دانشگاه مازندران

دانشکده علوم پایه

موضوع:

حل معادلات انتگرال فردهلم و ولترا با استفاده از تبدیلات انتگرالی لاپلاس و فوریه و روش موجک ها

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی

گرایش آنالیز عددی

استاد راهنما:

دکتر حسن حسین زاده

استاد مشاور:

دکتر حسین جعفری

نگارش:

سکینه محمدزاده سرستی

شهریور 1389

خدایا به تو پناه می برم از نفسی که در دنیا مسیری ندارد و از قلبی که خاشع نباشد و از دانشی که سود نبخشد، خدایا از تو می خواهم آسانی را بعد از سختی و گشایش بعد از رنج و مشقت.

بر خود لازم می دانم از استاد راهنمای خویش، جناب آقای دکتر حسین زاده که در تمام مراحل از راهنمایی های ارزشمند ایشان بهره مند بودم سپاسگزاری نمایم. همچنین از زحمات بی دریغ استاد مشاورم جناب آقای دکتر جعفری صمیمانه قدردانی می کنم.

در پایان از همه کسانی که مرا در انجام این رساله یاری نمودند سپاسگزاری می نمایم.

سکینه محمدزاده – شهریور ماه ۱۳۸۹

چکیده

در این پایان نامه قصد داریم تبدیلات انتگرالی لاپلاس و فوریه و روش موجک ها را بررسی و کاربرد آنها را بیان کنیم آنگاه معادلات انتگرال فردهلم و ولترا را با استفاده از این روش ها حل کنیم.

تبدیل لاپلاس برای حل معادلات انتگرال و انتگرال–دیفرانسیل نوع پیچشی مورد استفاده قرار می گیرد. در ابتدا تبدیل لاپلاس مسأله را در نظر می گیریم آنگاه جواب با استفاده از معکوس تبدیل لاپلاس بدست می آید همین طور تبدیل فوریه برای حل معادلات انتگرال منفرد نوع پیچشی مورد استفاده قرار می گیرد.

روش موجک ها برای حل معادله انتگرال فردهلم و ولترا بیان می شود. این روش بر مبنای تقریب توسط موجک ها پایه ریزی شده است. استفاده از ویژگی های موجک های لژاندر باعث تحلیل معادله انتگرال به جواب یک دستگاه از معادلات خطی می شود.

کلمات کلیدی :

معادلات انتگرال؛ تبدیلات لاپلاس و فوریه؛ موجک های لژاندر.

فهرست مندرجات

پیشگفتار

معادلات انتگرال به عنوان یکی از شاخه های علم ریاضی است که در بسیاری از مباحث فیزیک، بیولوژی، شیمی و مهندسی ظاهر می شوند.
معادلات انتگرال به دو دسته خطی و غیر خطی تقسیم می شوند که به شرح هر یک خواهیم پرداخت.
البته معادلات انتگرال به عنوان نمایش جواب معادلات دیفرانسیل هم به کار می روند. به طوری که اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر به صورت یک مسأله مقدار مرزی باشد، آنگاه معادله انتگرالی که ظاهر می شود از نوع فردهلم خواهد شد و اگر معادله دیفرانسیل مورد نظر در قالب یک مسأله مقدار اولیه باشد، آنگاه معادله حاصل یک معادله انتگرال ولترا خواهد بود.
بر حسب اینکه معادله انتگرال از چه نوع مسأله ای ظاهر می شود، روش ها و ایده های مختلفی برای تعیین جواب معادله انتگرال به کار برده می شود. ما در این پایان نامه سعی داریم از تبدیلات انتگرالی لاپلاس و فوریه و روش موجکها برای حل معادلات انتگرال استفاده کنیم . این پایان نامه در چهار فصل تنظیم شده است. در فصل اول قضایا و تعاریف پایه مرتبط با موضوع، بحث و بیان می شود.
فصل دوم به دو بخش تقسیم شده است، در بخش اول به معرفی تبدیل لاپلاس و برخی از خواص آن می پردازیم و سپس کاربرد این تبدیل را برای حل معادلات انتگرال بیان می کنیم. تبدیل لاپلاس یکی از ابزار های قدرتمند می باشد که با حداقل محاسبات، دستیابی به جواب واقعی مسأله را امکان پذیر می سازد به همین خاطر برای حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل و دستگاه

معادلات خطی مورد استفاده قرار می گیرد. در بخش دوم ابتدا به تعریف سری فوریه می پردازیم و به دنبال آن انتگرال فوریه و تبدیل فوریه را معرفی می کنیم آنگاه کاربرد این تبدیل را برای حل معادلات انتگرال منفرد بیان می کنیم. البته بیشترین کاربرد تبدیلات فوریه در محاسبات تصویری می باشد به طور مثال در ام آرآی در فیزیک پزشکی اطلاعات امواج ساطع شده از هسته هیدروژن از فرم دامنه فرکانسی به فرم دامنه فضایی جهت ایجاد تصویر نهایی تبدیل فوریه می شوند.

کلمه موجک به معنای «موج کوچک» است که از لغت فرانسوی «آندلیت» گرفته شده و به نوع خاصی از توابع ریاضی اشاره می‌کند، که ویژگی‌های هموار، موضعی و نوسانی بودن را دارا می‌باشد.

قبل ازسال ۱۹۰۳ شاخه اصلی ریاضیات که به موجک منتهی می شد آنالیز فرکانس (آنالیز فوریه) بود که توسط فوریه در سال ۱۸۰۷ ارائه شد که اکنون تحت عنوان تبدیل فوریه به کار می رود. بعد از سال ۱۸۰۷، استفاده از واژه موجک برای اولین بار، در پیوست رساله آلفرد هار در سال ۱۹۰۹ ظاهر شد. آنالیز موجک یکی از دستاورد های نسبتاً جدید و هیجان انگیز ریا ضیات محض که مبتنی بر چندین دهه پژوهش در آنالیز همساز است، امروزه کاربرد های مهمی در بسیاری از رشته های علوم ومهندسی انجام یافته و امکانات جدیدی برای درک جنبه های ریاضی آن و نیز افزایش کابردهایش فراهم شده است.

در آنالیز موجک همانند آنالیز فوریه با بسط تابع ها سروکار داریم ولی این بسط برحسب موجک ها انجام می شود. موجک تابع مشخص مفروضی با میانگین صفر است و بسط بر حسب انتقال ها و اتساع های این تابع انجام می گیرد.

تاکنون موارد کاربرد موجک ها در زمینه های تحلیل سیگنال های گذرایی که سریعاً تغییر می کنند، صدا و سیگنال های صوتی توسط افرادی چون کرونلند، مارلت و گراسمن در سال ۱۹۸۷ و مالات در سال ۱۹۸۹ و آنالیز عددی (تبدیل سریع فوریه) توسط بیلکین و روخلین در سال ۱۹۹۱ وهم چنین در زمینه های فیزیولوژی عصب، مهندسی هسته ای، شیمی و پزشکی انجام پذیرفته است.

تبدیل سریع فوریه یکی از ابزار های بسیار قدرتمند در تحلیل سیگنال ها می باشد که عبارتند از یک الگوریتم ساده سازی شده برای محاسبه تبدیل فوریه. در این اگوریتم به دلیل استفاده از

حداقل محاسبات، سرعت محاسبه افزایش می یابد.
دراین پایان نامه از روش موجک برای حل معادلات انتگرال استفاده می کنیم. برای حل معادله انتگرال فردهلم، ابتدا تقریب های موجک که پایه هایی متعامدند، برای هسته و قسمت ناهمگن انتگرال که توابعی معلوم می باشند و هم چنین برای جواب معادله انتگرال که تابعی نا معلوم است در نظر گرفته و سپس با استفاده از ماتریس های عملیاتی انتگرال و حاصلضرب موجکها که در فصل سوم معرفی می شوند، معادله انتگرال به یک دستگاه معادلات خطی یا غیر خطی تبدیل می شود که با حل آن جواب معادله انتگرال به دست می آید.
در مورد حل معادله انتگرال ولترا، تقریب های موجک تنها برای تابع جواب در نظر گرفته می شود و سپس با استفاده از روش کالوکیشن به دستگاه معادلات خطی تبدیل می شود. با حل آن که به مراتب ساده تر از مسأله اصلی است به جواب معادله دست می یابیم. موجک‌ها به عنوان یک دستگاه متعامد به دلیل قابلیت نمایش توابع درسطوح مختلف تجزیه، جایگاه خاصی را دربین دستگاههای متعامد دیگر به خود اختصاص داده است.
مجموعه های متعامدی را که بیشتر مورد استفاده قرار می گیرند، می توان در سه دسته طبقه‌بندی کرد:
اولین مجموعه شامل توابع پایه‌ای قطعه‌ای ثابت(PCBF) است مانند: توابع والش و بلاک — پالس.
دومین مجموعه عبارت است از مجموعه چندجمله‌ای‌های متعامد مانند: چندجمله‌ای های لاگر، لژاندر و چبیشف .
سومین مجموعه، مجموعه توابع سینوس — کسینوسی می باشد که در سری های فوریه به کار می رود.
چند جمله‌ای های متعامد و توابع سینوس—کسینوسی هر دو یک کلاس از توابع پایه ای پیوسته هستند در حالی که توابع پایه ای قطعه ای ثابت در دامنه تعریف خود دارای ناپیوستگی های ذاتی هستند.
قابل توجه است که اگر یک تابع ناپیوسته توسط یک پایه از توابع پیوسته تقریب زده شود، نتیجه آن

یک تابع پیوسته است و بنابراین این تقریب نمی تواند یک مدل مناسب برای تابع ناپیوسته باشد. از این رو استفاده از توابع پایه‌ای قطعه‌ای ثابت در این موارد بسیار مناسب تر خواهد بود.
در فصل سوم این پایان نامه ما چگونگی ساختن موجک ها، همچنین معرفی موجک لژاندر و ماتریس های عملیاتی انتگرال و حاصلضرب را برای این موجک مطرح می کنیم.
در فصل چهارم نحوه حل معادلات انتگرال با استفاده از موجک ها را بیان نموده و با چند مثال کارائی موجک ها را برای حل معادلات انتگرال نشان داده ایم.

فصل ۱

تعاریف و قضایای پایه

۱—۱ مفاهیم مقدماتی

۱—۱—۱ معادلات انتگرال

یک معادله انتگرال معادله ای است که در آن تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال قرار دارد.
نمونه کلی از یک معادله انتگرال که در آن $u(x)$ تابع مجهولی است که باید معلوم شود به صورت زیر می باشد:

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt. \qquad (۱.۱.۱)$$

$k(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می شود. $\alpha(x)$ و $\beta(x)$ حدود انتگرال هستند. باید توجه کرد که هسته معادله یعنی $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ ازقبل معلوم هستند. هدف ما تعیین تابع مجهول یعنی $u(x)$ است که در رابطه (۱.۱.۱) صدق کند.

اگر تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال خطی باشد یعنی توان یک داشته باشد آنگاه معادله انتگرال خطی است و اگر تابع $u(x)$ در زیر علامت انتگرال با توابعی غیر خطی نظیر $u^۲(x)$ یا $\cos u(x)$ یا $e^{u(x)}$ تعویض شود آنگاه معادله انتگرال را غیر خطی می گویند.
متداول ترین معادلات انتگرال خطی یا غیر خطی را می توان به چهار گروه زیر دسته بندی نمود:

۱) معادلات انتگرال فردهلم

۲) معادلات انتگرال ولترا

۳) معادلات انتگرال—دیفرانسیل

۴) معادلات انتگرال منفرد

اکنون تعاریف معادلات انتگرال خطی را در هر گروه بیان می کنیم.

- **معادلات انتگرال فردهلم**

شکل متعارفی معادلات خطی فردهلم که در آنها حد پایین و حد بالای انتگرال گیری به ترتیب اعداد ثابت a و b هستند به صورت زیر می باشد:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt, \qquad a \le x,t \le b \tag{۲.۱.۱}$$

که در آن هسته معادله انتگرال $k(x,t)$ و تابع $f(x)$ از قبل مشخص هستند. برحسب این که $\phi(x)$ کدامیک از مقادیر زیر را انتخاب کند معادله فوق به دو دسته عمده زیر تقسیم می شود:

۱) زمانی که $\phi(x) = 0$ معادله (۲.۱.۱) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt = 0$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع اول می نامند.

۲) زمانی که $\phi(x) = 1$ معادله (۲.۱.۱) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$u(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)u(t)dt$$

این معادله را معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می گویند.

- **معادلات انتگرال ولترا**

شکل کلی معادلات خطی ولترا که در آنها حداقل یکی از حدود انتگرال گیری به صورت تابعی از x ظاهر می شود به صورت زیر می باشد:

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)u(t)dt \tag{۳.۱.۱}$$

در حالتی که $\phi(x)=0$، معادله انتگرال فوق به معادله انتگرال ولترا نوع اول و اگر $\phi(x)=1$ به معادله انتگرال ولترا نوع دوم تبدیل می شود.

نتیجه ۱.۱ : اگر در معادله انتگرال فردهلم و ولترا نوع دوم، شرط $f(x)=0$ برقرار باشد، آنگاه معادله حاصل را یک معادله انتگرال همگن می نامند در غیر این صورت معادله مورد نظر را یک معادله انتگرال غیر همگن می گویند.

- **معادلات انتگرال—دیفرانسیل**

در این نوع معادلات، تابع مجهول $u(x)$ تحت دو عملگر انتگرال و مشتق گیری می باشد، دو نمونه از معادلات انتگرال—دیفرانسیل فردهلم و ولترا زیر را در نظر می گیریم:

$$u''(x)=f(x)+\int_0^1 k(x,t)u(t)dt \qquad (۴.۱.۱)$$

و

$$u'(x)=f(x)+\int_0^x k(x,t)u(t)dt \qquad (۵.۱.۱)$$

در این گونه معادلات تابع مجهول $u(x)$ در دوطرف ظاهر می شود. در یک طرف زیر نماد انتگرال و در طرف دیگر به عنوان یک مشتق معمولی نمایان می شود.

- **معادلات انتگرال منفرد**

معادله انتگرال از نوع اول

$$f(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt \qquad (۶.۱.۱)$$

یا از نوع دوم

$$u(x) = f(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} k(x,t)u(t)dt \qquad (۷.۱.۱)$$

را که در آنها حد پایین، حد بالا یا هر دوحدود انتگرال گیری نا متناهی باشند، معادله انتگرال منفرد می نامند. به علاوه اگر هسته معادلات انتگرال (٦.۱.۱) و (۷.۱.۱) در یک نقطه یا در نقاط بیشتری از دامنه انتگرالگیری نامتناهی باشد باز هم این گونه معادلات را معادلات انتگرال منفرد می نامند. در زیر دو مثال از معادلات انتگرال منفرد آورده شده است.

$$u(x) = ۱ + x^۲ + \int_{-\infty}^{\infty} (x+t)u(t)dt$$

در مثال فوق حوزه انتگرال گیری نا متناهی است و در

$$u(x) = ۱ - \sqrt{۲} - \int_{\circ}^{x} \frac{۱}{\sqrt{x-t}} u(t)dt$$

که معادله انتگرال آبل نام دارد زمانی که $x \longrightarrow t$، هسته $k(x,t)$ نامتناهی می باشد.

۱—۱—۲ تبدیلات انتگرالی

تعریف ۲.۱ : تبدیلات انتگرالی را می توان به صورت:

$$T[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} k(s,t)f(t)dt = F(s) \qquad (۸.۱.۱)$$

تعریف نمود که $k(s,t)$ به هسته تبدیل معروف است. این معادله به هر تابع ازدسته توابعی که انتگرال پذیرند تابع $F(s)$ را به آن نسبت می دهد.

انتخاب گوناگونی از $k(s,t)$ در این انتگرال، منتهی به تبدیلاتی می شود که با خواص خود در شرایط خاصی مفید واقع می گردند همانند تبدیلات لاپلاس، فوریه، ملین و هانکل .در این بخش به طور مختصر به معرفی این تبدیلات انتگرالی می پردازیم.

- **تبدیل لاپلاس**

تبدیلی که در رابطه (۸.۱.۱) با انتخاب

$$k(s,t)=\begin{cases} 0 & t<0, \\ e^{-st} & t\geq 0. \end{cases}$$

تعریف می شود، تبدیل لاپلاس نام دارد که به صورت زیرمی باشد:

$$L\{f(t)\}=\int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)dt=F(s)$$

و معکوس آن عبارتند از $L^{-1}\{F(s)\}=f(t)$. این تبدیل برای حل بسیاری از معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال مورد استفاده قرار می گیرد.

- **تبدیل فوریه**

$F(\alpha)$ را تبدیل فوریه تابع $f(t)$ می نامیم و با نماد $F\{f(t)\}$ نمایش می دهیم پس:

$$F\{f(t)\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha t} f(t)dt=F(\alpha)$$

تابع $f(t)$ تبدیل فوریه معکوس تابع $F(\alpha)$ گفته و با نماد $F^{-1}\{F(\alpha)\}$ نشان می دهیم. به این ترتیب $F^{-1}\{F(\alpha)\}=f(t)$.
تبدیل فوریه برای حل معادلات انتگرال منفرد که حدود انتگرال گیری در آنها نا متناهی باشد و همچنین برای برخی از انتگرال های ناسره به کار می آید.

- **تبدیل ملین**

تبدیل ملین تابع $f(t)$ را که با نماد $M(s)$ نشان می دهند چنین تعریف می کنیم:

$$M\{f(t)\}=\int_{0}^{\infty} t^{s-1} f(t)dt=M(s)$$

که تبدیل معکوس آن به صورت زیر می باشد:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} M(s)t^{-s}ds$$

که در آن $s = c + it$. اگر چه تبدیل ملین تقریباً همانند تبدیلات لاپلاس و فوریه در مسائل کاربردی استفاده نمی شود اما در محاسبه مجموع برخی از سری ها، پیدا کردن تابع توزیع برای تولید متغیر های تصادفی و یافتن تابع پتانسیل در اشکال مختلف مورد استفاده قرار می گیرد.[۱۹]

- **تبدیل هانکل**

تبدیل هانکل از مرتبه v از تابع $f(t)$ را که با نماد $H_v(r)$ نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می شود:

$$H_v(r) = \int_0^\infty f(t)J_v(rt)tdt, \quad v \geq \frac{1}{2}.$$

و معکوس آن به صورت زیر است:

$$f(t) = \int_0^\infty H_v(r)J_v(rt)tdt.$$

تبدیل هانکل برای مسائلی که توابع بسل دخالت دارند مناسب است.

۱—۱—۳ تابع گاما

یکی از توابع پایه، تابع گامای اویلر$\Gamma(z)$ است، که در سال ۱۷۲۹ توسط اویلر (۱۷۸۳—۱۷۰۷) ارائه شده است.

تابع گاما $\Gamma(z)$، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt, \tag{۹.۱.۱}$$

- **خواص تابع گاما**

یکی از خواص ساده اما مهم تابع گاما چنین است:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{10.1.1}$$

این خاصیت با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء اثبات می شود:

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty e^{-t}t^z dt = \left[-e^{-t}t^z\right]_{t=0}^{t=\infty} + z\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt = z\Gamma(z)\,.$$

به وضوح $\Gamma(1) = 1$ است و برای $z = 1, 2, 3, \ldots$ با استفاده از(۹.۱.۱) داریم:

$$\Gamma(2) = 1.\,\Gamma(1) = 1!\,,$$

$$\Gamma(3) = 2.\,\Gamma(2) = 2.1! = 2!\,,$$

$$\vdots$$

$$\Gamma(n+1) = n.\,\Gamma(n) = n.(n-1)! = n!\,.$$

برخی از خواص تابع گاما به صورت زیر فهرست می شود:

$$\begin{aligned}
&\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+k)}{z(z+1)...(z+k-1)} \qquad k = 1, 2, ..., \quad .\\
&\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \qquad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\\
&\Gamma(mz) = \frac{2^{mz-1}}{(2\pi)^{\frac{(m-1)}{2}}}\prod_{k=0}^{m-1}\Gamma(z+\frac{k}{m}), \qquad z \in C, m \in N - \{1\}\\
&\Gamma(n+1) \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}, \qquad n \to \infty
\end{aligned}$$

رابطه آخر، دستوراسترلینگ نامیده می شود.

۱–۱–۴ معادله دیفرانسیل بسل

معادله دیفرانسیل بسل از مرتبه α به صورت $x^{2}y'' + xy' + (x^{2} - \alpha^{2})y = 0$ است که دارای دو جواب به صورت های زیر می باشد[۱۹]:

$$y_{1} = x^{\alpha}[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m}}{2^{2m}m!(1+\alpha)(2+\alpha)...(m+\alpha)}x^{2m}]$$
$$y_{2} = x^{-\alpha}[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m}}{2^{2m}m!(1-\alpha)(2-\alpha)...(m-\alpha)}x^{2m}]$$

توجه داشته باشید که اگر $\alpha = 0$ باشد، $y_{1} = y_{2}$ و اگر α عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه y_{2} بی معنی می شود و اگر α عددصحیح منفی باشد، آنگاه y_{1} بی معنی خواهد شد. به جز این حالات، پاسخ عمومی معادله بسل یعنی $y = Ay_{1} + By_{2}$ برای همه $x \neq 0$ همگرا است.

- **توابع بسل**

مفید ترین توابع بسل توابع از رتبه صفر و یک هستند که عبارتند:

$$J_{0}(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^{2}}(\frac{x}{2})^{2} + \frac{1}{(2!)^{2}}(\frac{x}{2})^{4} - \frac{1}{(3!)^{2}}(\frac{x}{2})^{6} + ...$$
$$J_{1}(x) = (\frac{x}{2})\{1 - \frac{1}{1!2!}(\frac{x}{2})^{2} + \frac{1}{2!3!}(\frac{x}{2})^{4} - \frac{1}{3!4!}(\frac{x}{2})^{6} + ...\}$$

- **برخی از خواص توابع بسل**

اگر k عددصحیح نا منفی باشد آنگاه:

۱) $J_{-k}(x) = (-1)^{k}J_{k}(x)$

۲) $\frac{d}{dx}(x^{k}J_{k}(x)) = x^{k}J_{k-1}(x)$