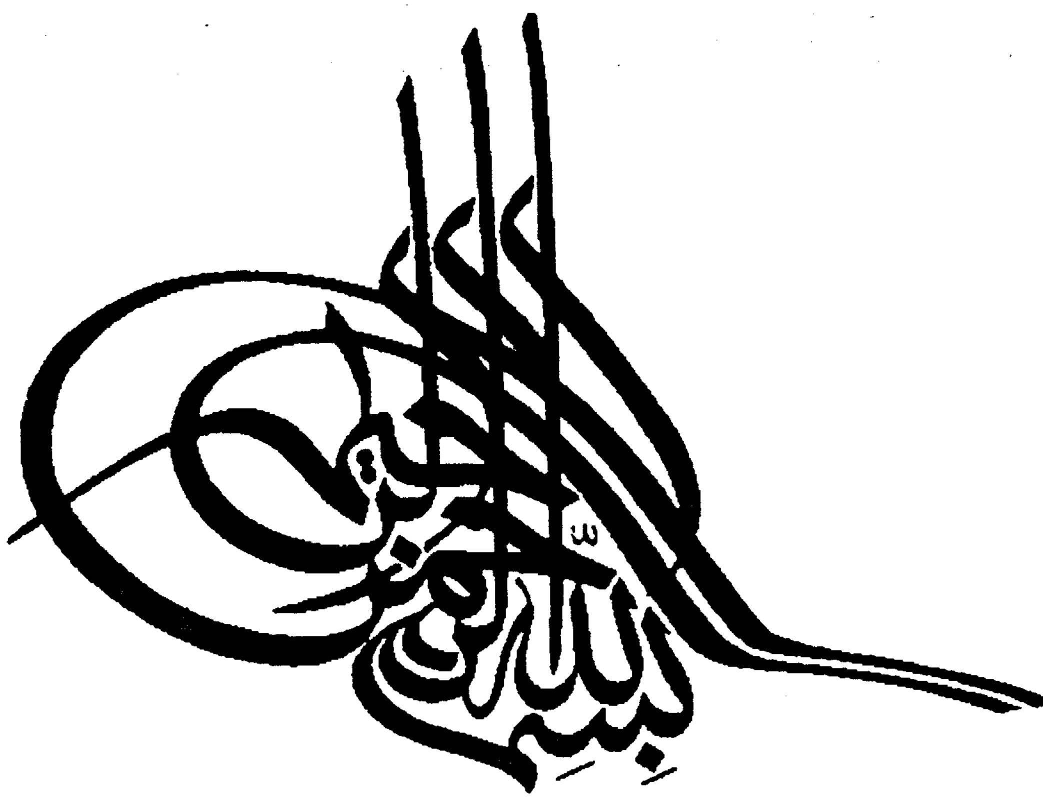


٤١٣٨٢

بنام خدا

دانشگاه سیستان و بلوچستان
تحصیلات تکمیلی

پایان‌نامه کارشناسی ارشدریاضی محض

عملگرها روی فضاهای دنباله ای لورنتس

استادراهنما:

دکتر رحمت ا... لشکری پور

استادمشاور:

دکتر پرویز عظیمی

تحقیق ونگارش:

کیانوش سبزی پور

اسفند ۱۳۸۰

بسمه تعالی

صفحه الف

این پایان‌نامه با عنوان **عملگرها روی فضاهای دنباله‌ای لورنتس** قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد **ریاضی** گرایش **محض** توسط دانشجو **کیانوش سبزی‌پور** تحت راهنمائی استاد پایان‌نامه **آقای دکتر رحمت ا... لشکری‌پور** تهیه شده است. استفاده از مطالب آن بمنظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان و بلوچستان مجاز می‌باشد٪

امضاء دانشجو

این پایان نامه ۶ (شش) واحد درسی شناخته می‌شود و در تاریخ **۸۰/۱۲/۲۱**.

توسط هیئت داوران بررسی و نمره ...۱۸/۵... با درجه ...عالی... به آن تعلق گرفت٪

نام و نام خانوادگی		امضاء	تاریخ
۱ـ استاد راهنما:	**دکتر رحمت ا... لشکری‌پور**		
۲ـ استاد مشاور:	**دکتر پرویز عظیمی**		
۳- داور ۱:	**دکتر عبدالرسول پورعباس**		
۳ـ داور ۲:	**دکتر هادی شریعتی**		
۴ـ تحصیلات تکمیلی:	**دکتر رجبعلی برزویی**		

تقدیم به

پدر فداکار

و

مادر مهربانم

که بهترین ایام خویش را صرف تربیت و پیشرفت اینجانب نمودند، و تقدیم به خانواده‌ام (برادران، خواهران و برادرزاده‌ام گلنوش و ...) که جز مهر و محبت، گذشت و ایثار در زندگی چیزی از آنها ندیده‌ام.

سپاسگزاری:

حمد و سپاس به درگاه ایزدی که یاری فرمود تا پایان‌نامه حاضر را تهیه و تدوین نمایم. بدینوسیله از کلیه عزیزانی که با مساعدتها و رهنمودهای خود باعث شدند، که این مقطع تحصیلی را با موفقیت به پایان برسانم، تشکر و قدردانی می‌کنم، و از خداوند متعال توفیق روزافزون آنها را خواستارم: از جناب آقای دکتر رحمت‌ا... لشکری پور استاد راهنما و جناب آقای دکتر پرویز عظیمی استاد مشاور به خاطر مساعدتهایشان سپاسگزاری می‌کنم. از جناب آقای دکترعبدالرسول‌پورعباس‌داور خارجی و جناب آقای دکترهادی شریعتی داور داخلی که زحمت داوری پایان‌نامه را بر عهده داشته، تشکر می‌کنم. همچنین بر خود لازم می‌دانم از استاد فرزانه و گرانقدرمان جناب آقای دکتر حبیب‌ا... دهمرده ریاست محترم دانشگاه زابل که بی‌شک از افتخارات جامعه علمی و مدیریتی کشور می‌باشندورشد و توسعه همه جانبه آموزش عالی منطقه مرهون زحمات بی‌شائبه ایشان بوده، که‌اینجانب را همواره مورد لطف و عنایت قرار داده، و فضایل علمی و اخلاقی فراوان از ایشان کسب نموده‌ام، تقدیر و تشکر صمیمانه نمایم. ضمناً از جناب آقای دکتر محمد حسین کریم کشته ریاست محترم دانشکدهٔ اقتصاد و علوم اداری که سه ترم در دانشکده تحت نظارت ایشان به تدریس دروس ریاضی مشغول و باعث زحمت ایشان بوده‌ام، کمال تشکر و سپاس را دارم. در ضمن از کلیهٔ اساتید و کارکنان گروه ریاضی که به نحوی با آنها در ارتباط بوده‌ام، قدردانی می‌کنم.

در پایان از دوست بسیار عزیزم آقای علیرضا فتاحی که در تایپ این پایان‌نامه متحمل زحمات فراوان شدند، تشکر می‌کنم.

مابدان همت عالی نتوانیم رسید   هم مگر پیش نهد لطف شما گامی چند

کیانوش سبزی‌پور
زمستان ۱۳۸۰

چکیده

در این پایان‌نامه ابتدا به معرفی مفهوم مقایسه‌پذیری دنباله‌ها و گزاره‌هایی در این زمینه اشاره شده است. در ادامه مجموع‌های جزیی و دنباله‌های $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ را معرفی کرده، و سپس به بررسی و خواص عملگرها روی فضاهای دنباله‌ای لورنتس $d(w,p)$ می‌پردازد. البته عمدهٔ کار مربوط به عملگرها روی فضای دنباله‌ای $d(w,1)$ و دوگان آن یعنی $e(w,\infty)$ است. لذا برای عملگر B، کرانهای پایین به شکل $\|Bx\|_p \geq m\|x\|_p$ و نرم این عملگر را در حالات مختلف، جستجو می‌کنیم.

ابتدا نرم و کران پایین عملگرهای عمومی را روی فضاهای $d(w,1)$ و $e(w,\infty)$ مشخص کرده، و در پایان نرم و کران پایین عملگرهای هیلبرت، سیزارو و کاپسون را روی این فضاها به دست می‌آوریم.

به‌نام خداوند بخشنده مهربان

فهرست

۱ مقایسه‌پذیری

۲ مجموع‌های جزیی و فضاهای دنباله‌ای لورنتس $d(w,p)$

۳ بند پایین و نرم عملگرهای عمومی روی فضاهای $d(w,1)$ و $e(w,\infty)$

۴ بند پایین و نرم عملگرهای سیزارو، کاپسون و هیلبرت روی فضاهای دنباله‌ای $d(w,1)$ و $d^*(w,1)$

فصل اول

مقایسه پذیری دنباله ها

۱

مقایسه‌پذیری

۱—۱ مقدمه

این فصل مشتمل بر هفت بخش به شرح ذیل می‌باشد:

در بخش دو تعاریف و گزاره‌های مقدماتی را بیان می‌کنیم. در بخش سوم به مفهوم مقایسه‌پذیری هندسی اشاره کرده و سپس مقایسه‌پذیری دنباله‌های متناهی را مطرح می‌کنیم. در بخش چهار تعریف مقایسه‌پذیری ضعیف و برخی نتایج آن بیان شده است. بخش پنجم به تعریف ترتیب‌های مخروطی پرداخته و پیوستگی مقایسه‌پذیری را مورد بررسی قرار خواهیم داد. همچنین در بخش شش مقایسه‌پذیری را برای دنباله‌های نامتناهی تعریف کرده و در آخرین بخش رابطهٔ بین مقایسه‌پذیری و انبساطها را بیان می‌کنیم.

۱ — ۲ تعاریف و مفاهیم پایه‌ای

یادآوری: بسیاری از نامساویهای مقدماتی می‌تواند، به فرم زیر نوشته شود:

$$\varphi(\bar{y}, \cdots, \bar{y}) \leq \varphi(y_۱, \cdots, y_n)$$

جایی که $\bar{y} = \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n} y_i$ و $y_۱, y_۲, \cdots, y_n$ در یک مجموعهٔ خاص قرار دارند.
به عنوان مثال، نامساوی

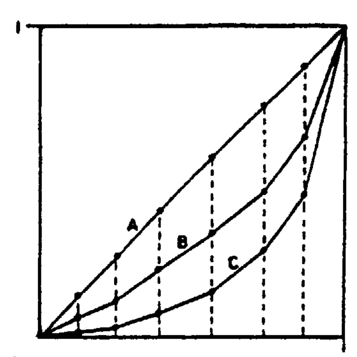
$$\sum_{۱}^{n} g(\bar{y}) \leq \sum_{۱}^{n} g(y_i)$$

برای توابع محدب $g : R \longrightarrow R$ برقرار است.

تاریخچه: مقایسه‌پذیری توسط شور[1] در سال ۱۹۲۳ برای اولین بار به وسیلهٔ تصاویر برای نامساویهای معین ابداع گردید. شور ثابت کرد، عناصر قطری $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ از یک ماتریس خود الحاق به وسیله مقادیر ویژه $\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n$ مقایسه می‌شود. بدین معنی که

$$(a_۱, a_۲, \cdots, a_n) \ll (\lambda_۱, \lambda_۲, \cdots, \lambda_n) \qquad (۱)$$

فرض کنید $x_۱, x_۲, \cdots, x_n$ نمایش ثروت افراد برای توزیع مجموع ثروتهای T باشد، که به منحنی A در شکل زیر سوق داده می‌شود :



منحنی‌های لورنتس

[1] Schur

به طور مشابه فرض کنید $y_1, y_2, \cdots, y_n$ به منحنی B سوق داده شوند، آنگاه مطابق تصور لورنتس[۲]، $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ نمایش یک توزیع هموار از ثروت $(y_1, \cdots, y_n)$ است، اگر و تنها اگر

$$\sum_{1}^{k} x(i) \geq \sum_{1}^{k} y(i) \qquad k = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{۲}$$

البته،

$$\sum_{1}^{n} x(i) \geq \sum_{1}^{n} y(i) = T \tag{۳}$$

روابط (۲) و (۳) روشی هستند که می‌گویند y مقایسه‌پذیر به وسیله x است.

گزاره ۲—۱: شرایط زیر هم‌ارزند:

الف) x می‌تواند به وسیله یک عدد متناهی از y مشتق شود.

ب) مجموع k مولفهٔ x کمتر یا مساوی مجموع k مولفه y است. $(k = 1, 2, \cdots, n)$

ج)

$$\sum_{\pi} \alpha_{\pi(1)}^{x_1} \alpha_{\pi(2)}^{x_2} \cdots \alpha_{\pi(n)}^{x_n} \leq \sum_{\pi} \alpha_{\pi(1)}^{y_1} \alpha_{\pi(2)}^{y_2} \cdots \alpha_{\pi(n)}^{y_n}$$

برای هر $\alpha > 0$، جایی که $\sum_{\pi}$ نمایش مجموع روی تمام جایگشت‌هاست.

اثبات: به مرجع [۲] مراجعه شود.

تعریف ۲—۲: برای $x, y \in R^n$، $x \ll y$ اگر

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{k} x[i] \leq \sum_{i=1}^{k} y[i]\,, & (k = 1, \cdots, n-1) \\ \sum_{i=1}^{n} x[i] = \sum_{i=1}^{n} y[i] & \end{cases} \tag{۴}$$

---

[۲] Lorentz

وقتی $x \ll y$، x مقایسه‌پذیر به وسیله y گفته می‌شود (یا به طور معادل، y، x را مقایسه‌پذیر می‌کند.)

تعریف ۲—۳: برای یک مجموعهٔ $A \subset R$، $x \ll y$ روی A بدین معنی است که $x, y \in A$ و $x \ll y$.

مثال ۲—۴:

$$\begin{aligned}(\tfrac{1}{n},\cdots,\tfrac{1}{n}) &\ll (\tfrac{1}{n-1},\cdots,\tfrac{1}{n-1},0) \ll \cdots \\ &\ll (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},0,\cdots,0) \ll (1,0,\cdots,0)\end{aligned}$$

مثال ۲—۵: به طور کلی، اگر $m \geq L$ و $Lc = m \times c$ (بدین معنی که $a = \frac{L}{m} \leq 1$)، آنگاه

$$(\underbrace{ac,\cdots,ac}_{m},0,0,\cdots,0) \ll (\underbrace{c,\cdots,c}_{L},0,0,\cdots,0)$$

مثال ۲—۶: $(1,0,\cdots,0) \ll (a_1,\cdots,a_n) \ll (\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n})$ که $a_i \geq 0$ و $\sum a_i = 1$.

مثال ۲—۷: اگر $c \geq 0$ آنگاه:

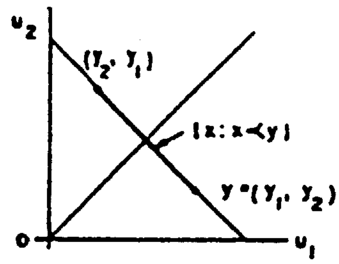
$$(x_1+c,\cdots,x_n+c)/(\sum x_i + nc) \ll x/(\sum x_i)$$

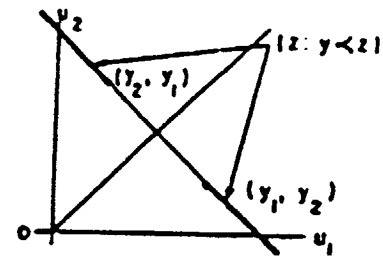
۱—۳ مقایسه‌پذیری هندسی

اگر $x \ll y$ بنابراین $x = yp$ برای ماتریس وابسته به متغیرهای تصادفی p، آنگاه ثابتهای $a_i \geq 0$ که $\sum a_i = 1$ وجود دارد، بطوریکه

$$x = y(\sum a_i \pi_i) = \sum a_i (y\pi_i)$$

که π_i ها ماتریسهای جابگشتی هستند.





تعریف ۳—۱: برای یک دنباله $x = (x_n)$، می‌نویسیم:

$$X_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

تعریف ۳—۲: برای دو دنباله متناهی $x = (x_n)$ و $y = (y_n)$، گوییم y به وسیله x مقایسه‌پذیر است، و می‌نویسیم $x \gg y$ اگر

$$Y_k \leq X_k \qquad (\forall k)$$

که X_k و Y_k مشابه بالا تعریف شده‌اند.

۱—۴ مقایسه‌پذیری ضعیف

مقدمه: همانند نماد قبلی، وجود $\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$، نامساویهای

$$\sum_{i=1}^{k} x[i] \leq \sum_{i=1}^{k} y[i]$$

و

$$\sum_{i=k+1}^{n} x[i] = \sum_{i=1}^{n-k} x(i) \geq \sum_{i=1}^{n-k} y(i) = \sum_{i=k+1}^{n} y[i]$$