چکیده

نام خانوادگی: خدیری **نام:** فاطمه

عنوان پایان‌نامه: استفاده از روش‌های چندهدفه‌ی برهم‌کنشی برای حل مسائل DEA

استاد راهنما: دکترهادی بصیرزاده **استاد مشاور:** دکتر منصور سراج

درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد

رشته: ریاضی کاربردی **گرایش:** تحقیق در عملیات

محل تحصیل: دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده: علوم ریاضی و کامپیوتر

تاریخ فارغ التحصیلی: ۱۳۸۹/۱۱/۲

تعداد صفحات: ۱۱۴ صفحه

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، بهینه‌سازی چندهدفه برهم‌کنشی، نقطه‌ی مرجع، جواب کارا، جواب مرجح

چکیده: تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) یک روش غیر پارامتری برای ارزیابی کارایی نسبی یک مجموعه از واحدها ی متجانس است. در مدل‌های اصلی DEA، به اطلاعات ترجیحی تصمیم‌گیرنده توجهی نمی‌شود واین امر باعث شده پاسخ حاصل از حل مدل DEA رضایت تصمیم‌گیرنده را به طور قطعی برآورده نکند. یکی از راه‌هایی که می‌توان ترجیحات تصمیم‌گیرنده را وارد مدل‌های DEA کرد، استفاده از روش‌های چندهدفه‌ی برهم‌کنشی است.

دراین رساله هم ارزی DEA و $MOLP$ را اثبات می‌کنیم سپس چند روش از روش‌های برهم‌کنشی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم پاسخ‌هایی که از روش‌های برهم‌کنشی بدست می‌آیند بیش از پاسخ‌های حاصل از حل مدل‌های DEA رضایت تصمیم‌گیرنده را برآورده می‌کنند.

فهرست مطالب

پیشگفتار

تحلیل پوششی داده‌ها یا DEA یک روش غیر پارامتری براساس برنامه‌ریزی خطی برای اندازه‌گیری کارایی نسبی یک مجموعه از واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی متجانس بدون در نظر گرفتن اطلاعات ترجیحی تصمیم‌گیرنده است که توسط کوپر، چارنز و رودز [۲] معرفی شد. آن‌ها نسبت یک خروجی به یک ورودی برای محاسبه ی کارایی را به نسبت چند خروجی به چند ورودی تعمیم دادند. در مدل اصلی DEA، چارنز، کوپر و رودز (CCR) پیشنهاد دادند که کارایی یک واحد را می‌توان از بیشینه کردن نسبت خروجی‌های وزن‌دار شده به ورودی‌های وزن‌دار شده محاسبه کرد، بااین شرط که همین نسبت برای تمام واحدها کوچکتر و یا مساوی یک باشند. با تغییر بازده به مقیاس ثابت به متغیر، مدل دیگری توسط بنکر، چارنز و کوپر ارائه شد که BCC نام گرفت. برای مطالعه‌ی بیشتر درباره ی مدل‌های DEA به[۲۷،۳۰] مراجعه شود.
مدل‌های برنامه‌ریزی چندهدفه مانند برنامه‌ریزی خطی چندهدفه ($MOLP$) تکنیک‌هایی هستند که برای حل مسائل برنامه‌ریزی چند شاخصه ($MCDM$) استفاده می‌شوند[۲۹،۲۷،۲۰،۱۹،۱۰،۸].
یک روش مناسب برای استفاده از ترجیحات تصمیم‌گیرنده، استفاده از روش‌های برهم‌کنشی است که هر دو مدل DEA و $MOLP$ را پوشش می‌دهند. اولین بار $Golany$ یک مدل برهم‌کنشی ارائه داد که در آن تصمیم‌گیرنده یک مجموعه از ورودی‌ها را به عنوان منبع اختصاص می‌دهد و قادر خواهد بود پاسخ مرجح را از مجموعه‌ی خروجی‌ها انتخاب کند[۴].
روش‌های اصلی چندهدفه‌ی برهم کنشی را می‌توان در [۲۱،۱۷،۱۵،۱۳،۱۱،۳،۱] جستجو کرد.
دراین رساله چهار فصل تدوین شده است. در فصل اول مروری بر مدل‌های اصلی DEA خواهیم داشت. در فصل دوم پس از مروری کوتاه بر بهینه‌سازی چندهدفه ثابت می‌کنیم DEA و برنامه‌ریزی

خطی چندهدفه بر پایه ی نقطه‌ی مرجع معادل می‌باشند. در فصل سوم چند روش اصلی از روش‌های چندهدفه‌ی برهم‌کنشی را معرفی می‌کنیم و در فصل چهارم با بیان یک مثال عددی نشان می‌دهیم یک مساله‌ی DEA را چگونه با استفاده از روش‌های چندهدفه می‌توان حل کرد. برای حل مثال عددی از نرم افزارهای QSB و $PROMOIN$ استفاده شده است.

فصل ۱

تحلیل پوششی داده‌ها

۱.۱ مقدمه

بررسی عملکرد واحدها برای اندازه‌گیری کارایی آن‌ها، همواره مورد توجه مدیران و محققین بوده است. در سال ۱۹۵۷ فارل با استفاده از روشی مشابه روش اندازه‌گیری کارایی در مباحث مهندسی، اقدام به اندازه‌گیری کارایی برای یک واحد تولیدی نمود.
مدل مورد نظر فارل برای اندازه‌گیری کارایی، شامل یک ورودی و یک خروجی بود. فارل مدل خود را برای تخمین کارایی بخش کشاورزی آمریکا نسبت به سایر کشورها مورد استفاده قرار داد. با این وجود، او در ارائه‌ی روشی که در برگیرنده‌ی ورودی‌ها و خروجی‌های متعدد باشد موفق نبود.
چارنز[۱]، کوپر[۲] و رودز[۳] دیدگاه فارل را توسعه دادند و مدلی ارائه کردند که توانایی اندازه‌گیری کارایی با چندین ورودی و خروجی را داشت. این مدل، تحت عنوان "تحلیل پوششی داده‌ها" نام گرفت و اولین بار در رساله‌ی دکترای "ادوارد رودز" و به راهنمایی "کوپر" تحت عنوان "ارزیابی پیشرفت تحصیلی دانش آموزان مدارس ملی آمریکا" در سال ۱۹۷۶ در دانشگاه کارنگی مورد استفاده قرار گرفت و در سال ۱۹۷۸ در مقاله‌ای تحت عنوان "اندازه‌گیری کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده" ارائه

[۱] Charnes
[۲] Cooper
[۳] Rodhes

شد[۲].مدلی که چارنز، کوپر و رودز ارائه دادند، CCR نام دارد که از حروف اول اسامی این سه دانشمند گرفته شده است.این مدل را در همین فصل معرفی خواهد شد.
برای درک بیشتر مفهوم "تحلیل پوششی داده‌ها" نیاز به تعاریف پایه داریم که اساس کار ما را در این فصل تشکیل می‌دهند:

۲.۱ تعاریف

تعریف ۱.۱. ***تولید :*** *منظور از تولید، هر نوع تغییر و تبدیل مستقیمی است که مطلوبیت کالا را افزایش می‌دهد. یکی از انواع معمول تولید، تغییر شکل در مواد است، به این معنی که محصول تمام شده‌ی فیزیکی، شکلی متفاوت با شکل موادی که از آن‌ها ساخته شده است به خود بگیرد. تولید اتومبیل نمونه‌ای ازاین نوع تولید است. نتیجه‌ی یک فعالیت تولیدی که ناشی از تغییر و تبدیل باشد را محصول می‌نامند. مواد و کالایی که در بدست آوردن محصول مورد استفاده قرار می‌گیرد، منابع تولید نامیده می‌شود.*

تعریف ۲.۱. ***تابع تولید :*** *تابعی است که برای هر ترکیب از ورودی‌ها ماکزیمم خروجی را تولید کند.*

در اغلب موارد تخمین تابع تولید کاری بسیار مشکل و حتی غیر ممکن می‌باشد، در چنین وضعیتی تقریبی از تابع تولید محاسبه می‌شود. تقریب تابع تولید به دو صورت امکان پذیر است :
۱- روش‌های پارامتری ۲- روش‌های غیر پارامتری
روش‌های پارامتری برای تقریب تابع تولید، از روش‌های بسیار متداول بوده و در حقیقت تا سال ۱۹۵۷ که فارل روش غیر پارامتری را پیشنهاد نمود، از روش پارامتری استفاده می‌شد. دراین روش شکل خاصی از یک تابع را برای تخمین تابع تولید در نظر می‌گیرند و با استفاده از روش‌های ریاضی، پارامترهای تابع را مشخص می‌نمایند.این روش، به روش برازش منحنی معروف است.
استفاده از تابع "کاب -داگلاس" یکی از راه‌های پارامتریک می‌باشد.

صورت ساده ی تابع "کاب - داگلاس" چنین است :

$$Q = K.L^{\alpha}M^{\beta}$$

که در آن Q خروجی و L نیروی کار و M مواد اولیه (سرمایه) بوده و K و α و β پارامترها می‌باشند.
صورت کلی تابع "کاب - داگلاس" چنین است :

$$Q = x_{۰}A_{۱}^{x_{۱}}A_{۲}^{x_{۲}}\dots A_{n}^{x_n}$$

که در آن $A_{۱}, A_{۲}\dots A_n$ ورودی‌ها و Q خروجی و $x_{۰}, x_{۱}, \dots x_n$ پارامترها می‌باشند که بایستی مشخص گردند. به همین منظور فرض می‌کنیم مشاهداتی به صورت زیر در دست باشد :

$$A = \{(A_{۱۱}, A_{۱۲}, \dots, A_{۱n}, Q_{۱}), \dots (A_{m۱}, A_{m۲}, \dots, A_{mn}, Q_{۲})\}$$

باتوجه به تعریف تابع تولید داریم :

$$۰ \le d_i = (x_{۰}A_{i۱}^{x_{۱}}\dots A_{in}^{x_n}) - Q_i$$

هدف کمینه کردن $\sum_{i=۱}^{m} d_i$ می‌باشد، مشروط براینکه $d_i \ge ۰$ باشد، یعنی :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=۱}^{m} d_i \\ s.t. \quad & d_i \ge ۰ \qquad i = ۱\dots m \end{aligned} \tag{۱.۱}$$

اما استفاده از روش‌های پارامتری مشکلاتی به همراه داشت، از جمله اینکه در روش پارامتری فرض براین است که چندین ورودی فقط یک خروجی تولید می‌کند، پس اگر چند خروجی تولید شود چگونه می‌توان منحنی را برازش کرد؟ این روش مشکل تمایل مرکزی منحنی را چگونه می‌تواند حل کند؟ یعنی‌اینکه شکل تابع تولید، یک صورت خاص بین خروجی و ورودی‌ها است، (خطی، درجه

دو و غیره). تمام منحنی‌هایی که به این صورت به دست می‌آیند "تمایل مرکزی" دارند، به طوری که داده‌های "$outlier$" که در واقع ممتازان جامعه می‌باشند، نقش زیادی در مشخص نمودن پارامترها نخواهند داشت.

این مشکلات، از جمله مشکلات اساسی روش پارامتری بودند که پاسخی برایشان پیدا نشد. تا سال ۱۹۵۷ که فارل روش غیر پارامتری را ارائه داد. این روش نیازمند تخمین تابع تولید نمی‌باشد. تحلیل پوششی داده‌ها روشی غیر پارامتری است که کارایی نسبی واحدها را در مقایسه با یکدیگر ارزیابی می‌کند. دراین تکنیک نیازی به شناخت شکل تابع تولید نیست و محدودیتی در تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها وجود ندارد.

تعریف ۳.۱. ***واحد تصمیم‌گیرنده :*** *منظور از یک واحد تصمیم‌گیرنده یا DMU، واحدی است که با دریافت بردار ورودی $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$، بردار خروجی $(y_1, y_2, \ldots, y_s)$ را تولید کند.*

تعریف ۴.۱. ***واحدهای تصمیم‌گیرنده‌ی متجانس :*** *عبارت هستند از واحدهایی که عمل مشابه دارند و با دریافت ورودی‌های مشابه، خروجی‌های مشابه تولید می‌کنند.*

یکی از مفاهیم مهم‌این بخش مفهوم کارایی می‌باشد که در عرف به معنی خوب کارکردن است.

تعریف ۵.۱. ***کارایی :*** *واحدی را در نظر بگیرید که با مصرف ورودی x، خروجی y را تولید کند. تعریف می‌کنیم :*

$$\text{کارایی} = \frac{\text{خروجی}}{\text{ورودی}} = \frac{y}{x}$$

این تعریف زمانی که واحد تصمیم‌گیرنده دارای یک ورودی و یک خروجی باشد برقرار است.

تعریف ۶.۱. ***کارایی نسبی :*** *فرض کنیم واحدهای تصمیم‌گیرنده $n, \ldots, 2, 1$ به ترتیب با مصرف ورودی‌های $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، خروجی‌های $(y_1, \ldots, y_n)$ را تولید نموده اند. کارایی نسبی واحد jام که آن را با RE_j نشان می‌دهیم چنین است :*

$$RE_j = \frac{\frac{y_j}{x_j}}{max\frac{y_k}{x_k}}$$

$$۱ \leq k \leq n$$

درحالیکه برای n واحد تصمیم‌گیرنده چندین ورودی و چندین خروجی داشته باشیم، مقدار ورودی iام مصرف شده توسط DMU_jرا با x_{ij} و مقدار خروجی rام تولید شده توسط همین واحد رابا y_{rj} نمایش می‌دهیم و قیمت خروجی‌ها را با بردار $U = (u_۱, \ldots, u_s)$ و هزینه ورودی‌ها را با بردار $V = (v_۱, \ldots, v_m)$ نشان می‌دهیم، آنگاه کارایی واحدjام را به شکل زیر محاسبه می‌کنیم :

$$\text{کارایی} = \frac{\sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij}}$$

کارایی فوق به "کارایی اقتصادی"معروف است. تعبیر مدیریتی بردارهای U و V این است که این بردارها به ترتیب اهمیت‌های نسبی ورودی‌ها و خروجی‌ها می‌باشند و در واقع با در دست داشتن این وزن‌ها می‌توانیم کارایی را به دست آوریم.

تعریف ۷.۱. ***ورودی‌ها و خروجی‌های مجازی:*** *فرض کنیم DMU_j، $(j = ۱, ۲, \ldots, n)$ با مصرف ورودی $x_j = (x_{۱j}, \ldots x_{mj})$ بردار خروجی $y_j = (y_{۱j}, \ldots, y_{sj})$ را تولید می‌کند.*

ورودی مجازی را چنین تعریف می‌کنیم :

$$\lambda_۱ x_۱ + \cdots + \lambda_n x_n = \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j$$

و به طور مشابه خروجی مجازی را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lambda_۱ y_۱ + \cdots + \lambda_n y_n = \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j$$

که در آن $\lambda_j \geq ۰$ می‌باشد.
واحد تصمیم‌گیرنده‌ی مجازی، واحد تصمیم‌گیرنده‌ای است که ورودی یا خروجی آن مجازی باشد. در نتیجه تمام DMUهای مجازی (در مدل CCR) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A = \{(x, y) \mid x = \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j, y = \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j, \lambda_j \geq ۰\}$$

Aیک مخروط است زیرا فرض می‌کنیم برای هر $(x, y) \in A$آنگاه به ازای هر $\alpha \geq ۰$ داریم :

$$(\alpha x, \alpha y) = (\sum \lambda'_j x_j, \sum \lambda'_j y'_j) \in A, \lambda'_j \geq ۰$$

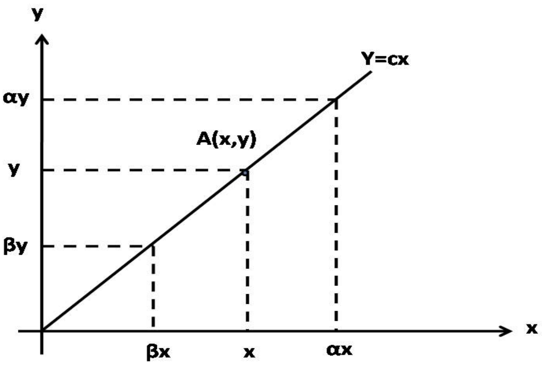
تعریف ۸.۱. ***بردار غالب :*** *بردار X غالب بر بردار Y است اگر و تنها اگر $X \geq Y$ ، $Y \neq X$ باشد، در این صورت گوییم بردار Y به وسیله بردار X مغلوب گردیده است. به عبارت دیگر بردار X غالب بر بردار Y است اگر $x_j \geq y_j, (j = ۱, ۲, \ldots, n)$ باشد و نامساوی حداقل برای یک مولفه به طور اکید برقرار باشد.*

حال به بیان تعریف دیگری از کارایی نسبی با استفاده از مفهوم غلبگی می‌پردازیم :

تعریف ۹.۱. *DMU_j با ورودی x_j و خروجی y_j را "کارای نسبی" گویند اگر بردار $(-x_j, y_j)$ برهر بردار $(-x, y)$ غلبه کند که $(x, y) \in A$ باشد.*

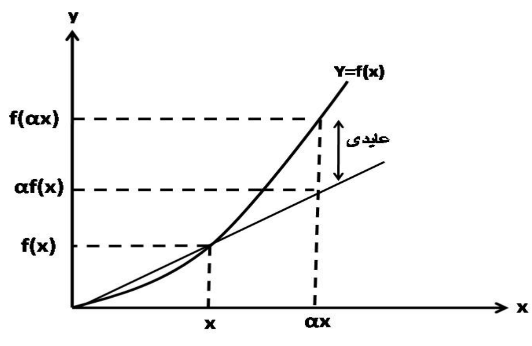
تعریف ۱۰.۱. ***بازده به مقیاس تولید:*** *بازده به مقیاس مفهومی است بلند مدت که منعکس کننده‌ی نسبت افزایش در خروجی به ازای افزایش در ورودی‌ها است.*

در شکل (۲.۱) اگر رابطه‌ی y و x به صورت $y = f(x)$ در نظر گرفته شود ملاحظه می‌گردد که برای $\alpha > ۱$، $f(\alpha x) > \alpha f(x)$ (سود بیشتر) و بالعکس برای $\alpha < ۱$، $f(\alpha x) < \alpha f(x)$.

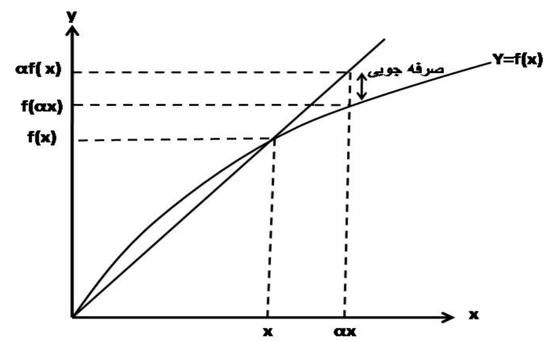


شکل ۱.۱: بازده به مقیاس ثابت

اگر y از ماده‌ی اولیه‌ی x تولید گردد آن گاه گویند تابع تولید $y = f(x)$ در شکل(۱.۱) بازده به مقیاس ثابت، در شکل (۲.۱) بازده به مقیاس صعودی و در شکل (۳.۱) بازده به مقیاس نزولی دارد. به عبارت دیگر در شکل (۱.۱) تولید، به مقیاس بستگی ندارد، یعنی اگر ورودی x خروجی y را تولید کند آنگاه ورودی αx خروجی αy را $(\alpha > ۰)$ تولید می‌کند. در شکل (۲.۱) با افزایش ماده‌ی اولیه، تولید بیشتر عاید می‌شود و در شکل (۳.۱) باافزایش ماده‌ی اولیه، تولید به همان نسبت اضافه نمی‌شود.



شکل ۲.۱: بازده به مقیاس صعودی

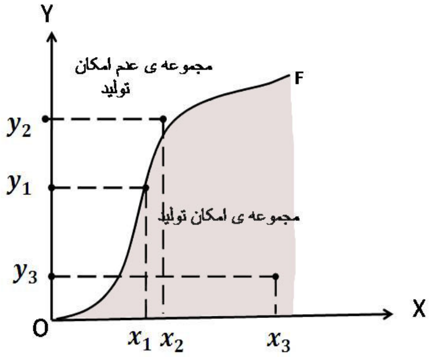


شکل ۳.۱: بازده به مقیاس نزولی

تعریف ۱۱.۱. *مجموعه‌ی امکان تولید:* *مجموعه‌ای از تمامی ترکیبات ورودی‌ها و خروجی‌ها که تمامی مقادیر تولید (خروجی) را به ازای منابع مختلف (ورودی) نشان می‌دهد. به عبارت دیگر تمامی ترکیبات ممکن از ورودی‌ها و خروجی‌ها را مجموعه‌ی امکان تولید می‌نامند.*

در منحنی نمایش تابع تولید که برای یک ورودی x و یک خروجی y در شکل (۴.۱) به نمایش گذاشته شده است به مجموعه‌ی بین منحنی مرز تولید of تا محور طول‌ها ، مجموعه‌ی امکان تولید و به قسمت‌های بالا منحنی مجموعه عدم امکان تولید می‌گویند.

در شکل (۴.۱) امکان تولید $y_۱$ واحد محصول، به ازای $x_۱$ واحد منبع یا $y_۳$ واحد محصول، به ازای $x_۳$ واحد منبع وجود دارد، این در صورتی است که امکان تولید $y_۲$ واحد محصول، به ازای $x_۲$ منبع نیست. به این ترتیب، در منطقه‌ی سایه دار شکل فوق ، ترکیبات مختلفی از تولیدات را به ازای منابع و محصولات می‌توان یافت. فرض کنید n مشاهده به صورت (x_j, y_j) برای $(j = ۱, \dots, n)$ در دست داریم که بردار ورودی x_j ، بردار خروجی y_j را تولید می‌کند. فرض براین است که $x_j \geq ۰, x_j \neq ۰$ و $y_j \geq ۰, y_j \neq ۰$ باشند، یعنی حداقل یک مولفه از بردارهای ورودی و خروجی مثبت و مخالف صفر باشند.



شکل ۴.۱: مجموعه‌ی امکان تولید و عدم امکان تولید

$$T = \{(x,y) | \text{بردار ورودی نامنفی x بردار خروجی نامنفی y را تولید می‌کند}\} \qquad (۲.۱)$$

به این ترتیب، مجموعه‌ای متشکل از مشاهدات واقعی مربوط به عملکرد واحدهای تحت ارزیابی که ترکیب خاصی از آن به صورت فوق است، در اختیار داریم. مجموعه‌ی امکان تولید T دارای اصول موضوعه‌ی زیر است :

۱. اصل شمول مشاهدات : $j = ۱, ۲, \ldots, n \qquad (x_j, y_j) \in T$

۲. اصل بی کرانی اشعه یا بازده به مقیاس ثابت (مدل CCR) :

اگر $(x,y) \in T$ آنگاه به ازای هر $\lambda \geq ۰$، $(\lambda x, \lambda y) \in T$

۳. اصل امکانپذیری :

اگر $(x,y) \in T$ آنگاه به ازای هر (x', y') که در آن $x' \geq x$ و $y' \leq y$ است، $(x', y') \in T$ باشد.

۴. اصل تحدب :

اگر $(x_۱, y_۱) \in T$ و $(x_۲, y_۲) \in T$ باشد، آنگاه $\lambda(x_۱, y_۱) + (۱ - \lambda)(x_۲, y_۲) \in T$، $۰ \leq \lambda \leq ۱$

۵. اصل کمینه درون یابی :

T کوچک‌ترین مجموعه‌ای است که در اصول ۱ تا ۴ صدق می‌کند.

$$T_c = \{(x,y)|x \geq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j, y \leq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j, \lambda_j \geq ۰, j = ۱, \ldots, n\}$$

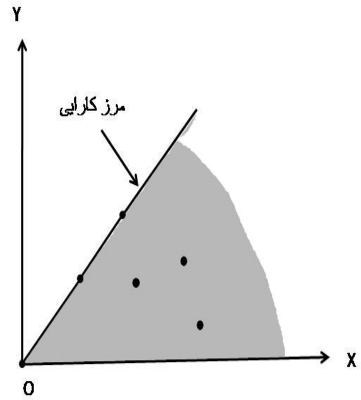
که مرز این مجموعه خط مستقیمی است که از مبدا می‌گذرد، به گونه‌ای که T_c یک مخروط محدب است که در برگیرنده‌ی تمام واحدها می‌باشد که به آن "مجموعه‌ی امکان تولید مدل CCR" می‌گویند. نام‌این مدل از اول حروف چارنز[۴]، کوپر[۵]و رودز[۶] برگرفته شده است که در سال ۱۹۷۸این مدل را ارائه دادند(شکل(۵.۱)). با تغییر در اصل دوم، یعنی استفاده از بازده به مقیاس متغیر به جای بازده به مقیاس ثابت، مدل دیگری به نام BCC به دست می‌آید که نام این مدل از حرف اول اسامی سه دانشمند به نام های بنکر[۷]، چارنز و کوپر برگرفته شده است(شکل(۶.۱)). مجموعه‌ی امکان تولیداین مدل به شکل زیر است :

$$T_v = \{(x,y)|x \geq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j, y \leq \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j, \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j = ۱, \lambda_j \geq ۰, j = ۱, \ldots, n\}$$

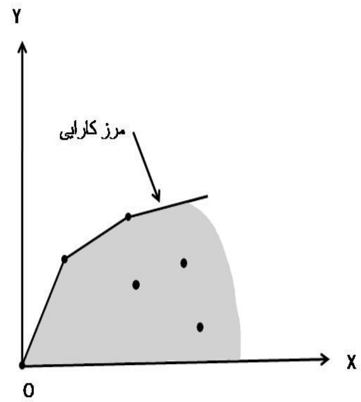
۳.۱ مدل مضربی CCR ورودی محور

به طور کلی مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها به دو گروه " ورودی محور " و " خروجی محور " تقسیم می‌شوند [۳۱] که در ادامه بااین مفهوم در مدل‌های مختلف آشنا خواهید شد.
برای ساختن مدل مضربی CCR، فرض کنید n واحد موجود است و هدف، ارزیابی کارایی واحد تحت بررسی صفر یا $DMU_۰$ است، $۰ \in j = \{۱, ۲, \ldots, n\}$، که واحد مذکور با مصرف بردار ورودی $x_{۱۰}, x_{۲۰}, \ldots, x_{m۰}$، بردار خروجی $y_{۱۰}, y_{۲۰}, \ldots, y_{s۰}$ را تولید می‌کند.

[۴] Charnes
[۵] Cooper
[۶] Rodhes
[۷] Banker



شکل ۵.۱: مجموعه‌ی امکان تولید CCR



شکل ۶.۱: مجموعه‌ی امکان تولید BCC

در صورتی که وزن‌های تخصیص داده شده به خروجی‌ها (یا قیمت خروجی‌ها) را با $u_1, \ldots, u_s$ و وزن‌های تخصیص داده شده به ورودی‌ها (یا هزینه ی خرید ورودی‌ها) با $v_1, \ldots, v_m$ نشان داده شود، آنگاه کسر زیر باید حداکثر گردد :

$$\frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r\circ}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i\circ}} \qquad (۳.۱)$$

این روش را برای سایر واحدها باید انجام داد:

$$\begin{aligned} &\max \quad \text{کارایی واحد صفر} \\ &s.t. \quad \text{کارایی تمام واحدها} \leq 1 \end{aligned} \tag{۴.۱}$$

متغیرهای مساله‌ی فوق وزن‌ها می‌باشند، جواب مساله مناسب ترین و مساعدترین مقادیر را برای وزن‌های واحد صفر ارائه می‌دهد و کارایی آن را اندازه‌گیری می‌کند. مدل ریاضی آن به صورت زیر می‌باشد :

$$\max \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{r0}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{i0}}$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leq 1 \qquad j = 1, \ldots, n \\ & u_r, v_i \geq 0 \end{aligned} \tag{۵.۱}$$

در مدل فوق اگر u_r خیلی بزرگ و v_i خیلی کوچک باشد، مقدار نسبت‌های بیان کننده‌ی محدودیت‌ها، بی نهایت بزرگ و نامحدود خواهند شد. برای جلوگیری از چنین مشکلی، تمامی نسبت‌ها (کارایی واحدها) را "کوچکتر یا مساوی" یک در نظر می‌گیرند و به عنوان محدودیت وارد مدل می‌کنند. لازم به توضیح است که در محدودیت‌ها به جای عدد یک، هر عدد مثبت دیگری مانند k را می‌توان قرار داد، دراین صورت کارایی واحدها نسبت به سطح سنجیده می‌شود [۳۱].

برای تبدیل مدل نسبت CCR به یک مدل برنامه‌ریزی خطی، از روشی که توسط چارنز و کوپر ارائه شد استفاده می‌کنیم. دراین روش استدلال بر آن است که برای حداکثر کردن مقدار یک عبارت کسری، کافی است که مخرج کسر را معادل یک "عدد ثابت" در نظر گرفته شود و صورت کسر حداکثر گردد. براین اساس مخرج تابع هدف برنامه‌ریزی کسری زیر را مساوی "یک" قرار می‌دهیم،

در نتیجه مدل (۶.۱) به مدل (۷.۱) تبدیل می‌شود.

$$\max \quad \frac{\sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^{m} v_i x_{io}}$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0 \qquad j = 1, \ldots, n \\ & u_r \geq 0 \qquad r = 1, 2, \ldots, s \\ & v_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned} \tag{۶.۱}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{ro} \\ s.t. \quad & \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} \leq 0 \qquad j = 1, \ldots, n \\ & \sum_{i=1}^{m} v_i x_{io} = 1 \\ & u_r \geq 0 \qquad r = 1, 2, \ldots, s \\ & v_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned} \tag{۷.۱}$$

مدل‌های ورودی محور مدل‌هایی هستند که درصدد کاهش ورودی‌ها برای رساندن واحد ناکارا به روی مرز کارایی هستند. این مفهوم به روشنی در مدل پوششی درک خواهد شد. "مدل پوششی"، مدل ثانویه مدل مضربی است.

۴.۱ مدل پوششی CCR

چارنز، کوپر و رودز در ساخت مدل تحلیلی پوششی داده‌ها به یک رابطه‌ی تجربی در ارتباط با تعداد واحدهای مورد ارزیابی و تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها به صورت زیر رسیدند:

(تعداد ورودی + تعداد خروجی) × ۳ $\geq$ تعداد واحدهای مورد ارزیابی

عدم به کار گیری رابطه‌ی فوق در عمل موجب می‌شود که تعداد زیادی از واحدها بر روی مرز کارا قرار گیرند و یا به عبارت دیگر دارای امتیاز کارایی یک گردند، لذا قدرت تفکیک مدل کاهش می‌یابد.

از آنجا که برای هر واحد باید یک محدودیت نوشته شود به این ترتیب مدل برنامه‌ریزی خطی به دست خواهد آمد که تعداد محدودیت‌های آن از تعداد متغیرهایش بیشتر است و از آنجا که حجم عملیات در حل سیمپلکس، بیشتر وابسته به تعداد محدودیت‌ها است تا متغیرها، لذا حل مساله‌ی ثانویه مدل فوق نیازمند حجم عملیات کمتری خواهد شد.

در صورتی که متغیر متناظر با محدودیت $\sum_{i=۱}^{m} v_i x_{i.} = ۱$ در مساله‌ی ثانویه ، با θ و متغیرهای متناظر با محدودیت‌های $\sum_{r=۱}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=۱}^{m} v_i x_{ij} \leq ۰$ ، با λ_j بیان گردند، ثانویه‌ی مدل (۷.۱) به صورت مدل (۸.۱) خواهد بود:

$$
\begin{array}{lll}
\min & \theta & \\
s.t. & \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j \leq \theta x_. & \\
& \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j y_j \geq y_. & \\
& \lambda_j \geq ۰ & j = ۱, ۲, \dots, n \\
& \theta & \text{آزاد در علامت}
\end{array}
\tag{۸.۱}
$$

و اگر تعداد n واحد داشته باشیم که هریک s خروجی و m ورودی داشته باشند، مدل فوق به شکل مدل زیر خواهد شد: