بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه شهید بهشتی
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

رساله دکتری ریاضی محض

با عنوان

ضربگر، پوشش و حاصلضرب تانسوری ناآبلی جبرهای لی

نگارش:

بهروز عدالت زاده

استاد راهنما:

دکتر علیرضا سالمکار

استاد مشاور:

دکتر مسعود طوسی

خرداد ۱۳۸۹

تاریخ ....

شماره ....

پیوست...........................

دانشگاه شهید بهشتی

«بسمه تعالی»

«صورتجلسه دفاع از پایان نامه دانشجویان دوره دکتری»

تهران ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳ اوین
تلفن: ۲۹۹۰۱

بازگشت به مجوز دفاع شماره ۱۰۶۶/۱۰۰/۰/د مورخ ۸۹/۳/۱۹ جلسه هیأت داوران ارزیابی پایان‌نامه آقای **بهروز عدالت‌زاده** به شماره شناسنامه: **۲۰۶۹۵** صادره از : **شهرضا** متولد: **۱۳۵۸** دانشجوی دوره دکتری ریاضی

با عنوان:

ضربگر، پوشش و ضرب تانسوری ناآبلی جبرهای لی

به راهنمایی: آقای دکتر علیرضا سالمکار

طبق دعوت قبلی در تاریخ **۸۹/۳/۵** تشکیل گردید و بر اساس رأی هیأت داوری و با عنایت به ماده ۲۰ آئین نامه دکتری مورخ ۷۵/۱۰/۲۵ پایان نامه مزبور با نمرهٔ ۱۹/۵۰ (نوزده و نیم) و درجه عالی مورد تصویب قرار گرفت.

	مرتبه علمی	نام دانشگاه	امضاء
۱. **استاد راهنما:** آقای دکتر علیرضا سالمکار	دانشیار	شهید بهشتی	سالمکار
۲. **استاد مشاور:** آقای دکتر مسعود طوسی	استاد	شهید بهشتی	طوسی
۳. **استاد داور:** آقای دکتر محمدرضا رجب‌زاده‌مقدم	استاد	فردوسی مشهد	
۴. **استاد داور:** آقای دکتر محمدرضا درفشه	استاد	تهران	
۵. **استاد داور:** آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی	استاد	شهید بهشتی	ابراهیمی
۶. **مدیر گروه:** آقای دکتر سهرابعلی یوسفی	دانشیار	شهید بهشتی	
۷. **نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه:** آقای دکتر حسین حاجی ابوالحسن			حاجی ابوالحسن

تقدیم به همسر عزیزم

که وجودش برایم همه آرامش و امید است

تشکر قدردانی

سپاس و ستایش معبود یگانه را که پرتو الطاف بی‌شمارش بر لحظه لحظه‌ی زندگیم ساطع و آشکار است. حمد و ثنا می‌گزارم او را که فکرت و اندیشه را در بستر روحم روان ساخت و بهره‌گیری از خوان گسترده دانش اساتیدم را نصیب و روزی‌ام گردانید.

امتنان و سپاس می‌گزارم تلاش‌ها، زحمات و راهنمایی‌های حکیمانه، ارزشمند استاد فرزانه و گرانمایه‌ام، جناب آقای دکتر علیرضا سالمکار را که با حمیت و جدیت مرا به درک و تعمق وا می‌داشت. همچنین، نهایت تشکر را و قدردانی را از دکتر مسعود طوسی که مشاوره اینجانب را بر عهده داشتند دارم. از اساتید ارجمند، دکتر مهدی ابراهیمی، دکتر محمدرضا رجب‌زاده مقدم و دکتر محمدرضا درفشه که مطالعه و داوری این رساله را به‌عهده داشتند کمال سپاس را دارم.

در پایان از همسر، خانواده و دوستانم، بخصوص دکتر محمدزاده که در طول مدت تدوین این رساله محبت‌ها و مساعدت‌های زیادی به اینجانب داشتند کمال تشکر و قدردانی را دارم و امیدوام همواره شاهد موفقیت‌های آنها باشم.

بهروز عدالت‌زاده

بهار ۱۳۸۹

فهرست مطالب

فهرست علائم و اختصارها

معنای علامت	علامت	شماره‌ی صفحه
بُعد L	$\dim(L)$	۲
زیرجبر تولید شده توسط مجموعه X	$< X >$	۵
تابعگون لی	$\mathcal{L}(-)$	۶
حاصل‌جمع نیم‌مستقیم L_1 و L_2	$L_1 \rtimes L_2$	۶
مرکز جبر لی L	$Z(L)$	۸
مجموعه‌ی همه‌ی درونریختی‌های L	$\mathrm{Aut}(L)$	۵
جبر همه‌ی مشتق‌گیری‌های L	$Der(L)$	۳
n امین مولفه‌ی سری مرکزی بالایی L	$Z_n(L)$	۸
n امین مولفه‌ی سری مرکزی پایینی L	$\gamma_n(L) = L^n$	۸
n امین مولفه‌ی سری مشتق L	$L^{(n)}$	۸
ضربگر شور وضربگر پوچتوان L	$\mathcal{M}^{(c)}(L)$ و $\mathcal{M}(L)$	۴۱ و ۷۶
کلاس‌پوچتوانی جبر لی L	$cl(L)$	۸
طول حل‌پذیری جبر لی L	$\ell(L)$	۸
زیرجبر و ایدآل فراتینی جبر لی L	$\phi(L)$ و $\Phi(L)$	۱۰ و ۱۱
جبرلی هایزنبرگ از بعد $2n+1$	$H(n)$	۳
جبرتانسوری V	TV	۱۵
جبر پوششی جهانی L	UL	۱۶
L ایزوکلینیک با K	$L \sim K$	۴۷
جبر لی آزاد روی مجموعه X	L_X	۱۲
آبلی شده جبر لی L	$L^{ab} = L/L^2$	۲۷
nـامین گروه همولوژی و کوهمولوژی L	$H^n(L)$ و $H_n(L)$	۲۵
ضرب تانسوری ناآبلی جبرهای لی L و K	$L \otimes K$	۶۰
ضرب خارجی ناآبلی جبرهای لی L و K	$L \wedge K$	۴۴

چکیده

همولوژی و کوهمولوژی جبرهای لی یکی از اساسی‌ترین ابزارها در مطالعه‌ی گروه‌ها و جبرهای لی می‌باشد. در این میان دومین گروه همولوژی یک جبر لی موسوم به ضربگر شور از خواص ویژه‌ای برخوردار است. در این رساله برای مطالعه ضربگر شور جبرهای لی ابزارها و مفاهیمی مرتبط چون پوشش‌ها، ضرب تانسوری ناآبلی و ضربگر پوچتوان جبرهای لی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. همچنین برخی کران‌ها برای بعد و کلاس پوچتوانی دو جبر لی پوچتوان ارائه خواهد شد. سرانجام، مفهوم ضربگر پوچتوان جبر یک لی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: همولوژی و کوهمولوژی، جبر لی، ضربگر شور، پوشش، ضرب تانسوری ناآبلی، ضربگر پوچتوان.

مقدمه

ضربگر شور و گروه‌های پوششی اولین بار توسط شور [1] در سال ۱۹۰۴ در هنگام مطالعه‌ی نمایش‌های پروژکتیو یک گروه معرفی شد. شور دریافته بود که یک تناظر یک به یک بین نمایش‌های پروژکتیو تحویل‌ناپذیر گروه $G = F/R$ و عناصر گروه خارج قسمتی $(F' \cap R)/[F, R]$ وجود دارد. او نشان داد که این گروه مستقل از انتخاب نمایش آزاد برای G بوده و آن را به خاطر ضریبی که در حین محاسبات نقش تعیین کننده‌ای داشت، ضربگر شور نامید. در سال ۱۹۴۵ آیلینبرگ و مک‌لین [2] هنگام مطالعه‌ی گروه‌های کوهمولوژی فضاهای توپولوژیک، به ارتباط بین گروه بنیادی فضا و گروه‌های کوهمولوژی آن پی بردند و این یافته نقطه‌ی آغاز کوهمولوژی گروه‌ها شد. آنها همچنین ارتباط بین دومین گروه کوهمولوژی، ضربگر شور و توسیع‌های آبلی یک گروه را بیان کردند. در همان زمان هاف [3] با استفاده از تعاریف مستقل، همولوژی و کوهمولوژی گروه‌ها را مشابه با تعاریف جبری امروزی معرفی نمود و به بیان دومین گروه همولوژی که همان ضربگر شور بود پرداخت. در سال ۱۹۷۳ جونز [4] به بیان جدیدی برای ضربگر شور دست یافت. او دریافت که در یک توسیع مرکزی بیشین از گروه G، همیشه اولین درایه با ضربگر شور گروه یکریخت است. تاکنون کاربردهای متعددی از ضربگر شور در قسمت‌های مختلف جبری مشاهده شده است که مهمترین آنها کاربرد ضربگر شور در دسته‌بندی گروه‌های ساده متناهی می‌باشد.

کوهمولوژی جبرهای لی اولین بار در سال ۱۹۴۸ توسط شوالیه[5] و آیلینبرگ معرفی گردید. هدف آن‌ها محاسبه گروه‌های کوهمولوژی یک گروه لی فشرده (از دیدگاه توپولوژیکی) با استفاده از جبر لی وابسته به آن بود. آن‌ها ایده خود برای این کار را از مقاله کارتان[6] و درام[7] در سال ۱۹۲۸، که در مورد ارتباط گروه‌های کوهمولوژی یک گروه لی و جبر لی وابسته به آن بود، اتخاذ کرده بودند. اما گروه‌های همولوژی جبرهای لی به‌خصوص دومین گروه همولوژی خواصی مشابه نظریش درگروه‌ها را داشت که شاگردان استیتزینگر[8] را به مطالعه آن وا داشت. آنها نام ضربگر شور را به‌خاطر این شباهات برای دومین گروه همولوژی و کوهومولوژی اتخاذ کردند و نتیجه‌ای مشابه کار جونز درگروه‌ها را برای ضربگر شور به انجام رساندند. یکی ازکهن‌ترین و در عین حال اساسی‌ترین مسائل در جبرهای لی دسته‌بندی جبرهای لی پوچتوان از بعد کمتر از ۱۰ می‌باشد. استیتزینگر و شاگردانش با استفاده از ضربگر شور سعی در حمله به این مساله نمودند. الیس

1) I. Schur 2) Eilenberg - Mac Lane 3) Hopf 4) Jones 5) Chevalley 6) Cartan
7) De Rham 8) Stitzinger

[9] پس از معرفی ضرب تانسوری و خارجی ناآبلی موفق به ارائه رویکردی جدید برای محاسبه‌ی ضربگر شور یک جبر لی با این ابزارها گردید.

مطالعات گروهی اینجانب در زمینه ضربگر شور و ضرب تانسوری ناآبلی جبرهای لی در نهایت منجر به ارائه‌ی سه مقاله‌ی مشترک [36]، [35] و [34] گردیده است که به ترتیب در فصل‌های سه تا پنج این رساله آورده شده است. این رساله مشتمل بر پنج فصل می‌باشد.

در فصل اول، تعاریف و قضایای مورد نیاز از جبرهای لی برای مطالعه این رساله گردآوری شده است. این فصل مشتمل بر پنج بخش می‌باشد. پس از ارائه بعضی تعاریف و نتایج مقدماتی درباره‌ی جبرهای لی، مطالبی درباره‌ی زیرجبر فراتینی، جبر لی آزاد، و جبر پوششی جهانی یک جبر لی ارائه می‌شود. بخش نهایی این فصل مربوط به محاسبه‌ی برخی نتایج این فصل در جبرهای لی به‌وسیله‌ی نرم‌افزار GAP می‌باشد.

در فصل دوم، مقدمات همولوژیکی این رساله که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد آورده شده است. در بخش پایانی این فصل گذری کوتاه بر مفهوم ضربگر شور و جبرهای پوششی خواهیم داشت و ارتباط آن‌را با مفهوم همولوژی جبرهای لی بیان می‌کنیم. این قسمت ایده‌ی ما را برای ادامه راه رقم می‌زند.

تعیین ساختار و خواص پوشش‌های جبرهای لی آبلی و هایزنبرگ از اولین نتایج بدست آمده درباره‌ی پوشش‌های جبرهای لی، توسط مانیهن و بتن در مراجع [30] و [6] می‌باشد. با روش‌هایی متفاوت، الیس نشان داد مربع تانسوری جبرهای لی کامل، یک پوشش جهانی برای آن جبر لی می‌باشد. در فصل سوم، پس از معرفی توسیع‌های تحویل‌ناپذیر و اولیه، برخی دیگر از خواص پوشش‌های جبرهای لی کامل را به‌دست می‌آوریم. در نهایت ارتباط بین توسیع‌های تحویل‌ناپذیر و پوشش‌های تنه‌ای در جبرهای لی کامل را به‌دست می‌آوریم.

الیس در سال ۱۹۹۱ مفهوم ضرب تانسوری ناآبلی جبرهای لی را با ایده‌ای مشابه در نظریه‌ی گروه‌ها معرفی و برخی خواص اولیه و فانکتوری آن‌را بیان نمود. در فصل چهارم، پس از معرفی ضرب تانسوری ناآبلی جبرهای لی و ارائه‌ی برخی نتایج بیان شده در [12] به بررسی خواص پوچتوانی و حل‌پذیری ضرب تانسوری ناآبلی بر اساس جبرهای سازنده آن می‌پردازیم وکران‌هایی برای طول حل‌پذیری و رده‌ی پوچتوانی آن ارائه می‌دهیم. همچنین در این فصل به ارائه برخی کران‌های بالا و پایین برای بعد ضرب تانسوری ناآبلی

9) Ellis

$L \otimes K$ در حالتی که L و K از بعد متناهی هستند، می‌پردازیم.

در فصل پنجم، مفهوم ضربگر پوچتوان جبر لی L را که با $\mathcal{M}^{(c)}(L)$ نشان می‌دهیم معرفی می‌کنیم و برخی کران‌ها و نامساوی‌ها برای بُعد آن ارائه می‌دهیم. به کمک نتایج این فصل به ارائه کران‌هایی برای زیرجبر مشتق و ضربگر شور یک جبر لی پوچتوان خواهیم پرداخت.

فصل اول

مقدمات و پیشنیازها

در این فصل، تعاریف و قضایای مورد نیاز برای مطالعه‌ی این رساله گردآوری شده است. این فصل مشتمل بر پنج بخش می‌باشد. در بخش اول، بعضی تعاریف و نتایج مقدماتی درباره‌ی جبرهای لی آورده شده است. در بخش دوم، زیرجبر فراتینی جبرهای لی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش سوم، مفهوم جبر لی آزاد را یادآوری کرده و بعضی نتایج آن را بیان نموده‌ایم. در بخش چهارم، جبر پوششی جهانی یک جبر لی را با یک روش ساختاری بیان می‌کنیم. بخش نهایی این فصل مربوط به محاسبه‌ی برخی نتایج این فصل در جبرهای لی به‌وسیله‌ی نرم‌افزار GAP می‌باشد.

۱-۱ تعاریف و نتایج مقدماتی

در این بخش، گذری کوتاه بر برخی تعاریف و نتایج اولیه‌ی جبرهای لی خواهیم داشت که در بخش‌های آتی مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای به‌دست آوردن اطلاعات بیشتر و یافتن برهان قضایا این بخش می‌توانید به مراجع [16]، [19] و [21] مراجعه کنید. در ابتدا به تعریف جبر لی و ارائه‌ی مثال‌هایی از آن می‌پردازیم.

تعریف ۱-۱-۱ فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان k باشد. در این صورت نگاشت: $f: V \times V \to V$ یک **تبدیل دوخطی** نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x, y, z \in V$ و $a, b \in k$،

الف) $f(ax + by, z) = af(x, z) + bf(y, z)$،

ب) $f(x, ay + bz) = af(x, y) + bf(x, z)$.

تعریف ۱-۱-۲ فرض کنید A یک فضای برداری روی میدان k باشد. در این صورت، هرگاه نگاشتی دوخطی مانند f روی A تعریف شده باشد A یک **جبر روی** k یا به اختصار یک جبر نامیده می‌شود. هرگاه تردیدی درمورد f وجود نداشته باشد، به اختصار $f(a, b)$ را با ab نشان داده و به آن ضرب دو عضو a و b می‌گوییم. A را یک **جبر شرکت‌پذیر** نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $a, b, c \in A$، $(ab)c = a(bc)$.

تعریف ۱-۱-۳ فرض کنید L یک فضای برداری با نگاشت دوخطی $[-,-] : L \times L \to L$ باشد. در این صورت L یک **جبر لی** نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y, z \in L$،

الف) $[x, y] = -[y, x]$ (پادتقارنی)،

ب) $J(x, y, z) := [[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ (اتحاد ژاکوبی).

$[x, y]$ را **حاصلضرب لی** (یا جابجاگر) x و y می‌نامیم. از قسمت (الف)، به سادگی می‌توان دید که اگر مشخصه میدان k مساوی ۲ نباشد، آنگاه به ازای هر $x \in L$، $[x, x] = 0$. جبر لی L **از بعد متناهی** نامیده می‌شود هرگاه L به عنوان فضای برداری از بعد متناهی باشد.

مثال ۱-۱-۴ فرض کنید A یک جبر شرکت‌پذیر باشد. اگر به ازای هر $a, b \in A$، قرار دهیم

$$[a, b] = ab - ba,$$

به سادگی بررسی می‌شود که A همراه با این ضرب دارای ساختار جبر لی می‌باشد. آدو[1] نشان داد که هر

1) Ado

جبر لی روی میدانی از مشخصه‌ی صفر را می‌توان به عنوان زیرجبری از چنین جبر لی‌ای در نظر گرفت. ایوازاوا[۲] نتیجه‌ی مشابه را برای جبرهای لی که روی میدان‌های با مشخصه‌ی ناصفر تعریف شده‌اند، ثابت نمود.

مثال ۱-۱-۵ (الف) فرض کنید $\mathfrak{gl}(n,k)$ فضای ماتریس‌های $n \times n$ روی میدان k باشد. به ازای هر $A, B \in \mathfrak{gl}(n,k)$، حاصلضرب لی این دو عضو را به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$[A,B] = AB - BA.$$

بنابر مثال قبل، $\mathfrak{gl}(n,k)$، همراه ضرب فوق دارای ساختار جبر لی روی میدان k می‌باشد.
(ب) فرض کنید V یک فضای برداری روی میدان k باشد. $\mathfrak{gl}(V)$، مجموعه‌ی تبدیلات خطی از V به V، با ضرب زیر دارای ساختار جبر لی است:

$$[f,g] = f \circ g - g \circ f \qquad f,g \in \mathfrak{gl}(V).$$

(ج) فرض کنید L یک جبر لی باشد. در این صورت تبدیل خطی $f : L \to L$ یک **مشتق‌گیری** از L نامیده می‌شود هرگاه برای هر $x, y \in L$، $f([x,y]) = [x, f(y)] - [f(y), x]$. برای هر $x \in L$ مشتق‌گیری $\mathrm{ad}x$ با ضابطه‌ی

$$\mathrm{ad}x(y) = [x,y] \qquad y \in L$$

یک **مشتق‌گیری داخلی** نامیده می‌شود. فضای برداری همه‌ی مشتق‌گیری‌ها و مشتق‌گیری‌های داخلی L را به ترتیب با $Der(L)$ و $\mathrm{Ad}(L)$ نشان می‌دهیم. این دو فضا با ضربی مشابه قسمت (ب) دارای ساختار جبر لی هستند.

مثال ۱-۱-۶ الف) فضای برداری $\mathbb{R}^3$ را در نظر بگیرید. به سادگی بررسی می‌شود که $\mathbb{R}^3$ همراه با ضرب تعریف شده‌ی زیر دارای ساختار جبر لی می‌باشد: به ازای هر $X = (x_1, x_2, x_3)$ و هر $Y = (y_1, y_2, y_3)$ در $\mathbb{R}^3$،

$$[X,Y] = X \times Y = (x_2y_3 - x_3y_2,\ x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)\ ,$$

2) Evazava

که در آن $X \times Y$ همان ضرب خارجی دو بردار X و Y می‌باشد.

ب) فضای برداری حقیقی $H(n)$ از بعد $2n+1$ با پایه‌ی $\{x_i, y_i, z\ ,\ 1 \leq i \leq n\}$ که ضرب لی روی اعضای پایه‌ی آن به صورت $[x_i, y_j] = \delta_{ij} z$ تعریف می‌شود، **جبر لی هایزنبرگ** نامیده می‌شود. δ_{ij}دلتای کرونکر می‌باشد. به سادگی می‌توان دید که $H(n)$ زیرفضای $\mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R})$ است که توسط عناصری به صورت زیر پدید می‌آید:

$$H(n) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n & z \\ 0 & \cdots & 0 & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & y_n \end{bmatrix} : x_i, y_i, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

تعریف ۱-۱-۷ فرض کنید L یک جبر لی از بعد متناهی روی میدان k با پایه‌ی $\beta = \{x_1, \ldots, x_n\}$ باشد. به ازای هر $1 \leq i, j \leq n$ اسکالرهایی مانند $a_{ij}^l \in k$ وجود دارند به‌طوری که

$$[x_i, x_j] = \sum_{l=1}^{n} a_{ij}^l x_k$$

مجموعه‌ی اسکالرهای a_{ij}^l ، **ثابت‌های ساختاری** برای L نسبت به پایه‌ی β نامیده می‌شوند. این اسکالرها وابسته به انتخاب پایه β می‌باشند و بنابر خطی بودن ضرب لی، برای مشخص نمودن ساختار ضرب در L، تنها کافی است مقادیر a_{ij}^l ها معلوم شوند. با توجه به شرایط $[x_i, x_i] = 0$ و $[x_i, x_j] = -[x_j, x_i]$ در جبرهای لی، کافی است این ثابت‌ها را به ازای $1 \leq i < j \leq n$ مشخص نمود.

تعریف ۱-۱-۸ فرض کنید L یک جبر لی روی میدان k باشد. در این صورت

(الف) زیرفضای $H \subseteq L$ را **زیرجبر لی** از L نامیده و با نماد $H \leq L$ نشان داده می‌شود هرگاه H با ضرب القا شده از L دارای ساختار جبر لی باشد. زیرجبر Iرا **ایدآل** L نامیده و با $I \trianglelefteq L$ نشان می‌دهیم هرگاه به ازای هر $x \in I$ و $y \in L$، $[x, y] \in I$. اگر Iایدآلی از L باشد جبر لی **خارج‌قسمتی** L/I با ضرب لی

$$[x+I, y+I] = [x, y] + I \qquad x, y \in L,$$

تعریف می‌شود. اگر I یک ایدآل از جبر لیL باشد آنگاه تناظری دوسویی بین ایدآل های L/I و ایدآل‌هایی ازL وجود دارد، به‌طوری که شامل I هستند.

جبر لی L **ساده** نامیده می‌شود، هرگاه تنها ایدآل‌های آن $\{0\}$ و L باشند.

(ب) با توجه به تعریف، هر ایدآل L زیرجبری از L است که توسط هر مشتق‌گیری الحاقی L پایا باشد. زیرجبر I از L را یک **ایدآل مشخصه** نامیده و با نماد $I \trianglelefteq^c L$ نشان می‌دهیم، هرگاه تحت هر مشتق‌گیری از L پایا باشد.

(ج) اگر $X \subseteq L$، آنگاه اشتراک تمام زیرجبرهای L که شامل X هستند را **زیرجبر تولید شده توسط** X نامیده و با نماد $\langle X\rangle$ نشان می‌دهیم. درواقع $\langle X\rangle$، کوچک‌ترین زیرجبر از L شامل X است. این زیرجبر شامل تمام اعضای L است که با استفاده از دنباله‌های متناهی از عمل‌های فضای برداری و حاصل‌ضرب‌های لی روی اعضای X به‌دست می‌آیند.

(د) زیرمجموعه‌ی X یک **مجموعه‌ی مولد** برای L نامیده می‌شود هرگاه $L = \langle X\rangle$. جبر لی L با **تولید متناهی** نامیده می‌شود هرگاه X مجموعه‌ای متناهی باشد. هرگاه X یک مجموعه‌ی مولد برای L با کمترین عدد اصلی باشد، آنگاه $\mathrm{Card}(X)$ را **تعداد مولد کمین** L نامیده و با $d(L)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱-۱-۹ (الف) اگر $\mathfrak{b}(n,k)$ و $\mathfrak{n}(n,k)$ به ترتیب فضای ماتریس‌های بالامثلثی و بالامثلثی اکید باشند آنگاه زیرجبرهایی از $\mathfrak{gl}(n,k)$ می‌باشند.

(ب) $\mathfrak{sl}(n,k)$، متشکل از همه‌ی ماتریس‌های با اثر صفر **جبرخطی خاص** نامیده می‌شود. می‌توان دید که هرگاه k میدانی با مشخصه‌ی ناصفر باشد آنگاه به ازای هر $n \geq 2$، $\mathfrak{sl}(n,k)$ یک جبر لی ساده است.

تعریف ۱-۱-۱۰ فرض کنید L_1 و L_2 دو جبر لی باشند. در این صورت همریختی k- مدولی $\varphi : L_1 \to L_2$ یک همریختی (لی) نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $x, y \in L_1$،

$$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]\,.$$

(توجه شود که در تساوی بالا، براکت سمت چپ در L_1 وبراکت دوم در L_2 در نظر گرفته شده است.) همریختی φ یکریختی نامیده می‌شود هرگاه دوسویی باشد. گروه همه‌ی یکریختی‌های L را با $\mathrm{Aut}(L)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۱-۱-۱۱ فرض کنیم A یک جبر شرکتپذیر روی میدان k باشد. در این صورت بنا به مثال ۱-۱-۴، A با تعریف زیر دارای ساختار جبر لی می‌باشد:

$$[x,y] = xy - yx \quad , \quad x, y \in A.$$

جبر لی با این ساختار را با $\mathcal{L}A$ نشان می‌دهیم. $\mathcal{L}$ را می‌توان به عنوان یک تابعگون از جبرهای شرکتپذیر به جبرهای لی در نظرگرفت؛ به این صورت که به ازای هر همریختی جبرهای شرکتپذیر f ، همریختی لی $\mathcal{L}f$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{L}f([x, y]) = f(xy - yx).$$

نکته ۱-۱-۱۲ به آسانی دیده می‌شود که اگر φ یک همریختی باشد، هسته‌ی φ، $\ker\varphi$، یک ایدآل از $L_۱$و برد φ، $\operatorname{Im}\varphi$، یک زیرجبر لی $L_۲$ می‌باشند. برای هر ایدآل I در L، همریختی $\pi : L \to L/I$ با ضابطه‌ی $\varphi(x) = x + I$ **بروریختی طبیعی** نامیده می‌شود.

قضیه ۱-۱-۱۳ (قضایای یکریختی) الف) اگر $\varphi : L_۱ \to L_۲$ یک همریختی جبرهای لی باشد آنگاه

$$\frac{L_۱}{\ker\varphi} \cong \operatorname{Im}\varphi.$$

ب) اگر I, J ایدآل‌هایی از جبر لیL باشند آنگاه

$$\frac{I + J}{J} \cong \frac{I}{I \cap J}.$$

ج) اگر I, J ایدآل‌هایی از جبر لیL باشند به طوری که $I \subseteq J$ آنگاه $\frac{J}{I}$ ایدآلی از $\frac{L}{I}$ است و

$$\frac{L/I}{J/I} \cong \frac{L}{J}.$$

تعریف ۱-۱-۱۴ (الف) اگرH وK دو زیر جبر از جبر لی L باشند، آنگاه

$$H + K = \langle h + k | h \in H, k \in K\rangle,$$

$$[H, K] = \langle\ [h, k] | h \in H, k \in K\ \rangle,$$

زیرجبرهایی از L می‌باشند که به ترتیب **مجموع** و **زیرجبر جابجاگر** H وK نامیده می‌شوند.

(ب) **حاصل‌جمع مستقیم** جبرهای لی$L_۱$ و $L_۲$ راکه با $L_۱ \oplus L_۲$ نشان می‌دهیم فضای

$$L_۱ \oplus L_۲ = \{(l_۱, l_۲) \mid l_۱ \in L_۱, l_۲ \in L_۲\},$$

همراه با عمل ضرب زیر می‌باشد:

$$[(l_1, l_2), (l_3, l_4)] = ([l_1, l_3], [l_2, l_4]) \qquad l_1, l_3 \in L_1, l_2, l_4 \in L_2.$$

(ج) فرض کنید $f : L_1 \to Der(L_2)$ یک همریختی لی باشد. حاصل‌جمع نیم‌مستقیم جبرهای لی L_1 و L_2 فضای

$$L_1 \ltimes L_2 = \{(l_1, l_2) \mid l_1 \in L_1, l_2 \in L_2\},$$

است که با عمل ضرب لی زیر درنظر گرفته شود:

$$[(l_1, l_2), (l_3, l_4)] = ([l_1, l_3] + f(l_1)(l_4) - f(l_3)(l_2), [l_2, l_4]) \qquad l_1, l_3 \in L_1, l_2, l_4 \in L_2.$$

قضیه ۱-۱-۱۵ الف) فرض کنید L_1 و L_2 دو جبرلی باشند. در این صورت

$$[L_1 \oplus L_2, L_1 \oplus L_2] = [L_1, L_1] \oplus [L_2, L_2].$$

ب) اگر M و H، به ترتیب، ایدآل و زیرجبری از L باشند به‌طوری که $L = M + H$ و $[M, L] = 0$، آنگاه $[L, L] = [H, H]$

تعریف ۱-۱-۱۶ فرض کنید $x_1, \ldots, x_n \in L$، در این صورت

$$[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n],$$

جابجاگر ساده از وزن n نامیده می‌شود. در حالت خاص $[x, \underbrace{y, \ldots, y}_{\text{بار}\ n}]$ را با نماد $[x,_n y]$ نشان می‌دهیم.

اگر $H_1, \ldots, H_n$ زیرجبرهایی از L باشند، آنگاه زیرجبر جابجاگر لی از وزن n به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[H_1, \ldots, H_n] = [[H_1, \ldots, H_{n-1}], H_n]$$

در حالت خاص چنان‌چه $H_1 = X$ و $H_2 = H_3 = \cdots = H_n = Y$ ضرب

$$[X, \underbrace{Y, \ldots, Y}_{\text{بار}\ n}]$$

را با $[X,_n Y]$ یا $\gamma_n(X, Y)$ نشان می‌دهیم.