دانشگاه الزهرا

گروه ریاضی دانشکده علوم پایه

پایان نامه

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی کاربردی

عنوان

حل عددی مساله معکوس منبع گرمایی در برخی معادلات سهموی

استاد راهنما

دکتر علی مردان شاه رضایی

استاد مشاور

دکتر طاهری

دانشجو

مریم خسروی

اسفند ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين الرحمن الرحيم مالك يوم الدين اياك نعبد و اياك نستعين اهدنا الصراط المستقيم صراط الذين انعمت عليهم غير المغضوب عليهم و لا الضالين

تقدیم به

حضرت زهرا سلام الله علیها

صدیقه‌ی طاهره‌ای که مظهر رضای الهی و غضب ربوبی است.

کلیه دستاوردهای این تحقیق متعلق به دانشگاه الزهرا(س) است.

تشکر و قدردانی

بستاییم آن خدای را که دیباچه ی همه ی کتاب ها از تحمید او آرایش گیرد و مطلع همه ی خطابه ها از ذکر او زینت پذیرد. اکنون که به حول و قوه ی خداوند متعال، تدوین و نگارش این رساله را به پایان رسانده ام، بر خود فرض می دانم، سپاسی بی انتها، بر استاد فرزانه و گرانقدرم، جناب آقای دکتر علی مردان شاه رضایی، تقدیم دارم که قطعاً بدون زحمات و تلاش های ارزنده ی ایشان این مجموعه به پایان نمی رسید. از مشاور عزیزم سرکار خانم دکتر شهناز طاهری کمال تشکر و قدردانی را دارم.

با تقدیر و تشکر از جناب آقای دکتر شهنام جوادی و جناب آقای دکتر یدالله اردوخانی که صبورانه داوری این پایان نامه را پذیرفتند.

همچنین از پدر و مادرم که بوسه بر دستان پر مهرشان باعث سعادتم است و، همسر صبورم که حامی و مشوق ام بودند، سپاسگزارم.

چکیده

مسأله معکوس بازسازی سمت راست (RHS) یک معادله سهموی را با استفاده از یک حل خاص در نظر می‌گیریم. وابستگی مقدار سمت راست به زمان مجهول می‌باشد. چنین مسأله ای از نوع مسائل انتقال گرما و آب می‌باشد. رویکردهای گوناگونی برای حل چنین مسأله ای مورد بحث قرارگرفته است. برای حل این مسأله غیرکلاسیک، یک روش خاص شبیه به روش بردرینگ به کارگرفته شده است.[۱]
چنین روش کلی توانسته است برای معادلات سهموی یک بعدی و یا چند بعدی در فضا استفاده شود.
کلمات کلیدی:معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، مساله معکوس سهموی، منبع گرمایی، مشاهده اضافی، طرح تفاضلی، پایداری، حل عددی

فهرست مطالب

لیست جداول

لیست تصاویر

مقدمه

معادلات دیفرانسیل، بالاخص معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ($PDEs$) در صنعت و همچنین در مدل سازی پدیده‌های فیزیکی نقش به سزایی ایفا می کند.
به دست آوردن جواب تحلیلی برای یک (PDE) اغلب کار پیچیده‌ای می باشد.در سال‌های اخیر ریاضیدانان موفق شدند به کاربردهای جالبی برای مسائل هدایت گرمایی معکوس دست پیدا کنند. لذا ابداع روشهای عددی با دقت بالا برای حل مسائل ($PDEs$) مورد توجه آنان قرار گرفت.
پروفسور لیو [۱] در زمینه روش تفاضلات متناهی تلاش‌های بسیاری انجام داده است.
پروفسور چین [۲] در سال ۲۰۰۷ میلادی یک طرح تفاضلی ضمنی برای معادلات نفوذی معکوس ارائه نمودند.
همچنین، پروفسور ساماراسکی [۳] و پروفسور وبیشچویچ [۴] محاسباتی برای حل مسائل بدخیم معادلات سهموی چند بعدی انجام دادند.
در پژوهش حاضر، به بررسی مساله معکوس سهموی با منبع مجهول می‌پردازیم.هدف از حل این مساله تعیین منبع مجهول و همچنین تعیین درجه حرارت یا دما می باشد. این رساله به قرار زیر تنظیم شده است:
فصل اول شامل معرفی برخی تعاریف و مفاهیم اولیه می باشد که در فصل‌های بعدی به آن نیازمندیم. در فصل دوم به بررسی کاربردهای مسائل سهموی در طبیعت پرداخته‌ایم. فصل سوم با استفاده از یک تغییر متغیر مناسب و شرط کرانه‌ای فوق اضافی، به حل عددی مساله به روش تفاضلات ضمنی کرانک–نیکلسون، ضمنی محض و صریح اقدام نموده‌ایم و برای بررسی پایداری و همگرایی روش، مثال‌هایی را می‌توان مشاهده نمود. در فصل چهارم، حل عددی مساله معکوس سهموی با یک روش خاص توضیح داده شده و

---

[۱] Liu

[۲] China

[۳] Samarasky

[۴] Vabishchevich

در انتهای فصل چندین مثال عددی ارائه شده است. پس از حل مثال‌ها، نتایج عددی را می‌توان مشاهده نمود. این پایان نامه برگرفته از دو مرجع [۱] و [۲] است.

مریم خسروی
دانشگاه الزهرا (س)
اسفند ۹۱

فصل ۱

پیش‌نیاز

۱.۱ پیشگفتار

در این فصل به ارائه تعاریف و مفاهیمی می‌پردازیم که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است.

۲.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی(PDE)، به دسته‌ای از معادلات اطلاق می‌شود که در آنها، توابع مجهول بر حسب چند متغیر مستقل به همراه مشتق جزئی توابع نسبت به آن متغیرها شرکت داشته باشند. این دسته از معادلات در ارتباط با مسائل گوناگون فیزیکی و هندسی که شامل توابعی می‌باشند که این توابع به دو یا چند متغیر مستقل بستگی دارد، مطرح می‌شوند. بسیاری از مسائل فیزیکی را می‌توان با معادلات دیفرانسیل معمولی مدلسازی نمود، درحالی‌که تعداد زیادی از مسائل مکانیک سیالات و جامدات (مانند دینا- میک، الاستیسیته)، انتقال حرارت، نظریه الکترومغناطیس و مکانیک کوانتوم و دیگر شاخه‌های فیزیک به معادلات دیفرانسیل جزئی منجر می‌شوند. کاربرد معادلات دیفرانسیل جزئی در مقایسه با معادلات دیفرانسیل معمولی بیشتر می‌باشد.

۱.۲.۱ مفاهیم بنیادی از معادلات با مشتقات جزئی

متغیرهای مستقل x و y و متغیر وابسته U که تابعی به صورت :

$$U = U(x, y), \tag{۱.۱}$$

می‌باشد، در نظر می‌گیریم. نمایش مشتقات جزئی معمولاً به صورت زیر است:

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad U_y = \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$U_{x^۲} = U_{xx} = \frac{\partial^۲ U}{\partial x^۲} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial U}{\partial x}),$$

$$U_{xy} = \frac{\partial^۲ U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial U}{\partial y}).$$

با به کارگیری روابط اخیر و رابطه (۱.۱) یک نمایش PDE مرتبه دوم را به صورت زیر داریم [۷]:

$$f(x, y, U, U_x, U_y, U_{xx}, U_{yy}, U_{xy}) = ۰,$$

که در آن f یک تابع با کمیت‌های نشان داده شده است و حداقل یکی از کمیت‌های با مشتقات جزئی در آن وجود دارد. به عنوان مثال، معادلات با مشتقات جزئی زیر را در نظر می‌گیریم:

الف) $U_{xx} + U_{yy} = ۰,$

ب) $U_x = U + x^۲ + y^۲,$

ج) $U_{xxx} = U_{yy} + U^۲,$

د) $(U_x)^۲ + (U_y)^۲ = e^U.$

مرتبه یک معادله با مشتق جزئی توسط مرتبه‌ی بالاترین مشتق در آن معادله تعیین می‌شود و همچنین درجه یک معادله با مشتق جزئی بزرگترین توان قسمت مرتبه معادله است، به شرطی که به صورت یک چندجمله‌ای قابل نمایش باشند. مثلاً در معادلات مذکور، معادله‌ی (ب) و (د) از مرتبه یک، معادله (ج) از مرتبه سوم و معادله (الف) از مرتبه دوم است. هنگامی که چندین معادله با مشتقات جزئی به هم مرتبط شده باشند، مرتبه آن توسط ترکیب همه معادلات، در یک معادله به دست می‌آید.
برای مثال، سیستم معادلات زیر از مرتبه دوم است، اگرچه هر یک از معادلات تنها از مرتبه اول هستند:

$$U_x + V_y = U_z,$$

$$U = W_x,$$

$$V = W_y,$$

معادلات بالا را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$W_{xx} + W_{yy} = W_{xz},$$

واضح است که معادله اخیر از مرتبه ۲ می‌باشد.

۲.۲.۱ انواع معادلات با مشتقات جزئی

معادلات با مشتقات جزئی در انواع مختلفی است که برخی از آنها به قرار زیر است:
۱. معادلات با مشتقات جزئی خطی
۲. معادلات با مشتقات جزئی شبه‌خطی
۳. معادلات با مشتقات جزئی غیرخطی
نوع معادلات دیفرانسیل از اهمیت خاصی برخوردار است. مثلاً در معادله‌ی مرتبه اول

$$a(.)U_x + b(.)U_y = c(.)U + f(x, y),$$

خطی بودن توسط ضریب $a(.)$ ، $b(.)$ ، $c(.)$ برقرار می‌شود. اگر ضرائب ثابت یا توابعی تنها از متغیرهای مستقل x ، y باشند، (یعنی به شکل (y ، x)=(.))، معادله با مشتقات جزئی خطی است. اگرضرائب توابعی از متغیرهای وابسته، (یعنی به شکل (U ، y ، x)=(.))، باشند،معادله با مشتقات جزئی شبه‌خطی است، در غیر این صورت، غیرخطی می‌باشد.[۲۹]
مثلاً معادلات با مشتقات جزئی به صورت زیر طبقه‌بندی می‌شوند: [۲۸]و[۷]

$$U_x + 2U_y = 0, \qquad \text{(خطی)}$$

$$U_x + UU_y = x^2, \qquad \text{(شبه‌خطی)}$$

$$U_x + (U_y)^2 = 0, \qquad \text{(غیرخطی)}$$

معمولاً وقتی ضرائب یک معادله مرتبه nام به مشتقات جزئی مرتبه nام بستگی داشته باشد، معادله را غیرخطی گویند و وقتی به مشتقات مرتبه m ام، که در آن $n>m$ است،

بستگی داشته باشد، معادله شبه‌خطی است. این خصوصیات مهم هستند. نظر به اینکه بسیاری از خواص تحلیلی خطی بودن، وقتی شبه خطی بودن معادلات با مشتقات جزئی به عنوان یک قاعده کلی شناخته شده‌اند و هر معادله با مشتقات جزئی غیرخطی بایستی به طور منحصر بفردی مورد بررسی قرار گیرد.
جواب تحلیلی یک معادله با مشتقات جزئی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$U = U(x, y),$$

که دلالت بر تابعی دارد که وقتی در معادله با مشتقات جزئی قرار گیرد، یک همانندی را ایجاب نماید، مشروط بر اینکه مشتقات جزئی مورد نیاز موجود باشند.
البته هنگامی که در مورد جواب یک PDE بحث می‌شود، ضروری است که شرایط اولیه و کرانه‌ای کمکی مناسبی را به دست آوریم.
برای مثال، توزیع حرارت در طول متناهی از یک میله توسط مساله زیر توصیف می‌شود:[۷]

$$U_t = U_{xx}; \qquad t > 0, \qquad 0 < x < 1, \qquad (PDE)$$

$$U(x, 0) = f(x); \qquad 0 < x < 1, \qquad (\text{شرط اولیه})$$

$$U(0, t) = \phi(t); \qquad t > 0, \qquad (\text{شرط کرانه‌ای})$$

$$U(1, t) = \chi(t); \qquad t > 0, \qquad (\text{شرط کرانه‌ای})$$

که در آن توابع f ، ϕ و χ توابع پیوسته و معلوم است. معمولاً یک چنین توابعی منجر به مساله خوش خیم می‌شود.[۸]
مساله خوش خیم به گونه‌ای است که برای اختلافات کوچک در داده‌های ورودی، تغییرات کوچکی در جواب به وجود می‌آید.
حال، خصوصیات جواب معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) را مورد مقایسه قرارمی‌دهیم.
شکل کلی یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه اول به صورت:

$$\frac{dU}{dx} = f(x, U),$$

می‌باشد که در آن f یک تابع معلوم با کمیت های x و U است. در یک معادله دیفرانسیل معمولی یک ویژگی (x,U)، مقدار یکتایی از $\frac{dU}{dx}$ را مشخص می‌کند؛ در مقابل یک خصوصیت (x,y,U) در یک معادله با مشتقات جزئی مرتبه اول تنها یک ارتباط بین U_x و U_y برقرار می‌کند امّا هر یک را به طور یکتا تعیین نمی‌کند.
در یک معادله دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم، جواب یک نقطه و یک خط مماس روی منحنی جواب در یک سطح را مشخص می‌کند. به همین ترتیب، مفاهیم نقطه، سطح یا خط مماس برای معادله دیفرانسیل معمولی، به منحنی، فضای سه بعدی و سطح مماس برای معادله با مشتقات جزئی تعمیم می‌یابند.
به عبارت دیگر، برای یک معادله دیفرانسیل معمولی، منحنی‌های جواب در فضای دو بعدی از یک نقطه می‌گذرند، در حالی که در یک معادله با مشتقات جزئی سطوح جواب در فضای سه بعدی به گذشتن از یک منحنی یا خط نیاز دارند که البته این تفاوت‌ها نتیجه‌ی مستقیم افزایش در تعداد متغیرهای وابسته در PDE نسبت به ODE می‌باشد.

۳.۲.۱ معادلات با مشتقات جزئی مرتبه دوم

معادله با مشتقات جزئی مرتبه دوم با دو متغیر مستقل، که به صورت:

$$a(.)U_{xx} + 2b(.)U_{xy} + c(.)U_{yy} + d(.)U_x + e(.)U_y + f(.)U + g(.) = 0,$$

نوشته می‌شود را خطی گویند هرگاه قسمت ناهمگن معادله یعنی $g(.)$ و ضرائب $a(.)$ ، $b(.)$ ، $c(.)$ ، $d(.)$ ، $e(.)$و $f(.)$ ثابت یا توابعی تنها از متغیرهای x و y باشند؛ و غیرخطی است چنانچه هیچ یک از دو حالت قبل اتفاق نیفتد.
مثال‌های پایه‌ای معادلات با مشتقات جزئی مرتبه دوم که مشهور هستند به صورت زیر می‌باشند:

$$U_{xx} + U_{yy} = 0,$$ (معادله لاپلاس دو بعدی)

$$U_{xx} + U_{yy} = f(x,y),$$ (معادله پوآسن)

$$U_t = U_{xx},$$ (معادله انتشار یا جریان گرمای یک بعدی)

(معادله انتشار یا جریان گرمای دو بعدی) $U_t = U_{xx}+U_{yy},$

(معادله برگر) $U_x + UU_y = U_{yy},$

(معادله موج یا ارتعاش) $U_{tt} = U_{xx},$

۳.۱ شرایط اولیه و کرانه‌ای

برای به دست آوردن جواب یکتای یک معادله‌ی دیفرانسیل جزئی، به مجموعه‌ای از شرایط مکمل نیاز است. شرایط یاد شده به عنوان شرایط اولیه و شرایط کرانه‌ای تقسیم بندی می‌شوند:

شرایط اولیه به معنی معلوم بودن مقدار متغیر وابسته در یک حالت اولیه است، در حالی که شرایط کرانه‌ای، به معنی معلوم بودن مقدار متغیر وابسته و یا مشتقات آن در کرانه‌های قلمرو حل معادله‌ی دیفرانسیل جزئی است.

شرایط کرانه‌ای عبارت اند از :

۱-شرایط کرانه‌ای دیریکله [۱]: اگر مقدار متغیر وابسته بر روی کرانه‌ها مشخص شده باشد آن را شرایط کرانه‌ای دیریکله می‌نامند .

۲-شرایط کرانه‌ای نیومن [۲]: اگر مشتق متغیر وابسته در کرانه‌ها معلوم باشد آن را شرط کرانه‌ای نیومن می‌گویند.

۳- شرط کرانه‌ای روبین [۳]: در این نوع شرط کرانه‌ای، مقدار تابع در بخشی از کران دامنه و مقدار مشتق تابع در بخش دیگر از کران دامنه مشخص می‌باشد.

۴-شرایط کرانه‌ای آمیخته : در این نوع شرط کرانه‌ای، ترکیب خطی از تابع و مشتق تابع روی کران دامنه معلوم می‌باشد.

۵-شرط کرانه‌ای کوشی : اگر در شرط اولیه، به جای t متغیر مکان اتخاذ شود، در این

---

[۱] Dirikle

[۲] Neuman

[۳] Rubin

صورت آن شرایط را شرایط کرانه‌ای از نوع کوشی گویند.

۴.۱ مسائل مقدار اولیه

فرمول بندی ریاضی یک پدیده فیزیکی در شبیه سازی، مهندسی برق، تئوری کنترل، اقتصاد و نظایر آن، معمولاً به یک مساله مقدار اولیه مانند:

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

منجر می‌شود که در آن f و مقدار y_0 معلوم می‌باشد. از نمونه‌های فیزیکی مسائل مقدار اولیه می‌توان به تکثیر موج های فشار در یک مایع، انتشار تنش، جابجایی در سیستم‌های کشسان، انتشار حرارت و توسعه تنش‌های خودجوش اشاره نمود.[۲۹]

۵.۱ مسائل با مقادیر کرانه‌ای

یک مساله مقدار کرانه‌ای به صورت:

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y'), \\ y(a) = \alpha, \\ y(b) = \beta, \end{cases}$$

می‌باشد که در آن تابع f و مقادیر α و β معلوم می‌باشد. این نوع از مسائل در مهندسی سازه‌ها، راه و ساختمان و مکانیک، مربوط به خمیدگی یک میله یا تیرآهن با مقطع مستطیلی شکل تحت بار یکنواخت می‌تواند اتفاق بیفتد. از نمونه‌های فیزیکی دیگر مسائل مقدار کرانه‌ای می‌توان جریان یکنواخت چسبنده، توزیع یکنواخت حرارت، تنش‌های تعادل در ساختمان کشسان توزیع متعادل ولتاژ را نام برد.[۲۹]