بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد (M.sc)

گرایش: آنالیز عددی

عنوان:

محاسبه ریشه‌های دوم ماتریس‌های دوری

استاد راهنما:

دکتر مجید امیرفخریان

استاد مشاور:

دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی

پژوهشگر:

پاکیزه محمدی خانقاه

تابستان ۱۳۹۱

تقدیم به :

خالق هستی بخش

و

پدر و مادر مهربانم

تشکر و قدردانی :

خداوندگارا ! ستایش می‌کنم تو را، که توان زنده کردن اندکی از رویاهایم را به من بخشیدی و

من همچنان رهروام تا شاید...

و سپاس می‌گوییم تو را، که بدنبال کشف حقایق تا پیچ وخم معناها کشانیدی!

اینک که با لطفش پروژه‌ی نهایی دوره کارشناسی ارشد را به اتمام رساندم، بر خودم لازم می‌دانم که از استاد عزیزم جناب آقای دکتر مجید امیرفخریان که با سعه صدر اینجانب را در انجام این پروژه یاری رسانیده‌اند صمیمانه سپاسگزاری نمایم.

و ضمنا از جناب آقای دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی که همواره از نکته بینی‌ها و راهنمایی‌های ارزشمندشان بهره برده‌ام تشکر و قدردانی می‌کنم.

همچنین از جناب آقای دکتر حجت اله ادیبی و جناب آقای دکتر جلیل رشیدی نیا که در طول تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد زحمات فراوانی را از جناب من، قبول کرده‌اند سپاسگزارم.

همچنین از جناب آقای دکتر توفیق ا لهویرنلو که داوری اینجانب را قبول کرده‌اند، کمال تشکر را دارم.

و در نهایت ستایش بیکران خویش را پیشکش قلب‌های مهربان پدر و مادر می‌کنم که در

تمام مراحل زندگی‌ام...

و امیدوارم پایان نامه اینجانب، رضایت خاطر اساتید محترم و دوستداران علم ریاضی، را فراهم بیاورد.

پاکیزه محمدی خانقاه

تابستان ۱۳۹۱

بسمه تعالی

تعهد نامه اصالت پایان‌نامه کارشناسی ارشد

اینجانب پاکیزه محمدی خانقاه دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی با شماره دانشجویی ۸۹۰۶۶۲۵۶۴۰۰ اعلام می‌نمایم که کلیه مطالب مندرج در این پایان نامه با عنوان: **محاسبه ریشه‌های دوم ماتریس‌های دوری،** حاصل کار پژوهشی خود بوده و چنانچه دستاوردهای پژوهشی دیگران را مورد استفاده قرار داده باشم، طبق ضوابط و رویه‌های جاری، آنرا ارجاع داده و در فهرست منابع و ماخذ ذکر نموده‌ام. علاوه بر آن تاکید می‌نماید که پایان نامه قبلا برای احراز هیچ مدرک هم سطح، پایین‌تر یا بالاتر ارائه نشده و چنانچه در هر زمان خلاف آن ثابت شود، بدینوسیله متعهد می‌شوم، در صورت ابطال مدرک تحصیلی‌ام توسط دانشگاه، بدون کوچکترین اعتراض آنرا بپذیرم.

پاکیزه محمدی خانقاه

تاریخ و امضاء

بسمه تعالی

در تاریخ: ۵ , ۷, ۱۳۹۱

دانشجوی کارشناسی ارشد خانم **پاکیزه محمدی خانقاه** از پایان‌نامه خود دفاع نموده و

با نمره **۱۹/۵** به حروف **نوزده و نیم** و با درجه

مورد تصویب قرار گرفت.

امضاء استاد راهنما

بسمه تعالی

دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی

****

(این چکیده به منظور چاپ در پژوهش نامه دانشگاه تهیه شده است)

نام واحد دانشگاهی: تهران مرکزی **کد واحد:** ۱۰۱	**کد شناسایی پایان نامه:** ۰۱۳۰۱۰۹۹۰۲۰۰۷۰
عنوان پایان نامه: محاسبه ریشه های دوم ماتریس های دوری	
نام ونام خانوادگی دانشجو: پاکیزه محمدی خانقاه **شماره دانشجویی:** ۸۹۰۶۶۲۵۶۴۰۰ **رشته تحصیلی:** ریاضی کاربردی	**تاریخ شروع پایان نامه:** ۱، ۱۲، ۹۰ **تاریخ اتمام پایان نامه:** ۱، ۵، ۹۱
استاد / استادان راهنما: دکتر مجید امیرفخریان **استاد / استادان مشاور:** دکتر محمدعلی فریبرزی عراقی	
آدرس وشماره تلفن: تهران- خیابان کاشان- کوچه مجید برکم- پلاک ۳۶- زنگ۸ -۰۹۳۹۰۸۳۹۸۱۲	

چکیده پایان نامه (شامل خلاصه، اهداف، روش های اجرا ونتایج به دست آمده):

در این پایان نامه ریشه‌های دوم ماتریس‌های دوری و ماتریس‌های شبه متقارن دوری را با استفاده از ویژگی‌شان مورد بحث قرار می‌دهیم و الگوریتم‌های کارا، برای محاسبه ریشه‌های دوم این نوع ماتریس‌ها ارائه خواهد شد که این الگوریتم‌ها، از الگوریتم‌های متداولی که بر اساس تجزیه شور هستند، سریعتر می‌باشند و همچنین H- ماتریس دوری با درایه‌های قطری مثبت بررسی خواهند شد و دو الگوریتم کارا برای محاسبه ریشه‌های‌دوم اصلی این نوع ماتریس‌ها مورد بحث قرار می‌گیرد .

نظر استاد راهنما برای چاپ در پژوهش نامه دانشگاه $\frac{\text{مناسب است}}{\text{مناسب نیست}}$ **تاریخ وامضاء:**

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان نامه ریشه‌های دوم ماتریس‌های دوری و ماتریس‌های شبه متقارن دوری را با استفاده از ویژگی‌شان مورد بحث قرار می‌دهیم. در قسمت اول از این کار تحقیقی، شکل تقلیل یافته از ماتریس‌های-دوری و همچنین ماتریس‌های شبه متقارن دوری را بررسی می‌کنیم و دو الگوریتم کارا برای محاسبه ریشه‌های دوم این نوع ماتریس‌ها ارائه می شود و همچنین روش‌های ارائه شده برای محاسبه ریشه‌های دوم این نوع ماتریس‌ها از الگوریتم‌های متداولی که بر اساس تجزیه شور هستند، سریعتر هستند.

در قسمت دوم H- ماتریس دوری با درایه‌های قطری مثبت بررسی خواهند شد و دو الگوریتم کارا برای محاسبه ریشه‌های دوم اصلی این نوع ماتریس‌ها مورد بحث قرار می گیرد. وجه اشتراک این دو الگوریتم آن است که هر دو نیازمند ضرب‌های ماتریس در ماتریس در دنباله‌های تکراری‌شان می‌باشند، و عملیات با بازدهی کارا می‌تواند در کامپیوترهای بزرگ مدرن امروزی انجام شود.

مقدمه

ماتریس‌های دوری یک الگوی مهمی از ماتریس‌هاست که در قسمت وسیعی از فیزیک، الکترومغناطیس، پردازنده سیگنال و ارتعاش مولکولی و ریاضیات کاربردی، کاربرد دارند[**۶-۲۵**]. در سالهای اخیر با توجه به مشخصه‌ها و عملکردهای این گونه ماتریس‌ها، ریاضیدانان به تحقیقات بزرگی دست یافتند.[**۱۶-۱۳**]

همچنین توسعه مفهوم تابع با متغیر مختلط به یک تابع ماتریسی، توجه بسیاری از ریاضیدانان را از سال ۱۸۸۳ به سوی خود جلب کرد. تاریخ این رشته از این حیث که به نظر می‌رسد تعداد زیادی از نویسندگان از آنچه که پشینیان آنها انجام داده‌اند آگاه نیستند، غیر معمول است.

به نظر می‌رسد که بیشتر ریاضیدانان درگیر چنین ایده‌ای می‌باشند و تلاش می‌کنند که نظر خود را درباره تابع ماتریسی مطرح سازند، اما بدون توجه یا با توجه کم به آنچه که ریاضیدانان قبلی در این زمینه انجام داده‌اند، از سال ۱۸۸۰ در مقالات مختلف، تعریف‌هایی مجزا از تابع ماتریسی توسط ریاضیدانان بیان شده است. [**۱۵**-۱۱] و ریشه دوم ماتریس نیز یکی از متداول‌ترین تابع‌های ماتریسی است که غالبا در مبحث‌های از ماتریس معین مثبت متقارن رخ می‌دهد و به عنوان نمونه ریشه دوم در تابع علامت، در مسئله مقادیر ویژه تعمیم یافته، تبدیلات قطبی، واسطه هندسی n عدد مثبت، نقش کلیدی دارد و همین امر منجر به کارایی

ریشه دوم در تئوری و دستگاه‌های محاسبه‌ای می‌شود. از جمله ریشه‌های دوم ماتریس، ریشه دوم اصلی است، که قابلیت استفاده در تئوری و عملی آنرا متمایز ساخته است.

روشهای متنوع زیادی برای محاسبه ریشه دوم ماتریس و ریشه دوم اصلی با ویژگی پایداری عددی که از جالب‌ترین موضوعات برای مطالعه است در نوع خودش وجود دارد [۲۱] و به این دلیل نویسندگان زیادی علاقه‌مند به مطالعه ریشه دوم ماتریس‌ها می‌باشند. [۱۵ -۸]

اگر چه از لحاظ تئوری ریشه‌های دوم ماتریس پیچیده هستند، ولی ساده سازی یا مختصر سازی از آنها برای کلاس‌های معین و مشخص از ماتریس‌ها به عنوان نمونه در مبحث‌های ازماتریس‌های متقارن-مرکزی [۳۱-۳۰ -۹ ۲ -۱۸-۱۰]، و ماتریس‌های هامیلتونی [۱۷]، و ماتریس‌های نیمه معین [۲۸] و.....رخ می‌دهد.

در پایان لازم است، گفته شود که در فصل چهارم از این کار تحقیقی مطالبی از ماتریس‌های دوری و ریشه‌های دوم این گونه ماتریس‌ها مورد مطالعه قرار گرفته شده است. در این فصل ابتدا شکل تقلیل-یافته از ماتریس‌های دوری و ماتریس‌های شبه متقارن دوری را بررسی کردیم، سپس نشان می‌دهیم مسئله محاسبه ریشه‌های دوم دوری از ماتریس‌های دوری به محاسبه ریشه‌های دو ماتریس نیم اندازه

یعنی ریشه‌های دوم از ماتریس‌های، B-C و B+C می‌تواند کاهش یابد و دو الگوریتم کارا برای محاسبه ریشه‌های دوم این نوع ماتریس‌ها که از الگوریتم‌های متداولی که براساس تجزیه شور هستند سریعتر می‌باشند، ارائه می‌شود. در قسمت دوم با تفصیل بیشتری به بحث در مورد H- ماتریس دوری با درایه‌های قطری مثبت می‌پردازیم و دو الگوریتم برای محاسبه ریشه دوم اصلی از این نوع ماتریس‌ها را بدست می‌آوریم و همچنین این الگوریتم‌ها بر اساس روش تکراری LL و روش تکراری شولز پیراسته می‌باشند. پس به طور مختصر در فصل چهارم ابتدا تعاریف پایه‌ای و مفهوم‌ها را بیان کردیم و سپس ویژگی‌های ماتریس‌های دوری و همچنین ریشه‌های دوم از ماتریس‌های دوری را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. در قسمت بعدی H- ماتریس‌های دوری با درایه‌های قطری مثبت مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

لازم به ذکر است که برای مطالعه این مطالب، سه فصل قبل که زمینه‌ای برای درک بیشتر این فصل است می‌توانند، مورد مطالعه قرار گیرند.

فصل اول

فصل۱.تابع ماتریسی

۱.۱ آشنایی با مفهوم تابع ماتریسی

مبحث عمومی تحلیل ماتریسی با توجه به توسعه مفهوم تابع برای ماتریس‌ها، می تواند کاربردهای مهمی در دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی و به خصوص کاربردهای زیادی در شاخه‌های گوناگون علوم مهندسی از جمله مکانیک کوانتوم و نظریه کنترل مدرن داشته باشد.[۵]

بنابراین ابتدا به معرفی کلی و مقدماتی از تابع ماتریسی می‌پردازیم و سپس در بخش بعدی به تعریف‌های مفید از دانشمندانان مختلف دربارهٔ تابع ماتریسی اشاره خواهیم کرد. فرض کنیم $f(z)$ یک تابع مختلط مقدار با متغیر مختلط z و A نیز یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های مختلط می‌باشد. اکنون هدف محاسبه تابع $f(A)$ از ماتریس A، می‌باشد. به طور کلی می‌توان گفت، اگر تابع اسکالر روی $\lambda(A)$، ($\lambda(A)$ مجموعه همه مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشد) تعریف شده باشد، آنگاه $f(A)$ با جایگزینی ماتریس A به جای z در فرمول $f(z)$ بدست می‌آید. برای مثال اگر

$f(z) = (۱ + z)/(۱ - z)$ که $۱ \notin \lambda(A)$ آنگاه $f(A) = (I + A)(I - A)^{-۱}$

روش دیگر برای محاسبه تابع ماتریسی، روش تقریبی می‌باشد. به این صورت که تابع $f(A)$ با یک تابع

که محاسبه آن آسان می‌باشد مانند $g(A)$ تقریب زده می‌شود. برای مثال g می‌تواند یک سری تیلور و بریده شدهٔ نزدیک به تابع f باشد. اجازه دهید به این بحث تا حدودی مفصل‌تر بپردازیم.

فرض کنیم $f(z)$ تابعی با متغیر مختلط z باشد که $f(z)$ در قرص $|z| < \mathrm{R}$ تحلیلی می‌باشد. این هم ارز است با اینکه بگوییم $f(A)$ می‌تواند به صورت یک سری توانی همگرا (مثلا سری تیلور) نمایش داده شود.

$$f(z) = c_۰ + c_۱ z + c_۲ z^۲ + \cdots \qquad (۱-۱)$$

که $|z| < \mathrm{R}$ و c_k برای $k \geqslant ۰$، ثابت‌هایی با مقادیر مختلط می‌باشند. با جایگزینی کردن ماتریس A ، در سری (۱-۱) نتیجه نمادین زیر بدست می‌آید:

$$f(A) = c_۰ I + c_۱ A + c_۲ A^۲ + \cdots \qquad (۲-۱)$$

می‌گوییم یک سری ماتریسی همگرا است اگر همه $n^۲$ سرهای اسکالری که $f(A)$ را تشکیل داده‌اند، همگرا باشد و از طرفی هر درایه یک ماتریس، مقدار مطلقی دارد یعنی از بالا به نرم دو ماتریسی کراندار است. بنابراین هر درایه از $f(A)$ یک سری است که به نرم $||f(A)||_۲$ کراندار است. اما نرم مجموع، کوچکتر یا مساوی مجموع نرم‌هاست و از این خاصیت می‌توان نتیجه گرفت که رابطه (۱-۲) همگرا است،

اگر رابطه زیر یعنی (۱-۳) همگرا باشد.

$$||f(A)||_۲ = ||c_۰ I + c_۱ A + c_۲ A^۲ + \cdots||_۲ \quad (۱-۳)$$

$$\leq |c_۰|\ ||I||_۲ + |c_۱|\ ||A||_۲ + |c_۲|\ ||A^۲||_۲ + \cdots$$

$$\leq |c_۰|\ ||I||_۲ + |c_۱|\ ||A||_۲ + |c_۲|\ ||A||_۲^۲ + |c_۳|\ ||A||_۲^۳ + \cdots$$

آخرین سری سمت راست رابطه (۱-۳) یک سری توانی معمولی است که برای همه ماتریس‌های $A_{n\times n}$ با $||A||_۲ < \mathrm{R}$ همگرا است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $f(A)$ می‌تواند به صورت سری ماتریس نمایش داده شود، اگر $||A||_۲$ در ناحیه همگرایی سری اسکالر (۱-۱) قرار گیرد.

اکنون با این توضیحات می‌توانیم به سطح کمی پیشرفته‌تر بپردازیم. سری‌های تشکیل دهنده $f(A)$ همگرا می‌باشند، اگر همه مقادیر ویژه ماتریس A در ناحیه همگرایی(۱-۱) قرار گیرند یعنی اگر $|\lambda_\kappa| < \mathrm{R}$ باشد آنگاه $f(A)$ همگرا است. اما اگرحتی یکی از مقادیر ویژه ماتریس A خارج از قرص $|z| < \mathrm{R}$ قرار گیرند، آنگاه $f(A)$ واگرا است. (λ_k ، مقدار ویژه ماتریس A، $۱ \leq \mathrm{k} \leq n$ می‌باشد).

در تعریفمان از $f(A)$ نیاز است، تابع $f(z)$ در قرص‌هایی که در مبدأ قرار گرفته‌اند، تحلیلی باشد.

(برای اینکه $f(z)$ بسط تیلور داشته باشد)، در روش ذکر شده، بررسی‌ها به تابع‌های خوش رفتار محدود می‌شود. این باعث می‌شود که تعدادی از تابع‌های جالب توجه، مانند

$$f(z) = \ln z \quad \text{و} \quad f(z) = z^{\frac{1}{n}} \quad (n > 1)$$

که هر دوی آنها در $\text{z} = 0$ داری نقطه شاخه‌ای می‌باشند، کنار گذاشته شوند. اگر چه در این روش مورد بررسی قرار نمی‌گیرند، اما نظریه‌های تابع ماتریسی برای این گونه توابع با پیچیدگی‌های بیشتر، مواجه است. پس بصورت خلاصه در روش فوق الذکر گفته شد که اگر تابع اسکالر $f(z)$ دارای سری تیلوری باشد که در قرص $|z| < \text{R}$ که شامل مقادیر ویژه A نیز می‌باشد، همگرا باشد، آنگاه $f(A)$ می‌تواند با جایگزینی ماتریس A به جای متغیر z در فرمول $f(z)$ محاسبه شود.

اگرچه روش جایگزینی مستقیم برای تابع‌های گویا (و دیگر تابع های ساده) به خوبی جواب می‌دهد، اما

برای محاسبه تابع‌های متعالی مانند $\sin(A)$ و $\cos(A)$ و (توابع نمایی و مثلثاتی) نمی‌تواند به ما کمک کند. در عین حال محاسبه تابع ماتریسی وقتی تابع f یک تابع متعالی باشد، می‌تواند فوق العاده جالب باشد. با بسیاری از تابع‌های مقدماتی که روی صفحه اعداد مختلط همگرا هستند و دارای بسط تیلور

می‌باشند، آشنا هستیم. برای مثال برای هر ماتریس A، $n \times n$ می‌توان نوشت

$$e^A = I + \sum_{k=۱}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

$$\cos(A) = I + \sum_{k=۱}^{\infty} (-۱)^k \ \frac{A^k}{\left(۲k\right)!}$$

$$\sin(A) = I + \sum_{k=۱}^{\infty} (-۱)^{k-۱} \ \frac{A^{۲k-۱}}{\left(۲k-۱\right)!}$$

همچنین با تعریف اسامی ذکر شده در بالا می‌توان تأیید کرد بسیاری از اتحادها برای متغیرz، برای یک متغیر ماتریسی نیز این اتحادها برقرار هستند. برای مثال اتحاد اویلر $\mathrm{e}^{\mathrm{i}A} = \cos(A) + \mathrm{i}\sin(A)$ که برای متغیر ماتریسی A، $n \times n$ معتبر است.

در نهایت اگرچه نمایش سری تیلور برای معرفی ایده تابع ماتریسی، نمایشی مناسب است و همچنین نتایج بسیاری از تحلیل‌های مقدماتی از سری نمایی $f(A)$ حاصل می‌شود، اما استفاده مستقیم از سری تیلور یک روش کند و دارای اشتباه برای محاسبه$f(A)$ می‌باشد. از سوی دیگر همان گونه که اشاره شد، روش استفاده ازسری تیلور و بدنبال آن جایگزینی مستقیم ماتریسA، به جای متغیر مختلط z در تابع$f(z)$ به توابع خوش رفتار (گویا) محدود می‌شود و در واقع یک نظریه کلی برای محاسبه تابع ماتریسی می‌باشند،