاه $a \in [0, \infty)$ و $v \in C$.

۲. $v + w \in C$ هرگاه $v, w \in C$.

فضای برداری مرتب (V, V^+) جفتی متشکل از یک فضای برداری حقیقی V و مخروط $V^+ \subseteq V$ است که در شرط زیر صدق می‌کند

۳. $V^+ \cap -V^+ = \{0\}$.

درهر فضای برداری مرتب می‌توانیم یک ترتیب جزئی (یعنی رابطه‌ای انعکاسی، پادمتقارن و متعدی) $\geq$ روی V تعریف کنیم به این‌صورت که $v \geq w$ اگر و فقط اگر $v - w \in V^+$. توجه کنید که این ترتیب جزئی تحت انتقال پایاست (یعنی $v \geq w$ ایجاب می‌کند $v + x \geq w + x$) و تحت ضرب در اعداد حقیقی نامنفی نیز پایا می‌باشد (یعنی $v \geq w$ و $a \in [0, \infty)$ ایجاب می‌کند $av \geq aw$). هم‌چنین ملاحظه کنید که $v \in V^+$ اگر و فقط اگر $v \geq 0$؛ به این دلیل است که گاهی V^+ را *مخروط عناصر مثبت* می‌نامیم.

تذکر ۲.۲.۱. اگرچه برای تعریف ترتیب جزئی از V^+ استفاده کردیم، می‌توانستیم در جهت عکس نیز عمل کنیم: اگر $\geq$ یک ترتیب جزئی روی V بوده که تحت انتقال و ضرب در اعداد حقیقی نامنفی پایا باشد، آن‌گاه مجموعه $V^+ := \{v \in V : v \geq 0\}$ در شرایط ۱، ۲ و ۳ بالا صدق می‌کند، و نتیجتاً (V, V^+) یک فضای برداری مرتب می‌شود.

تذکر ۳.۲.۱. عدم توافقی در مورد استفاده از عبارت ((مخروط)) وجود دارد. در حالی‌که نویسندگانی هستند که تعاریفشان با آن‌چه در این‌جا آورده‌ایم، تطبیق دارد (برای نمونه، [۷] و [۲] را ببینید) عده‌ای از آن‌ها (برای نمونه [۶]، [۱۱] و [۱۳] را ببینید) نیز عبارت ((مخروط)) را برای اشاره به زیرمجموعه‌ای از V که در شرایط ۱، ۲ و ۳ بالا صدق می‌کند به‌کار می‌برند، و برای زیرمجموعه‌ای که فقط در شرایط ۱ و ۲ صدق می‌کند از عبارت ((گوه)) استفاده می‌کنند. چون بیشتر کار ما متأثر از دستگاه‌های عملگری می‌باشد، اصطلاحات موجود در [۲] را به‌کار برده‌ایم.

تعریف ۴.۲.۱. اگر (V, V^+) یک فضای برداری حقیقی مرتب باشد، عنصر $e \in V$ را یکه *ترتیبی* برای V می‌نامیم اگر برای هر $v \in V$ عدد حقیقی $r > 0$ موجود باشد به‌قسمی که $re \geq v$.

تعریف ۵.۲.۱. اگر (V, V^+) یک فضای برداری حقیقی مرتب باشد، آن‌گاه گوئیم V^+ *پُر* است (یا V^+ یک *مخروط پُر* است) هرگاه $V = V^+ - V^+$.

لم ۶.۲.۱. *اگر (V, V^+) یک فضای برداری حقیقی مرتب با یکه ترتیبی e باشد، آن‌گاه*

۱. $e \in V^+$؛

۲. *اگر $v \in V$ و عدد حقیقی $r > 0$ طوری انتخاب شود که $re \geq v$، آن‌گاه $se \geq v$ برای هر $s \geq r$؛*

۳. *اگر $v_1, \ldots, v_n \in V$، آن‌گاه $r > 0$ی وجود دارد به‌قسمی که $re \geq v_i$ برای هر $1 \leq i \leq n$؛*

۴. *V^+ یک مخروط پر برای V است؛*

۵. *اگر $v_1, \ldots, v_n \in V^+$ و اگر $v_1 + \ldots + v_n = 0$، آن‌گاه $v_1 = \ldots = v_n = 0$؛ و*

۶. *فرض کنید $v_1, \ldots, v_n \in V^+$ و $a_1, \ldots, a_n \in [0, \infty)$. اگر $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = 0$، آن‌گاه برای هر $1 \leq i \leq n$، $a_i = 0$ یا $v_i = 0$.*

برهان. برای اثبات ۱ توجه کنید که $r > 0$ی وجود دارد به‌قسمی که $re \geq -e$. اما در این‌صورت $re + e \in V^+$ و $e = (r+1)^{-1}(re + e) \in V^+$.

برای ۲ مشاهده می‌کنیم که اگر $re \geq v$، آن‌گاه چون $s \geq r$ داریم $s - r \geq 0$ و با استفاده از ۱ و تعریف ۱.۲.۱(۱) نتیجه می‌شود که $(s-r)e \geq 0$ و از این‌رو $(s-r)e + re \geq v + 0$ و $se \geq v$.

برای اثبات ۳ فرض کنید $v_1, \ldots, v_n \in V$. به‌ازای هر $1 \leq i \leq n$ عدد حقیقی $r_i > 0$ را به‌قسمی انتخاب کنید (طبق تعریف یکه ترتیبی) که $r_ie \geq v_i$. اگر قرار دهیم $r := \max\{r_1, \ldots, r_n\}$، آن‌گاه از ۲ نتیجه می‌شود که $re \geq v_i$ برای هر $1 \leq i \leq n$.

برای نشان دادن ۴ فرض کنید $v \in V$. با استفاده از ۳ می‌توانیم عدد حقیقی $r > 0$ را به‌قسمی انتخاب کنیم که $re \geq -v$ و $re \geq v$. اما در این‌صورت $re + v \in V^+$ و $re - v \in V^+$، و نتیجه می‌شود که $v = (re + v)/2 - (re - v)/2 \in V^+ - V^+$.

۵ را با استقرا ثابت خواهیم کرد. برای $n = 1$ ادعا برقرار است. اگر $v_1 + \ldots + v_n = 0$، آن‌گاه $v_n = -v_1 - \ldots - v_{n-1}$. در این‌صورت $v_n \in V^+ \cap -V^+$ پس $v_n = 0$. لذا $v_1 + \ldots + v_{n-1} = 0$ و از فرض استقرا $v_1 = \ldots = v_{n-1} = 0$.

برای ۶، توجه شود که چون $a_i \in [0, \infty)$ و $v_i \in V^+$ طبق تعریف داریم $a_i v_i \in V^+$. بنابراین قسمت ۵ ایجاب می‌کند که $a_i v_i = 0$ برای همه iها. از این‌رو $a_i = 0$ یا $v_i = 0$. $\square$

تعریف ۷.۲.۱. اگر (V, V^+) یک فضای برداری حقیقی مرتب با یکه ترتیبی e باشد، آن‌گاه گوئیم e یکه *ترتیبی ارشمیدسی* است چنان‌چه هرگاه $v \in V$ به‌طوری که $re + v \geq 0$ برای هر $r > 0$، آن‌گاه $v \in V^+$.

توجه نمائید که فرض ارشمیدسی بودن e راهی برای اطمینان از عدم وجود ((بی‌نهایت کوچک‌های نامثبت)) در V است.

لم ۸.۲.۱. *فرض کنید (V, V^+) یک فضای برداری حقیقی مرتب با یکه ترتیبی e باشد و $r_0 \in [0, \infty)$. اگر $v \in V$ و $re + v \geq 0$ برای هر $r > r_0$، آن‌گاه $r_0 e + v \geq 0$.*

برهان. چون $re + v \geq 0$ برای هر $r > r_0$، داریم $se + (r_0 e + v) \geq 0$ برای هر $s > 0$، و لذا طبق تعریف ارشمیدسی بودن e نتیجه می‌شود که $r_0 e + v \geq 0$. $\square$