تقدیم به پدر و مادر بزرگوارم

و همه کسانی که مرا در گوشه‌ای از قلب خود جای داده‌اند.

تشکر و قدردانی

شکر خدای را که هر چه طلب کردم از خدا بر منتهای همت خود کامران شدم.

از پدرم و دعاهای خیرش،

از مادرم و فداکاری‌ها و پشتیبانی‌هایش،

از استاد گرانقدرم دکتر فرشید میرزائی و راهنمایی‌های بزرگوارانه‌اش،

و از تمامی معلمان، اساتید، دوستان و کسانی که مرا در امر تحصیل یاری کرده‌اند،

سپاس گزارم.

نام خانوادگی دانشجو: مهدوی مقدم	نام: خدیجه
عنوان پایان نامه: حل عددی معادلات انتگرال با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف	
استاد راهنما: دکتر فرشید میرزائی	
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: آنالیز عددی دانشگاه ملایر—گروه ریاضی تاریخ فارغ التحصیلی: آذر ۱۳۸۹ تعداد صفحات: ۱۲۹	
کلید واژه: چندجمله‌ای‌های چبیشف و سری‌ها، روش کالوکیشن، معادلات انتگرال فردهلم خطی، معادلات انتگرال ولترا خطی و غیرخطی، معادلات انتگرال—دیفرانسیل فردهلم—ولترا خطی، معادلات انتگرال—دیفرانسیل ولترا خطی	

چکیده:

در این پایان نامه روش چندجمله‌ای‌های چبیشف برای حل معادلات انتگرال فردهلم و ولترا خطی و غیرخطی، معادلات انتگرال—دیفرانسیل فردهلم—ولترا خطی معرفی شده است. روش براساس نقاط کالوکیشن چبیشف پایه‌گذاری شده است. این روش معادلات انتگرال را به دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌کند که مجهول‌های معادله، ماتریس ضرایب چبیشف می‌باشد و به این ترتیب جواب مسائل برحسب سری‌های متناهی از چندجمله‌ای‌های چبیشف بدست می‌آید. کاربرد روش مذکور در مثال‌های عددی مختلف نشان داده شده است.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

یادداشت درباره چبیشف:

پافونی لوویچ چبیشف[۱] (۱۸۹۴—۱۸۲۱) برجسته‌ترین ریاضیدان قرن نوزدهم روسیه بود. وی با هندسه‌دان مشهور روسی لوباچفسکی (۱۸۵٦—۱۷۹۳) معاصر بود، ولی آثارش تاثیر عمیق‌تری در سراسر اروپای غربی داشت و به عنوان پایه‌گذار مکتب عظیم ریاضی در روسیه که در قرن گذشته شکوفا گشت، بشمار می آید.

وی در خردسالی مجذوب اسباب بازی‌های مکانیکی گردید، و ظاهراً در ابتدا به علت پی‌بردن به اهمیت هندسه در درک طرز کار ماشین‌ها به ریاضیات علاقمند شد. پس از سپری کردن دوران دانشجویی خود در مسکو، استاد ریاضی دانشگاه سن‌پترزبورگ شد، و این سمت را تا هنگام بازنشستگی حفظ کرد. پدر وی جزو اشراف روسیه بود، ولی بعد از قحطی سال ۱۸۴۰ دارایی خانوادگی آن‌ها آن‌چنان کم شد که چبیشف تا آخر عمر به قناعت روی آورد و هرگز ازدواج نکرد.

وی بخش کوچکی از درآمد اندک خود را صرف مدل‌های مکانیکی و مسافرت‌های گاه و بیگاه به اروپای غربی می‌کرد، که در آنجا به ویژه از دیدن آسیاب‌های بادی و ماشین‌های بخار و نظایر آن‌ها لذت می‌برد.

چبیشف ریاضیدانی جامع بود که استعداد نادری در حل مسائل مشکل ریاضی به کمک روش‌های مقدماتی داشت. اکثر تلاش وی صرف ریاضیات محض گردید، ولی آن‌چنان که از گفته زیرین وی مشهود است به کاربردهای عملی آثارش نیز توجه داشت.

«جدا کردن ریاضیات از خواسته‌های عملی علوم، اصرار در عقیم کردن گاو ماده با جدا کردن آن از گاو نر است.»

وی در زمینه‌های بسیاری کارکرد، ولی مهمترین دستاوردهایش در زمینه احتمالات، نظریه اعداد و تقریب توابع، به علت علاقه‌اش به دستگاه‌های ماشینی بود.

[۱] Pafnuty Lvovich Chebyshev

وی در احتمالات، مفاهیم امید ریاضی و واریانس را برای مجموع‌ها و واسطه‌های حسابی متغیرهای تصادفی مطرح ساخت و اثبات زیبا و ساده‌ای برای قانون اعداد بزرگ مبتنی بر آنچه اکنون به نامساوی چبیشف مشهور است ارائه کرد. وی در خصوص قضیه حد مرکزی بررسی‌های گسترده‌ای انجام داد. او به عنوان پدر معنوی سلسه‌ای طولانی از دانشمندان مشهور روسی از قبیل آ.آ.مارکوف [۱] ، آ.ن.کولموگوروف [۲] ، اس.ن.برنشتاین [۳] ، آ.ی.خنچین [۴] و دیگران که در پیشبرد نظریه ریاضی احتمالات سهم داشتند، تلقی می‌گردد.

چبیشف در اواخر دهه ۱۸۴۰ در آماده کردن برخی آثار اویلر برای انتشار همکاری کرد. به نظر می‌رسد که این کار سبب بذل توجه وی به نظریه اعداد، به ویژه به مساله بسیار مشکل توزیع اعداد اول شده باشد. همان طور که می‌دانیم هر عدد اول، عدد صحیحی مانند $p > ۱$ است که بر هیچ عددی جز یک و خودش بخشپذیر نیست. تعدادی از این اعداد عبارتند از:

$$۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, \dots .$$

روشن است که توزیع اعداد اول در بین اعداد صحیح مثبت تقریباً نامنظم است، زیرا هر چه جلوتر برویم، به نظر می آید که این اعداد با فراوانی کمتری ظاهر می‌شوند، ولی باز هم اعداد اول متوالی بسیاری وجود دارند که در بین آنها تنها یک عدد زوج وجود دارد. مساله یافتن قانون حاکم بر چگونگی وقوع این اعداد و دانستن دلیل آن، یکی از مسائلی است که صدها سال کنجکاوی دانشمندان را برانگیخته است. در سال ۱۷۵۱ اویلر عدم موفقیت خود در این خصوص را چنین بیان کرد: «ریاضی‌دانان تا به امروز به عبث کوشیده‌اند نظم و ترتیبی در دنباله اعداد اول بیابند، و دلایلی بر این باور داریم که ذهن بشری هیچگاه این راز را کشف نخواهد کرد.»

کوشش‌های زیادی در زمینه یافتن فرمول ساده‌ای برای n امین عدد اول و تعداد دقیق اعداد اول کوچکتر از هر عدد صحیح و مثبت صورت گرفته است. همه این تلاش‌ها با شکست مواجه شدند، و پیشرفت واقعی تنها هنگامی حاصل گردید که ریاضیدانان به جای روش قبلی، به جستجوی اطلاعاتی در مورد توزیع متوسط اعداد اول در بین اعداد صحیح و مثبت پرداختند.

تعداد اعداد اول کوچکتر یا مساوی عدد مثبت x معمولا با $\prod(x)$ نمایش داده می‌شود. به این ترتیب $\prod(۱) = ۰$ و $\prod(۲) = ۱$ و $\prod(۳) = ۲$ و $\prod(\pi) = ۲$ و $\prod(۴) = ۲$ و ... . گاوس در اوایل جوانی $\prod(x)$ را به طور تجربی بررسی کرد، هدف او یافتن تابع ساده‌ای بود که با خطای نسبتاً کمی آن را برای مقادیر بزرگ x تقریب کند. بر اساس مشاهدات خود (شاید در سن چهارده یا پانزده سالگی)

[۱] A.A.Markov

[۲] A.N.Kolmogorov

[۳] S.N.Bernstein

[۴] A.Y.Khinchin

حدس زد که تابع $\frac{x}{\log x}$ تابع تقریب کننده مناسبی است به این معنی که

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\prod(x)}{\frac{x}{\log(x)}} = ۱, \tag{۱.۰}$$

این حکم همان قضیه مشهور اعداد اول است، و تا آنجا که معلوم است، گاوس هیچگاه نتوانست حتی قسمتی از اثبات آن را عرضه کند.

چبیشف بی‌اطلاع از حدس گاوس، اولین ریاضیدانی بود که به یک نتیجه‌گیری محکم در مورد این مساله دست یافت. وی در سال‌های ۱۸۴۸ تا ۱۸۵۰ ثابت کرد که برای همه مقادیر به اندازه کافی بزرگ x داریم:

$$۰/۹۲۱۳... < \frac{\prod(x)}{\frac{x}{\log(x)}} < ۱/۱۰۵۵... \; .$$

و نیز ثابت کرد که در صورت وجود حد (۱.۰)، این حد باید برابر ۱ باشد. به عنوان نتیجه جنبی این کار، وی اصل برتران را نیز ثابت کرد. برای هر عدد صحیح $n \geq ۱$ یک عدد اول p موجود است بطوری که $n < p \geq ۲n$.

در نهایت تلاش‌های چبیشف، وی را به اثبات نهایی قضیه اعداد اول رهنمون نکرد ولی باعث تشویق بسیاری از ریاضی‌دانان دیگر شد تا کار روی این مساله را دنبال کنند.

فصل ۱

مقدمه‌ای بر معادلات انتگرال و چندجمله‌ای‌های چبیشف

۱.۱ مقدمه

در این فصل ابتدا به طور مختصر به معرفی معادلات انتگرال، معادلات انتگرال–دیفرانسیل و چندجمله‌ای‌های چبیشف می‌پردازیم و سپس برخی از ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های چبیشف و روابط بین آن‌ها را که در فصل‌های بعدی مورد نیاز هستند، بدست می‌آوریم.

۲.۱ تاریخچه معادلات انتگرال

نام معادلات انتگرال برای هر معادله‌ای که در آن مجهولی مانند $y(t)$ در زیر علامت انتگرال قرارگیرد اولین بار توسط بویس ریموند[۱] در سال ۱۸۸۸ معرفی شد، اما تاریخچه واقعی معادلات انتگرال به زمان لاپلاس[۲] یعنی سال ۱۷۸۲ باز می‌گردد زیرا او تبدیل انتگرالی را به صورت:

$$f(x) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-xt} y(t) dt, \qquad (۱.۱)$$

برای حل معادلات تفاضل خطی و معادلات دیفرانسیل معرفی کرد.

در سال ۱۸۲۲، فوریه[۳] با استفاده از سری‌های مثلثاتی برای حل مساله‌های انتقال حرارت، فرمول‌های معکوسی به صورت زیر یافت:

$$y(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{\circ}^{\infty} \sin(xt) f(t) dt, \qquad (۲.۱)$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{\circ}^{\infty} \sin(xt) y(x) dx, \qquad (۳.۱)$$

$$y(x) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{\circ}^{\infty} \cos(xt) f(t) dt, \qquad (۴.۱)$$

$$f(t) = \sqrt{\frac{۲}{\pi}} \int_{\circ}^{\infty} \cos(xt) y(x) dx, \qquad (۵.۱)$$

که روابط (۳.۱) و (۵.۱) به ترتیب تبدیل فوریه سینوسی و کسینوسی و جواب معادلات انتگرال (۲.۱) و (۴.۱) می باشند، با این شرط که $f(t)$ تابعی معلوم باشد. در سال ۱۸۲۶ آبل[۴] نوع دیگری از معادلات انتگرال را که به نام خود او معروف شد به صورت:

$$f(t) = \int_{\circ}^{t} (xt)^{-\alpha} y(x) dx, \qquad (۶.۱)$$

---

۱ Bois Reymond

۲ Laplace

۳ Fourier

۴ Abel

معرفی کرد که در آن $f(t)$ تابعی پیوسته است و در شرایط $0 < \alpha < 1 \ , \ f(0) = 0$ صدق می‌کند. معادله انتگرال آبل اولین بار توسط هیوکنس حل و به نام مساله مزمان مشهور شد.

تعریف ۱.۲.۱ به پیدا نمودن منحنی‌ای که نقطه انتهایی آن داده شده و نقطه‌ای مادی تحت جاذبه زمین، در یک فاصله زمانی مستقل از مکان شروع حرکت می‌باشد، مساله مزمان گویند.

هیوکنس نشان داد که این منحنی یک سیکلوئید می‌باشد.

معادله انتگرال به فرم:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{0}^{x} \Gamma(xt) y(t) dt, \tag{۷.۱}$$

که در آن $y(t)$ تابعی مجهول می‌باشد در سال ۱۸۲۶ توسط پواسون [۱] در تئوری مغناطیس پیدا شد. او معادله انتگرال را بدون در نظر گرفتن همگرایی بر اساس سری توانی $y(t)$ بر حسب پارامتر λ بدست آورد. بعدها همگرایی آن توسط لیوویل [۲] در سال ۱۸۳۷ نشان داده شد.

مساله دیریکله [۳] که عبارت از تعیین تابع x روی مرز t در معادله لاپلاس $\nabla^2 x = 0$ است، توسط نیوتن [۴] در سال ۱۸۷۰ به یک معادله انتگرال تبدیل شد. نیومن [۵] این معادله انتگرال را بوسیله بسط توانی بر حسب λ حل کرد، این مشابه کاری بود که بعداً به وسیله پواسون و لیوویل انجام گرفت و متناظر با روش تقریبات متوالی بود.

در سال ۱۸۹۶ ولترا [۶] برای اولین بار توانست یک دسته معادلات انتگرال خطی که با نام خود او با مشخصه متغیر x در فاصله انتگرال‌گیری معرفی شده است را حل کند.

در سال ۱۹۰۰ فردهلم [۷] یک دسته‌بندی کلی از معادلات انتگرال خطی به فرم:

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_{a}^{b} k(x,t) y(t) dt, \tag{۸.۱}$$

که شامل دسته‌بندی خاصی از معادلات ولترا نیز بود، بدست آورد که با قرار دادن $k(x,t) = 0$ برای $t > x$ مورد بحث قرار گرفت و در مقاله‌ای که در سال ۱۹۰۳ منتشر نمود توانست نتایج ثمر بخشی را ارائه نماید. او روشی را که ولترا معرفی کرده بود، کامل نمود. در روش فردهلم معادله (۸.۱) به دستگاه معادلات خطی، به صورت:

$$y(x_r) = f(x_r) + \lambda \sum_{s=1}^{n} k(x_r, x_s) y(x_s) \ ; \quad r = 1, 2, ..., n, \tag{۹.۱}$$

---

[۱] Poisson

[۲] Liouville

[۳] Dirichlet

[۴] Newton

[۵] Neumann

[۶] Volterra

[۷] Fredholm

تبدیل می شود که در آن

$$x_r = a + r\delta_n \ , \ \delta_n = (b-a)/n,$$

می‌باشد. جواب دستگاه معادلات (۹.۱) به آسانی بدست می آید[۲۸].

هیلبرت[۱] نشان داد که جواب دستگاه معادلات (۹.۱) وقتی $n \to \infty$، به جواب معادله انتگرال فردهلم میل می‌کند. از اوایل قرن نوزدهم بخاطر آن که بیشتر مسائل دیفرانسیلی، معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با شرایط اولیه و مرزی به یک معادله انتگرال تبدیل می‌شدند، حرکتی نو در حل این گونه معادلات بوجود آمد و به همین دلیل مسائل کاربردی از قبیل معادلات منفرد در تئوری پتانسیل، فیزیک، مکانیک، تئوری امواج آب و الکترونیک مورد بحث قرار گرفت. نتایج و روش‌های عددی برای بدست آوردن جواب عددی این مسائل مورد نیاز بود و به دلیل آن که در محاسبات عددی در کامپیوترها مسائلی از قبیل گردکردن و انباشته شدن خطاها پیش می آمد لازم بود همگرایی روش عددی مورد بحث قرار گیرد. بسیاری از روش‌ها در تئوری همگرا بودند ولی در عمل این چنین نبود. به این ترتیب روش‌های عددی که دارای سرعت همگرایی بالا و استراتژی‌های مناسبی برای حل انواع معادلات انتگرال بودند ابداع گردید.

در سال ۱۹۲۳ هادآمار[۲] با توجه به معادلات دیفرانسیل و معادلات با مشتقات جزئی خطی، مسائل محاسباتی را به دو دسته عمده تفکیک کرد که باعث شکوفایی و بازنگری روش‌های عددی و بدست آوردن جواب‌های تقریبی شد. او مسائل ریاضی را به دو دسته خوش‌خیم و بدخیم تقسیم کرد که مسائل بدخیم از اهمیت بیشتری برخوردار می‌باشند. (مسائلی مانند پیدا کردن معکوس تبدیلات لاپلاس، حل معادلات انتگرال نوع اول، پیدا کردن ضرایب سری‌های فوریه و حل سیستم‌های بدوضع و غیره از مسائل بدخیم می‌باشند.)

به عقیده تیخانوف[۳] این دسته از مسائل به دو بخش عمده تقسیم می‌شوند:

۱– آن‌هایی که شناسایی شده‌اند.

۲– آن‌هایی که طراحی می‌شوند.

اولین زیر دسته مسائل بدخیم شامل مسائل تجزیه و تحلیل داده‌های مدل‌های ریاضی مانند مدل هسته، پلاسما، پرتوهای فیزیکی، مسائل الکترونیک و تشریح مشاهدات فیزیکی فرایندهای معدنی (شامل پتروشیمی)، مهندسی راکتورهای اتمی و موشک و غیره می‌باشد.

زیر دسته دوم مسائل بدخیم شامل بسیاری از مسائل بهینه سازی از قبیل طراحی آنتن، سیستم‌های

[۱] Hilbert

[۲] Hadamard

[۳] Tikhanov

بهینه، کنترل بهینه، و طراحی سیستم‌های اقتصادی بهینه می‌باشند.

به همین دلیل مسائل بدخیم در زندگی روزمره بشر نقش بسزایی را ایفا می‌کند و تسلط بر آن یعنی تسلط بر طبیعت.

۳.۱ مقدمه‌ای بر معادلات انتگرال و تئوری آن

اگر بخواهیم بر معادلات انتگرال، چه از نظر تئوری و چه از نظر محاسباتی اشراف داشته و با وسعت نظر بیشتری به آن بپردازیم می‌بایست بر آنالیز تابعی تسلط داشته باشیم.

در آنالیز تابعی مسائل محاسباتی به سه دسته تقسیم‌بندی می‌شوند. فرض کنیم مساله مورد نظر ما بصورت $Tx = y$ باشد، که در آن $x \in X \ , \ y \in Y$ و $X \ , \ Y$ فضاهای حاصل‌ضرب خطی، و T یک تبدیل از X به Y می‌باشد. در آن صورت داریم:

۱− **مساله مستقیم:** که در آن x و T داده شده‌اند و y مجهول می‌باشد، مانند انتگرال‌گیری.

۲− **مساله معکوس:** که در آن y و T معلوم و x مجهول می‌باشد، مانند سیستم‌های خطی، معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و معادلات انتگرال.

۳− **مساله مرتبط ساختن:** که در آن x و y داده شده‌اند و T مجهول می‌باشد، مانند مسائل درونیابی.

به این ترتیب بحث معادلات انتگرال با دسته بندی صورت گرفته، از نوع مسائل معکوس می‌باشد و با در نظر گرفتن نمایش اپراتوری می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$T[y(x)] = \int k(x,t)[y(t)]dt.$$

در معادلات انتگرال زیر، تابع مجهول $y(t)$ می‌باشد و توابع دیگر معلومند.

$$f(x) = \int_a^b k(x,t)y(t)dt, \tag{۱۰.۱}$$

$$y(x) = f(x) + \int_a^b k(x,t)y(t)dt, \tag{۱۱.۱}$$

$$y(x) = \int_a^b k(x,t)[y(t)]^{۲}dt. \tag{۱۲.۱}$$

از سوی دیگر بطور کلی‌تر می‌توان گفت معادله انتگرال، معادله‌ای است که در آن تابع مجهول فقط وابسته به یک متغیر نباشد مانند $y(x) = f(x) + \int\limits_{\Omega} k(x,t)y(t)dt$ که در آن x و t بردارهایی با بعد n و Ω ناحیه‌ای از فضای n ـ بعدی می‌باشد.

تعریف ۱.۳.۱ یک معادله انتگرال مانند $L[y(x)] = f(x)$ را خطی گویند اگر و تنها اگر L یک اپراتور انتگرال خطی باشد یا به عبارت دیگر برای هر عدد حقیقی ثابت مانند $C_۱\ ,\ C_۲$ داشته باشیم:

$$L[C_۱ y_۱(x) + C_۲ y_۲(x)] = C_۱ L[y_۱(x)] + C_۲ L[y_۲(x)].$$

در این پایان‌نامه با معادلات انتگرال خطی و غیرخطی سروکار خواهیم داشت. برای مثال معادلات (۱۰.۱) و (۱۱.۱) معادلات انتگرال خطی و معادله (۱۲.۱) معادله انتگرال غیرخطی می‌باشد.

فرم کلی معادله انتگرال خطی به شکل زیر است:

$$h(x)y(x) = f(x) + \lambda \int_a k(x,t)y(t)dt, \qquad (۱۳.۱)$$

بطوری که حد بالا ممکن است متغیر x یا ثابت b باشد. توابع $f(x)$ و $h(x)$ و $k(x,t)$ معلوم می‌باشند و تابع $y(x)$ مجهول است و λ یک پارامتر ناصفر حقیقی یا مختلط است، و $k(x,t)$ را هسته می‌نامند.

۴.۱ دسته بندی معادلات انتگرال

معادله (۱۳.۱) به حالت‌های خاص زیر تقسیم بندی می‌شود:

۱.۴.۱ معادلات انتگرال فردهلم

در همه معادلات انتگرال فردهلم حد پایین و بالای انتگرال در (۱۳.۱) مقدار ثابتی می‌باشد.

الف) در معادله انتگرال فردهلم، اگر $h(x) = ۰$ باشد آنگاه از (۱۳.۱) داریم:

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)y(t)dt = ۰,$$

این نوع معادله انتگرال فردهلم را معادله انتگرال فردهلم نوع اول گویند.

ب) اگر در رابطه (۱۳.۱)، $h(x) = ۱$ باشد در این صورت معادله انتگرال فردهلم نوع دوم حاصل می‌شود.

ج) اگر در رابطه (۱۳.۱)، $h(x) = ۱\ ,\ f(x) = ۰$ باشد آنگاه معادله انتگرال فردهلم همگن حاصل می‌شود.

د) اگر در رابطه (۱۳.۱)، $h(x)$ هم ارز ۰ یا مساوی ۱ نباشد آنگاه معادله انتگرال (۱۳.۱) را از نوع سوم گوییم.

۲.۴.۱ معادلات انتگرال ولترا

تعریف ۱.۴.۱ معادلات انتگرالی که در آن‌ها حد بالای انتگرال‌گیری متغیر x است را معادلات انتگرال ولترا می‌نامیم.

دسته بندی معادلات انتگرال ولترا مانند دسته بندی معادلات انتگرال فردهلم می‌باشد.

۳.۴.۱ دستگاه معادلات انتگرال

تعریف ۲.۴.۱ معادلات انتگرال به فرم

$$F(x) = G(x) + \int_a^b K(x,t)F(t)dt \; ; \quad 0 \leq x \leq 1,$$

را که در آن

$$\begin{aligned} F(x) &= [f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)]^T, \\ Y(x) &= [y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)]^T, \\ K(x,t) &= [k_{ij}(x,t)]; \quad n = 1, 2, ..., n \ , \end{aligned}$$

یک دستگاه معادله انتگرال فردهلم نوع دوم می گوییم.

دستگاه معادلات انتگرال ولترا نوع دوم به طور مشابه تعریف می‌شود.

۵.۱ تاریخچه معادلات انتگرال—دیفرانسیل

معادلات انتگرال—دیفرانسیل که در آن هر دو عملگر انتگرال و دیفرانسیل در معادله ظاهر می‌شوند، ابتدا در اوایل سال ۱۹۰۰ توسط ولترا معرفی شد. ولترا در حال مطالعه رشد جمعیت و به خصوص تأثیر وراثت بود که در تحقیق خود با این گونه معادلات مواجه شد و نام مذکور را برای آن‌ها انتخاب کرد. دانشمندان و محققین دیگر در پژوهش خود در کاربرد علوم در مواردی نظیر انتقال گرما، پدیده انتشار، پخش نوترون و غیره به حل این گونه معادلات نیاز پیدا کردند. معادلات انتگرال—دیفرانسیل

سبب پیشرفت در کاربرد بسیاری از رشته‌ها، مثل مسائل زیست شناسی، فیزیک و علوم مهندسی شده‌اند. به این نکته مهم باید توجه کرد که در معادلات انتگرال—دیفرانسیل تابع مجهول $y(t)$ و حداقل یکی از مشتق‌هایش نظیر $y'(t)$ یا $y''(t)$ و یا غیره در خارج و همچنین زیر علامت انتگرال قرار دارند.
در زیر چند مثال از معادلات انتگرال—دیفرانسیل آورده شده است:

مثال ۱.۵.۱ :

$$y'(x) = x - \int_{\circ}^{۱} e^{x-t} y(t)dt \; ; \;\; y(\circ) = \circ .$$

مثال ۲.۵.۱ :

$$y''(x) = e^x - x + \int_{\circ}^{۱} xty'(t)dt \; ; \;\; y(\circ) = \circ \; , \; y'(x) = ۱ .$$

از دیگر کاربردهای معادلات انتگرال—دیفرانسیل می‌توان به فشردگی رساناهای $Poro - Viscoelastic$ و راکتورهای هسته‌ای اشاره کرد.

۶.۱ ساختار چندجمله‌ای‌های چبیشف

در این بخش پیدایش چندجمله‌ای‌های چبیشف را توضیح می‌دهیم. برای این منظور اتحاد دموآور[۱] را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} e^{in\theta} &= \cos\; n\theta + i\sin\; n\theta = (e^{i\theta})^n = (\cos\;\theta + i\sin\theta)^n \\ &= \cos^n\theta + n\cos^{n-۱}\theta(i\sin\theta) + \frac{n(n-۱)}{۲!}\cos^{n-۲}\theta(i\sin\theta)^۲ + ... + (i\sin\theta)^n \; . \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $i^۲ = -۱$. اگر $(i\sin\theta)^k$ دارای توان زوج باشد آنگاه مقدار آن حقیقی خواهد بود، لذا داریم:

$$\begin{aligned} \cos\; n\theta &= cos^n\theta + \frac{n(n-۱)}{۲}\cos^{n-۲}\theta(-\sin^۲\theta) \\ &+ \frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۴!}\cos^{n-۴}\theta\sin^۴\theta + ... \; . \end{aligned}$$

عبارت طرف دوم یک چندجمله‌ای از درجه n بر حسب $\cos\theta$ است که آن را با $T_n(x)$ نمایش می‌دهیم.

[۱] de Moivre