# دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی

گروه ریاضی کاربردی


پایاننامه

برای در یافت درجه کارشناسی ارشد در رشته

ریاضی کاربردی گرایش معادلات دیفرانسیل

عنوان

# پایداری غیرخطی سرتاسری برای جریان سیال ایده‌آل پایا در دامنه‌های مسطح


استاد راهنما

**دکتر فریبا بهرامی**

استاد مشاور

**دکتر محمدحسن جوارشکیان**

پژوهشگر

**هادی تقوی‌فرد**


اسفند ماه ۱۳۸۶

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

نام خانوادگی دانشجو: تقوی‌فرد نام: هادی

عنوان: پایداری غیرخطی سرتاسری برای جریان سیال ایده‌آل پایا در دامنه‌های مسطح

استاد راهنما : دکتر فریبا بهرامی

استاد مشاور: دکتر محمدحسن جوارشکیان

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی کاربردی گرایش: معادلات دیفرانسیل دانشگاه تبریز

دانشکده علوم ریاضی تاریخ فارغ‌التحصیلی: اسفند ماه ۱۳۸۶ تعداد صفحه: ۱۰۰

کلید واژه‌ها: تجدید آرایش، پایداری غیرخطی سرتاسری، گرداب، معادله انتقال، سیال ایده‌آل

## چکیده

دراین پژوهش، پایداری جریان‌های پایای معادله گرداب برای یک سیال مسطح ایده‌آل بررسی می‌شود. منظور ما از پایداری، پایداری غیرخطی در نرم-$p$ روی فضای گردابهاست؛ بدین معنی که جوابهای ناپایای معادله می توانند در زمانهای متفاوت به اندازه دلخواه به جواب پایا و پایداری نزدیک شوند، به شرط اینکه در شرایط اولیه مناسب صدق کنند. روشی که در این پژوهش مورد بررسی قرار می‌گیرد بر پایه انرژی جنبشی و انتقال است و بسیار نزدیک به روش آرنلد است. این روش به هیچ فرض همواری روی جوابها نیاز ندارد و همچنین جوابها در فضای $L^p(p > ۴/۳)$ در نظر گرفته می‌شود.
ثابت می‌شود که معادله گرداب در حالت کلی جواب دارد و تابع گردش وابسته به این جوابها در زمانهای مختلف تجدید آرایشی از یکدیگر می‌شوند. همچنین نشان داده می‌شود که معادله دارای جواب پایا و پایداری است که جریان با این تابع گردش در بین جریانات هم گردش آن، بیشترین انرژی را دارد و

**ادامه‌ی چکیده**

همین جواب پایداری به معنی آرنلد را باعث می شود. همچنین این مطلب بررسی می‌شود که جوابی از معادله گرداب که انرژی جنبشی را نسبت به سطوح هم گردش بطور موضعی ماکزیمم می کند، می‌تواند به جواب پایا و پایداری از مسأله به اندازه دلخواه نزدیک شود به شرط اینکه در شرایط اولیه مناسب صدق کند. در نهایت، پایداری غیرخطی سرتاسری برای گردابهای متصل به تپه دریایی در کل صفحه، که بصورت مسأله باز مطرح است، را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این مسأله، بی‌کران بودن ناحیه یکی از مشکلات اساسی محسوب می‌شود. ما در اینجا حالتی را در نظر می‌گیریم که جوابهای پایا و ناپایای معادله، محمل کراندار دارند. جدید بودن مسأله از این نظر است که پایداری‌هایی که تا به حال برای این مسایل مطرح شده‌اند از نوع ماکزیمم یا مینیمم انرژی بوده است ولی در این پژوهش، پایداری غیرخطی سرتاسری بررسی می‌شود.

# فهرست مطالب

## ۱.۰ مقدمه و پیشینه‌ی پژوهش

نظریه مربوط به تجدید آرایش‌های یک تابع مفروض، علاوه بر اهمیت و جذابیت‌های تئوریک، از دیدگاه کاربردی اهمیت ویژه‌ای دارد. اصول تغییراتی مربوط به این نظریه، که بعضی از آنها در فصل دوم بررسی خواهد شد، در اثبات وجود جواب ضعیف معادلات جزیی بیضوی نیم‌خطی و همچنین اثبات وجود گردابهای پایا برای یک سیال بکار می‌روند.

در مباحث فیزیکی وجود جریانی از یک سیال ایده‌آل در ناحیه مشخص که دارای انرژی جنبشی ماکزیمم نسبت به همه جریانات هم چرخش دیگر از آن سیال است، یعنی جریاناتی که تابع گردش آنها تجدید آرایش یک تابع مشخص هستند، کاربرد زیادی دارد. این مباحث با تغییر نوع سیال و ناحیه جریان (کراندار یا بی‌کران، شامل مانع یا بدون مانع و ...) و عوامل دیگر بصورت کاملاً متمایزی ظاهر می‌شوند. هر نوع تغییری، در شکل‌گیری تابع انرژی جنبشی جر یانات سیال، که هدف اصلی ماکزیمم یا مینیمم کردن آن نسبت به مجموعه تجدید آرایش‌های با محمل کراندار یک تابع مشخص می‌باشد، تأثیر می‌گذارد و مباحث را از همدیگر متمایز می‌سازد. کارهای تحقیقاتی زیادی توسط محققان ریاضی و فیزیک انجام شده است که در زیر به بعضی از آنها اشاره می‌شود.

وجود گردابهای پایدار برای سیالها در نظریه مکانیک سیالات از دیرباز مطرح شده بود ولی دیدگاه ریاضی این مسایل توسط بنجامین [1] مطرح شد که وی با استفاده از روشهای تغییراتی، به اثبات وجود گرداب برای چند مسأله فیزیکی خاص پرداخت [۷]. این کار باعث ایجاد سؤالهای بسیاری در مسایل تغییراتی، روی مجموعه تجدید آرایش‌های یک تابع گردید. این سؤالات توسط برتن [2] و مک لود [3] با دیدگاه کاملاً ریاضی بررسی شدند که به تئوری برتن معروف هستند و نتایج آن تحت سه مقاله [۹]، [۱۰]، [۱۱] ارائه شدند؛ این تئوری‌ها تکمیل کننده نظریه‌های مربوط به اثبات وجود جواب در نواحی کراندار می‌باشند. در همین راستا در ارتباط با مسایل واقعی فیزیک مرتبط با این موضوع در نواحی بی‌کران،

[1] Benjamin
[2] Burton
[3] McLeod

مسایلی توسط فیزیکدان سوئدی، نایکندر[4]، مطرح شدند که باعث تعمیم تئوری به نواحی بی‌کران شد.

در نواحی بی‌کران، تئوری ارائه شده توسط برتن قابل اعمال نیست؛ زیرا یکی از مفاهیم بسیار اساسی در بیان تئوری برتن، استفاده از این خاصیت که بستار ضعیف مجموعه تجدید آرایش‌های یک تابع بطور ضعیف فشرده دنباله‌ای است، می‌باشد. در نواحی بی‌کران، مجموعه همه تجدید آرایش‌های یک تابع که دارای محمل کراندار روی ناحیه بی‌کران می‌باشد، ممکن است بطور ضعیف فشرده دنباله‌ای نباشد و بطور کلی می‌توان گفت در نواحی بی‌کران، فقدان فشردگی از مشکلات اساسی در بررسی این مسایل می‌باشد که این مشکل توسط ایده کلی پیشنهادی بنجامین بررسی و حل شد؛ بدین ترتیب که ابتدا مسأله تغییراتی در زیرمجموعه‌های کراندار ناحیه مفروض، با استفاده از تئوری برتن بررسی می‌شود؛ سپس نشان داده می‌شود که مرحله‌ای وجود دارد که با بزرگ کردن نواحی کراندار ناحیه مفروض و تحدید مسأله تغییراتی روی مجموعه تجدید آرایش‌های تابع مفروض که محمل آنها در این ناحیه قرار دارد، مقدار ماکزیمم تغییر نمی‌کند. به بیان دیگر، زیرمجموعه کرانداری از ناحیه مفروض وجود دارد که ماکزیمم انرژی در این ناحیه با ماکزیمم انرژی در کل ناحیه برابر است.

فیزیکدانان این مسایل را با ابزارهای عددی و تجربی حل کرده‌اند، ولی بررسی تحلیلی آن نیاز به ابزارهای پیشرفته ریاضی دارد. پایداری در حالت دو بعدی توسط نایکندر و امامی زاده و بهرامی و در حالت سه بعدی توسط برتن و نایکندر بررسی شد که در تمام موارد ذکر شده، پایداری مطرح شده از نوع ماکزیمم یا مینیمم انرژی بوده است([٦]،[١٢]،[١٦]،[١٧]، [١٨]، [٢٣]، [٢۴]،[٢۵]). در سال ٢٠٠۴، پایداری غیر خطی سرتاسری توسط مؤسسه آیساک نیوتن مطرح و توسط برتن مورد بررسی قرار گرفت که پایداری مطرح شده در این پژوهش در راستای این نوع پایداری است.

هدف ما در این پژوهش، اثبات قضیه پایداری برای جوابهای پایای معادله گرداب برای یک سیال مسطح ایده‌آل است بطوری که این جوابها ماکزیمم کننده‌ها یا مینیمم کننده‌های اکید انرژی جنبشی نسبت به سطوح هم‌گردش هستند. منظور ما از پایداری، پایداری غیرخطی در نرم‑$p$ روی فضای

[4] Nycander

گردابهاست. این روش بر پایه انرژی جنبشی و انتقال گرداب استوار است و بسیار نزدیک به روش آرنلد[5] است([۲]، [۳]، [۴]). این روش به هیچ فرض همواری روی جوابها نیاز ندارد و همچنین گردابها در فضای $L^p(p > 4/3)$ در نظر گرفته می‌شود.

در زبان ریاضی برای اثبات این نوع پایداری، که در فصل ۴ مورد بررسی قرار می‌گیرد، به ابزارهای آنالیز حقیقی و آنالیز تابعی بویژه فضاهای سوبولف، فضای توابع تعمیم یافته، توپولوژی ضعیف و قوی و ... نیاز است. به همین دلیل، در فصل اول به معرفی فضاها، مفاهیم و قضایایی از آنالیز حقیقی و تابعی و نظریه معادلات با مشتقات جزیی پرداخته می‌شود. در فصل دوم، مفهوم فیزیکی و ریاضی تجدید آرایش یک تابع بیان و سپس برخی از خواص آن ذکر می‌شود. فصل سوم به معادله انتقال و نظریه وجودی جواب آن اختصاص داده می‌شود؛ در این فصل ثابت می‌شود که جوابهای معادله انتقال تجدید آرایشی از یکدیگر هستند و یک جواب انرژی نگهدار برای معادله گرداب وجود دارد و در نهایت قضیه پایداری انرژی ثابت می‌شود. سرانجام در فصل چهارم، پایداری غیرخطی برای معادله گرداب بررسی و نتایج آن بیان می‌شود. در فصل پنجم، پایداری غیرخطی سرتاسری برای گردابهای متصل به تپه دریایی در کل صفحه بررسی می‌شود. برای اثبات قضایای مربوط به پایداری، که در فصلهای ۳ و ۴ بررسی خواهد شد، کراندار بودن ناحیه یکی از شرطهای اساسی برای بررسی پایداری مطرح شده، است. در مسأله پایداری غیرخطی سرتاسری برای گردابهای متصل به تپه دریایی در کل صفحه، که بصورت مسأله باز مطرح است، بی‌کران بودن ناحیه یکی از مشکلات اساسی محسوب می‌شود. ما در اینجا حالتی را در نظر می‌گیریم که جوابهای پایا و ناپایای معادله، محمل کراندار دارند. سپس با استفاده از تئوری برتن، که در فصل ۳ و ۴ بیان خواهد شد، قضیه پایداری مربوط به این معادله را بررسی می‌کنیم.

[5] Arnold

فصل ۱

# تعاریف و قضایای مقدماتی

## ۱.۱ مقدمه

همانگونه که بیان شد، برای اثبات قضایای مربوط به پایداری، ابزارهایی از آنالیز حقیقی و آنالیز تابعی بویژه فضاهای سوبولف، فضای توابع تعمیم یافته، توپولوژی ضعیف و قوی و ... نیاز است. به همین دلیل، در این فصل به معرفی فضاها، مفاهیم و قضایایی از آنالیز حقیقی و تابعی و نظریه معادلات با مشتقات جزیی پرداخته می‌شود.

## ۲.۱ تعاریف و قضایایی از آنالیز حقیقی

قضیه ۱.۱ **(قضیه همگرایی تسلطی لبگ)** فرض کنید $(X, M, \mu)$ یک فضای اندازه باشد. فرض کنید $f$ و $g$ تابعی اندازه پذیر روی $X$ باشند و $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع در $L^1(\mu)$ باشد بطوریکه

**الف)** تقریباً همه جا روی $X$، $\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = f(x)$.

**ب)** تابعی نامنفی مانند $g \in L^1(\mu)$ موجود باشد بطوریکه به ازای هر $n \in N$، $|f_n| \leq g$.

در اینصورت $f \in L^1(\mu)$ و

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

برهان. ([۲۰]، قضیه ۲.۲۴) □

قضیه ۲.۱ فرض کنید $f$ تابعی یکنوا روی $(a, b)$ باشد. در اینصورت، مجموعه نقاطی از $(a, b)$ که $f$ در آنها ناپیوسته است، حداکثر شمارش‌پذیر است.

برهان. ([۲۷]، قضیه ۴.۳۰) □

تعریف ۳.۱ فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده توابع پیوسته از فضای متریک $(X, d)$ به فضای متریک $(Y, e)$ باشد. $\mathcal{F}$ را همپیوسته گویند اگر به ازای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ موجود باشد بطوریکه برای هر $x, y \in X$، اگر $d(x, z) < \delta$ آنگاه به ازای هر $f \in \mathcal{F}$، $e(f(z), f(x)) < \epsilon$.

قضیه ۴.۱ (قضیه آرزلا—آسکولی) نسخه اول

فرض کنید $(X, d)$ و $(Y, e)$ فضاهای متریک باشند و $X$ جدایی‌پذیر باشد. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع همپیوسته از $X$ به $Y$ باشد. فرض کنید برای هر $x \in X$، زیر مجموعه فشرده‌ای از $Y$ شامل $\{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\}$ موجود باشد. در اینصورت دنباله $\{f_n\}$ دارای یک زیردنباله همگرای نقطه‌ای به یک تابع پیوسته است و همگرایی روی زیر مجموعه‌های فشرده $X$، بطور یکنواخت است.

قضیه ۵.۱ (قضیه آرزلا—آسکولی) نسخه دوم

فرض کنید $(X, d)$ یک فضای متریک فشرده باشد و $\mathcal{F} \subset C(X, \mathbb{R})$. در اینصورت $\mathcal{F}$ در $(C(X, \mathbb{R})\ ,\ \|.\|_{sup})$ بطور نسبی فشرده است اگر و تنها اگر $\mathcal{F}$ همپیوسته باشد و در $\|.\|_{sup}$ کراندار باشد.

تعریف ۶.۱ (**تعریف تابع محدب**): فرض کنید $X$ یک فضای برداری باشد. تابع $f : X \longrightarrow (-\infty, \infty)$ را محدب گویند هرگاه به ازای هر $\lambda \in (0,1)$،

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \qquad \forall x, y \in X.$$

تعریف ۷.۱ (**گتو مشتق‌پذیر**) فرض کنید $V$ یک فضای برداری باشد. عملگر $J : V \longrightarrow \mathbb{R}$ در $u \in V$ گتو مشتق‌پذیر گفته می‌شود هرگاه عملگری مانند $DJ : V \longrightarrow V'$ موجود باشد بطوریکه

$$\langle DJ(u), v\rangle = \lim_{\theta \longrightarrow 0} \frac{J(u+\theta v) - J(u)}{\theta} \qquad \forall v \in V.$$

این بخش را با تعریف توابع اساساً کراندار خاتمه می‌دهیم.

تعریف ۸.۱ تابع $u$، که روی $\Omega$ اندازه‌پذیر است، اساساً کراندار روی $\Omega$ نامیده می‌شود اگر عدد ثابت $k$ موجود باشد بطوریکه تقریباً همه جا روی $\Omega$، $|u(x)| \leq k$.

## ۳.۱ توپولوژی ضعیف و قوی

همانگونه که قبلاً بیان شد، توپولوژی ضعیف و قوی نقش مهمی در اثبات قضایای مربوط به پایداری ایفا می‌کند. در این بخش ابتدا تعریف توپولوژی ضعیف و قوی بیان می‌شود؛ سپس روابط بین آنها و شرایط انطباق دو توپولوژی بیان می‌شود.

### ۱.۳.۱ توپولوژی ضعیف و همگرایی ضعیف

تعریف ۹.۱ (*توپولوژی ضعیف*) فرض کنید $(X, \tau)$ یک فضای باناخ باشد و $X^*$ مجموعه تمام عملگرهای خطی و پیوسته روی $X$ باشد. کوچکترین توپولوژی روی $X$ که تحت آن اعضای $X^*$ همچنان پیوسته باشند را توپولوژی ضعیف گویند و با $\tau^w$ نشان می‌دهند و همواره $\tau^w \subset \tau$.

**نکته ۱.۱** اعضای $\tau$ را بازهای قوی و اعضای $\tau^{\omega}$ را بازهای ضعیف می‌نامند.

**تعریف ۱۰.۱** مجموعه $A$ **باز قوی** نامیده می‌شود اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in A$، گوی $B_r(a)$ موجود باشد بطوریکه $B_r(a) \subset A$ .

**تعریف ۱۱.۱** مجموعه $A$ **باز ضعیف** نامیده می‌شود اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in A$، توابع $f_1, f_2, ..., f_n$ متعلق به فضای $X^*$ موجود باشند بطوریکه به ازای هر $\epsilon > 0$ ،

$$N_{\epsilon, f_1, f_2, ..., f_n}(a) = \{x \in X : \ |f_i(x) - f_i(a)| < \epsilon \ ; \ i = 1, 2, ..., n\} \subset A.$$

**نکته ۲.۱** نتیجه‌ای از قضیه هان − باناخ [1] بیان می‌کند که یک مجموعه بسته و محدب در یک فضای نرم‌دار با توپولوژی ضعیف آن فضا، همچنان بسته است.

**تعریف ۱۲.۱** یک دنباله همگرا نسبت به توپولوژی ضعیف روی X، بطور ضعیف همگرا نامیده می‌شود؛ بنابراین دنباله $\{x_n\}$ بطور ضعیف به $x \in X$ همگراست اگر به ازای هر $f \in X^*$، $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

**نمادگذاری :** در سرتاسر این پژوهش، همگرایی نرم دنباله $\{x_n\}$ به $x \in X$ با $x_n \longrightarrow x$ و همگرایی ضعیف آن با $x_n \rightharpoonup x$ نمایش داده می‌شود.

از رابطه $|f(x_n - x)| \leq \|f\|_X \|x_n - x\|_X$ نتیجه می‌شود که اگر $x_n \longrightarrow x$، آنگاه $x_n \rightharpoonup x$؛ ولی عکس آن در حالت کلی درست نیست و قضیه زیر را داریم:

**گزاره ۱۳.۱** فرض کنید X یک فضای باناخ باشد و $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $X$ باشد.

**الف)** $x_n \rightharpoonup x$ اگر و تنها اگر به ازای هر $f \in X^*$، $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

**ب)** اگر $x_n \longrightarrow x$، آنگاه $x_n \rightharpoonup x$.

[1] Hanh-Banach

ج) اگر $x_n \rightharpoonup x$، آنگاه $\|x_n\|$ کراندار است و $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

د) اگر $x_n \rightharpoonup x$ و $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ در $X^*$، آنگاه $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$.

برهان. ([۱]، فصل ۳، گزاره ۵) □

**تعریف ۱۴.۱** مجموعه $A \subset X$ **فشرده ضعیف** نامیده می‌شود هرگاه هر پوشش از بازهای ضعیف، دارای زیر پوشش متناهی باشد.

**تعریف ۱۵.۱** **(بطور ضعیف فشرده دنباله‌ای)** زیرمجموعه $Y$ از فضای باناخ $X$، بطور ضعیف فشرده دنباله‌ای نامیده می‌شود هرگاه هر دنباله کراندار در $Y$، زیردنباله‌ای بطور ضعیف همگرا در $X$ به نقطه‌ای از $Y$ داشته باشد.

**تعریف ۱۶.۱** **(بطور ضعیف پیوسته دنباله‌ای)** فرض کنید $X$ و $Y$ دو فضای باناخ باشند. عملگر $T : X \longrightarrow Y$ را بطور ضعیف پیوسته دنباله‌ای گویند اگر به ازای هر دنباله $\{x_n\}$ در $X$ که $x_n \rightharpoonup x$، $\|Tx_n - Tx\| \longrightarrow 0$.

### ۲.۳.۱ منطبق بودن توپولوژی ضعیف و قوی

گزاره ۱۳.۱ بیان می‌کند که اگر دنباله $\{u_n\}$ بطور قوی همگرا باشد بطور ضعیف نیز همگراست؛ ولی عکس آن در حالت کلی درست نیست. حال شرایطی ذکر می‌شود که تحت آن شرایط، توپولوژی ضعیف و قوی بر هم منطبق هستند.

در مورد فضاهای با بعد متناهی، قضیه زیر را داریم:

**گزاره ۱۷.۱** در فضاهای متناهی البعد، توپولوژی ضعیف و قوی بر هم منطبق هستند.

برهان. ([۱]، فصل ۳، گزاره۶) □

**تعریف ۱۸.۱** فرض کنید $X$ یک مجموعه باشد و $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ دو توپولوژی روی $X$ باشند. گوییم توپولوژی $\mathcal{T}_2$ بزرگتر یا قوی تر از توپولوژی $\mathcal{T}_1$ است اگر $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. در این حالت همچنین می‌توان گفت که توپولوژی $\mathcal{T}_1$ کوچکتر یا ضعیف تر از توپولوژی $\mathcal{T}_2$ است.

**گزاره ۱۹.۱** فرض کنید $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ دو توپولوژی روی $X$ باشند. در اینصورت، توپولوژی $\mathcal{T}_2$ قوی تر از توپولوژی $\mathcal{T}_1$ است اگر و تنها اگر نگاشت همانی $\iota : (X, \mathcal{T}_2) \longrightarrow (X, \mathcal{T}_1)$ پیوسته باشد.

برهان. ([۱۳]، پیوست، گزاره ۲.۹) □

**گزاره ۲۰.۱** فرض کنید $\mathcal{T}_1$ و $\mathcal{T}_2$ دو توپولوژی روی $X$ باشند بطوریکه $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$. در اینصورت،

**الف)** اگر مجموعه $F$ تحت توپولوژی $\mathcal{T}_1$ بسته باشد، آنگاه تحت توپولوژی $\mathcal{T}_2$ نیز بسته است.

**ب)** اگر مجموعه $K$ تحت توپولوژی $\mathcal{T}_2$ فشرده باشد، آنگاه تحت توپولوژی $\mathcal{T}_1$ نیز فشرده است.

**ج)** اگر مجموعه $X$ تحت توپولوژی $\mathcal{T}_2$ فشرده باشد، آنگاه $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

برهان. ([۱۳]، پیوست، گزاره ۲.۱۰) □

**تعریف ۲۱.۱** فرض کنید $X$ و $Y$ دو فضای توپولوژیک باشند و تابع $f : X \longrightarrow Y$ تناظری دوسویی باشد. اگر $f$ و تابع معکوس آن یعنی $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ هر دو پیوسته باشند، آنگاه $f$ را **همئومورفیسم** گویند.

به بیان دیگر، همئومورفیسم عبارتست از تناظری دوسویی مانند $f : X \longrightarrow Y$ بطوری که به ازای هر $U$، $f(U)$ باز است اگر وتنها اگر $U$ باز باشد.

نکته اخیر نشان می‌دهد که همئومورفیسم $f : X \longrightarrow Y$ نه تنها بین $X$ و $Y$، بلکه بین هر گردایه از مجموعه‌های باز $X$ و $Y$ نیز تناظری دوسویی برقرار می‌کند. در نتیجه، هر خاصیت $X$ که تماماً بر حسب توپولوژی $X$ (یعنی بر حسب مجموعه‌های باز $X$) بیان شود، توسط تناظر $f$ خاصیت متناظری برای $Y$ می‌دهد.

**گزاره ۲۲.۱** اگر $f : X \longrightarrow Y$ یک به یک و پوشا و پیوسته باشد و $X$ فشرده باشد، آنگاه $f$ یک همئومورفیسم است.

برهان. ([۱۳]، پیوست، گزاره ۲.۸) □

**تعریف ۲۳.۱** فرض کنید $X$ و $Y$ دو فضای توپولوژیک باشند. گوییم فضای $X$ با فضای $Y$ همئومورفیک است اگر همئومورفیسمی بین آنها موجود باشد.

هر مجموعه بسته برای توپولوژی ضعیف برای توپولوژی قوی نیز بسته است، ولی عکس آن در بعد نامتناهی صحیح نیست. لیکن قضیه زیرنشان می‌دهد که برای مجموعه‌های محدب، این دو مبحث منطبق هستند.

**قضیه ۲۴.۱** فرض کنید $A \subset X$ محدب باشد. در اینصورت $A$ با توپولوژی ضعیف بسته است اگر و تنها اگر با توپولوژی قوی بسته باشد.

برهان. ([۱]، قضیه ۳.۷) □

این بخش را با یک خاصیت مفید فضاهای بطور یکنواخت محدب خاتمه می‌دهیم.

**گزاره ۲۵.۱** فرض کنید $E$ یک فضای بطور یکنواخت محدب باشد. فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنباله در $E$ باشد بطوری که $x_n \rightharpoonup x$ و $\limsup \|x_n\| \leq \|x\|$. در اینصورت $x_n \longrightarrow x$.

برهان. [۱]، گزاره ۳.۳۰) □

## ۴.۱ فضاهای تابعی

در این پژوهش، فرض بر آن است که خواننده با فضاهای تابعی و خواص آنها آشناست. در این بخش به معرفی فضای سوبولف و فضای توابع تعمیم یافته ، که نقش مهمی در اثبات قضایا دارند، پرداخته می‌شود؛ فضاهای مورد نیاز دیگر نیز، در پیوست $A$ آمده‌اند.

### ۱.۴.۱ فضای $L^p$

فرض کنید $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ و $1 \leq p \leq \infty$. فضای $L^p(\Omega)$ بصورت زیر تعریف می‌شود

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \ is \ measurable \ , \int_\Omega |f|^p < \infty \right\}.$$

فضای فوق یک فضای نرم‌دار است و نرم روی آن بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\|_p = \left( \int_\Omega |f|^p \right)^{1/p}.$$

**نماد گذاری:** فرض کنید $1 \leq p \leq \infty$. نمای مزدوج $p$ را با $q$ نشان داده و بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$q = \begin{cases} 1 & if \ p = \infty \\ p/(p-1) & if \ 1 < p < \infty \\ \infty & if \ p = 1 \end{cases}$$

**قضیه ۲۶.۱ (نامساوی هولدر)** فرض کنید $1 \leq p \leq \infty$. فرض کنید $f \in L^p$ و $g \in L^q$ بطوریکه $1/p + 1/q = 1$. در اینصورت $fg \in L^1$ و

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

برهان. ([۱]، فصل ۴، قضیه ٦) □

**نتیجه:** اگر $f \in L^p$ و $g \in L^q$، که $1/p + 1/q = 1/r$، آنگاه $fg \in L^r$ و

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

### ۲.۴.۱ فضای توابع تعمیم یافته: $\mathcal{D}'(\Omega)$

در فصول بعد، مفهومهای اساسی و تکنیکهای نظریه توابع تعمیم یافته شوارتز[2]، نقش مهمی در اثبات قضایا ایفا می‌کند. به همین دلیل، در این بخش ابتدا به معرفی توابع تعمیم یافته پرداخته و سپس برخی از خواص آنها ذکر می‌شود.

**نمادگذاری:** در این بخش $\Omega$ دامنه‌ای در $\mathbb{R}^n$ و $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ در نظر گرفته می‌شود.

**تعریف ۲۷.۱** **(همگرایی در $\mathcal{D}(\Omega)$)** فرض کنید $\{\phi_n\}$ دنباله‌ای از توابع در $\mathcal{D}(\Omega)$ باشد. گوییم دنباله $\{\phi_n\}$ در فضای $\mathcal{D}(\Omega)$ به $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ همگراست، هرگاه در دو شرط زیر صدق کند:

۱) مجموعه $K \subset \Omega$ موجود باشد بطوریکه به ازای هر $n$، $\mathrm{supp}(\phi_n) \subset K$ و

۲) به ازای هر $\alpha$، $D^\alpha \phi_n$ بطور یکنواخت روی $K$ به $D^\alpha \phi$ همگرا باشد.

**تعریف ۲۸.۱** تابع $F$ را تعمیم یافته گویند هرگاه $F$ یک نگاشت خطی پیوسته از $\mathcal{D}(\Omega)$ به $\mathbb{R}$ باشد.

بنابراین فضای توابع تعمیم یافته، دوگان فضای $\mathcal{D}(\Omega)$ است و با $\mathcal{D}'(\Omega)$ نشان داده می‌شود.

**نماد گذاری:** فرض کنید $\mathbb{Z}_+^n$، مجموعه‌ای از تمام اعداد صحیح نامنفی $n$—تایی را نشان دهد. فرض کنید $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ ، یعنی

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$$

---

Schwartz[2]