

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

دانشگاه پیام نور  
مرکز شیراز  
پایان نامه  
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد  
در رشته فیزیک اتمی

دانشکده علوم پایه

گروه علمی فیزیک

عنوان پایان نامه:

**مطالعه‌ی درهم‌تنیدگی گرمایی زنجیره‌های اسپینی مدل هایزنبرگ**

استاد راهنما:

دکتر احمد آخوند

استاد مشاور:

دکتر عبدالرسول قرائتی

نگارنده:

نوید هادی‌زاده

شهریور ۱۳۸۹



## دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

### تصویب پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : مطالعه درجهم تنیدگی گرمایی زنجیره های استینی مدل هایزبرگ که توسط نوید هادی زاده در مرکز شیراز تهیه و به هیأت داوران ارائه گردیده است مورد تأیید می باشد.  
تاریخ دفاع: ۱۳۸۹/۰۶/۲۵  
نمرد: ۱۹  
درجه ارژشیاسی : عالی  
اعضای هیأت داوران:

نام و نام خانوادگی	هیأت داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱- دکتر احمد آخوند	استاد راهنما	استادیار	
۲- دکتر عبدالرسول قرانی	استاد مشاور	دانشیار	
۳- دکتر محمد مهدی گلشن	استاد داور	دانشیار	
۴- دکتر محمد قناعیان	نماینده تحصیلات تکمیلی	استادیار	

تقدیم به

شهدای ۸ سال دفاع مقدس  
همسر مهربان و پدر و مادر عزیزم

## تشکر و قدردانی

بر خود لازم می‌دانم که از جناب آقای دکتر احمد آخوند که در مراحل مطالعه ، تحقیق ، نگارش و ویرایش مقالات و پایان‌نامه‌ی اینجانب، صمیمانه و دلسوزانه و فراتر از یک استاد راهنما در انجام این مجموعه من را یاری کرده‌اند کمال تشکر و سپاس را داشته باشم.

عنوان پایان نامه:

## مطالعه‌ی درهم‌تنیدگی گرمایی زنجیره‌های اسپینی مدل هایزنبرگ

نگارنده:

نوید هادی‌زاده

### چکیده

در این پایان‌نامه زنجیره‌ی اسپینی هایزنبرگی مدل XXX را برای دو کیوبیت و سه کیوبیت به کار برده، سپس اثر میدان‌های خارجی متفاوت را بر آن‌ها بررسی کرده‌ایم. هدف از این کار یافتن جهت‌گیری‌های مناسب میدان مغناطیسی برای افزایش میزان درهم‌تنیدگی در مدل‌های ذکر شده می‌باشد. نتایج بررسی‌های ما نشان می‌دهد که میدان‌های مغناطیسی و دما دو عامل کنترل‌کننده در میزان درهم‌تنیدگی زنجیره‌ی اسپینی می‌باشند. در سیستم دو کیوبیتی، اثر میدان‌های مغناطیسی خارجی خلاف جهت نسبت به میدان‌های هم جهت در افزایش درهم‌تنیدگی دو کیوبیت مفیدتر است. در زنجیره‌ی سه کیوبیتی، جهت‌گیری مناسب میدان مغناطیسی اعمال شده بر کیوبیت میانی می‌تواند اولاً باعث ایجاد درهم‌تنیدگی در حالت فرومغناطیس و ثانیاً موجب افزایش درهم‌تنیدگی در حالت آنتی فرومغناطیس شود. کلمات کلیدی: درهم‌تنیدگی گرمایی-کیوبیت-معیار تلاقی-زنجیره‌ی اسپینی.

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۵	چکیده‌ی فارسی
	<b>بخش ۱- تئوری و مفاهیم کلی</b>
۱	پیش‌گفتار
	<b>فصل ۱ مفاهیم و اصول اطلاعات و محاسبات کوانتومی</b>
۲	۱-۱ بیت و کیوبیت
۴	۲-۱ تعریف ریاضی کیوبیت
۶	۳-۱ عملگرهای پائولی
۹	۴-۱ کره‌ی بلوخ
	<b>فصل ۲ آنسامبل حالت‌های کوانتومی و ارتباط آن‌ها با عمل‌گر چگالی</b>
۱۱	۱-۲ مقدمه
۱۳	۲-۲ حالت خالص و آمیخته
۱۵	۳-۲ مبانی فیزیکی سیستم‌های کوانتومی مرکب
۱۶	۴-۲ ویژگی‌های عمل‌گر چگالی
۲۰	۵-۲ ماتریس چگالی کاهش یافته
	<b>فصل ۳ بررسی درهم‌تنیدگی حالت‌های کوانتومی</b>
۲۲	۱-۳ سیستم‌های غیرهمبسته
۲۲	۲-۳ سیستم‌های همبسته

صفحه	عنوان
۲۳	۳-۳ یک آزمایش ذهنی
۲۵	۴-۳ حالت‌های خالص درهم‌تنیده
۲۵	۳-۴-۱ تجزیه‌ی اشمیت
۲۶	۳-۴-۲ رابطه‌ی عدد اشمیت با درهم‌تنیدگی:
۲۷	۳-۵ خالص‌سازی بوسیله‌ی گذار به حالت ضربی
۲۹	۳-۶ آنتروپی زیرسیستم، به‌عنوان یک سنج از درهم‌تنیدگی
۳۱	۳-۷ معیار PPT برای درهم‌تنیدگی سیستم‌های آمیخته

## بخش ۲- روش محاسبه درهم‌تنیدگی و بررسی‌های موردی

### فصل ۴ محاسبات درهم‌تنیدگی در زنجیره‌های اسپینی

۳۴	۴-۱ مقدمه
۳۴	۴-۲ سیستم‌های یک بعدی
۳۶	۴-۳ معیار تلافی
۳۹	۴-۴ روش محاسبه‌ی درهم‌تنیدگی گرمایی یک سیستم

### فصل ۵ درهم‌تنیدگی در زنجیره‌ی دو کیوبیتی مدل هایزنبرگ XXX

۴۰	۵-۱ درهم‌تنیدگی دو کیوبیت، بدون حضور میدان خارجی
	۵-۱-۱ بررسی وضعیت درهم‌تنیدگی گرمایی برای
۴۲	حالت‌های آنتی‌فرومغناطیس و فرومغناطیس



۴۳	۲-۵ اثر میدان خارجی در راستای Z
۴۳	۱-۲-۵ محاسبه‌ی معیار تلاقی
۴۷	۲-۲-۵ معیار تلاقی در دماهای نزدیک به صفر
۴۸	۳-۲-۵ میدان‌های خارجی هم‌اندازه و هم‌جهت
۵۲	۴-۲-۵ میدان‌های خارجی هم‌اندازه و خلاف‌جهت
۵۷	۵-۲-۵ میدان‌های مغناطیسی متفاوت و هم‌راستا

### فصل ۶ درهم‌نیدگی زنجیره‌ی سه کیوبیتی مدل هایزنبرگی XXX

۶۳	۱-۶ مقدمه
۶۴	۲-۶ میدان‌های هم‌اندازه و هم‌جهت
۶۹	۳-۶ میدان‌های هم‌اندازه و خلاف‌جهت
۷۲	۱-۳-۶ میدان مغناطیسی ثابت
۷۵	۲-۳-۶ حالت آنتی فرومغناطیس
۷۵	۳-۳-۶ حالت فرومغناطیس
۷۶	۴-۶ اعمال میدان فقط روی کیوبیت میانی
۷۹	۱-۴-۶ میدان مغناطیسی ثابت
۸۱	۲-۴-۶ حالت آنتی فرومغناطیس

### فصل ۷ نتایج و پیشنهادات

۸۳	۱-۷ نتیجه‌گیری
۸۳	۲-۷ پیشنهادات
۸۵	منابع
۸۸	چکیده‌ی لاتین

## فهرست شکل‌ها

صفحه	عنوان
۸	شکل ۱-۱ نمایش یک بردار در فضای دکارتی با جهت‌گیری فضایی
۹	شکل ۲-۱ شمای کره بلاخ و ویژه بردارهای عملگر پائولی
۴۳	شکل ۲-۵ نمودار تغییرات معیار تلافی بر حسب تغییرات دما ( $T$ ) و قدرت همبستگی ( $J$ ) بین دو کیوبیت
۴۶	شکل ۳-۵ تغییرات دمای بحرانی بر اساس تغییرات تفاضل میدان‌ها $B_m$ ، برای $J=1$ و $J=-1$ .
۴۷	شکل ۴-۵ تغییرات معیار تلافی بر حسب جمع میدان‌ها $B_p$ ، برای مقادیر مختلفی از $B_m$ ، برای حالت‌های آنتی‌فرومغناطیس ( $J=1$ )
۴۷	شکل ۵-۵ تغییرات معیار تلافی بر حسب جمع میدان‌ها $B_p$ ، برای مقادیر مختلفی از $B_m$ ، برای حالت‌های آنتی‌فرومغناطیس ( $J=-1$ )
۴۸	شکل ۶-۵ نمایی از دو کیوبیت با قدرت همبستگی $J$ ، که دو میدان هم‌جهت و هم‌اندازه به آن‌ها اعمال شده‌است
۴۹	شکل ۷-۵ تغییرات معیار تلافی بر حسب ثابت همبستگی ( $J$ ) و میدان ( $B$ ) در دمای $T=1$ .

- شکل ۵-۸ تغییرات معیار تلاقی برحسب دما ( $T$ ) و میدان ( $B$ ) در حالت  $J=1$ . ۵۰
- شکل ۵-۹ نمایی از دو کیوبیت با قدرت همبستگی  $J$ ، که دو میدان خلاف جهت و هم اندازه به آن‌ها اعمال شده است ۵۱
- شکل ۵-۱۰ الف تغییرات معیار تلاقی برحسب ثابت همبستگی ( $J$ ) و میدان ( $B$ ) در دمای  $T=0/5$ . ۵۳
- شکل ۵-۱۰ ب تغییرات معیار تلاقی برحسب ثابت همبستگی ( $J$ ) و میدان ( $B$ ) در دمای  $T=1$ . ۵۴
- شکل ۵-۱۰ ج تغییرات معیار تلاقی برحسب ثابت همبستگی ( $J$ ) و میدان ( $B$ ) در دمای  $T=2$ . ۵۴
- شکل ۵-۱۰ د تغییرات معیار تلاقی برحسب ثابت همبستگی ( $J$ ) و میدان ( $B$ ) در دمای  $T=4$ . ۵۴
- شکل ۵-۱۱ تغییرات معیار تلاقی برحسب دما ( $T$ ) و میدان ( $B$ ) در حالت  $J=1$ . ۵۵
- شکل ۵-۱۲ تغییرات معیار تلاقی برحسب دما ( $T$ ) و میدان ( $B$ ) در حالت  $J=-1$ . ۵۶
- شکل ۵-۱۳ نمایی از دو کیوبیت با قدرت همبستگی  $J$ ، که دو میدان متفاوت و (الف) هم جهت و (ب) خلاف جهت به آن‌ها اعمال شده است ۵۷
- شکل ۵-۱۴ الف نمایش تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات میدان‌های  $B_1$  و  $B_2$ ، برای  $J=1$  در  $T=0/5$ . ۵۸
- شکل ۵-۱۴ ب نمایش تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات میدان‌های  $B_1$  و  $B_2$ ، برای  $J=1$  در  $T=1$ . ۵۹
- شکل ۵-۱۴ ج نمایش تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات میدان‌های  $B_1$  و  $B_2$ ، برای  $J=1$  در  $T=1/5$ . ۵۹
- شکل ۵-۱۴ د نمایش تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات میدان‌های  $B_1$  و  $B_2$ ، ۵۹

- ۶۱ برای  $J=1$  در  $T=2$ .
- شکل ۵-۱۵-الف نمایش تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات میدان‌های  $B_1$  و  $B_2$ ،  
 ۶۱ برای  $J=-1$  در  $T=0/5$ .
- شکل ۵-۱۵-ب نمایش تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات میدان‌های  $B_1$  و  $B_2$ ،  
 ۶۱ برای  $J=-1$  در  $T=1$ .
- شکل ۵-۱۵-ج نمایش تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات میدان‌های  $B_1$  و  $B_2$ ،  
 ۶۲ برای  $J=-1$  در  $T=1/5$ .
- شکل ۵-۱۵-د نمایش تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات میدان‌های  $B_1$  و  $B_2$ ،  
 ۶۲ برای  $J=-1$  در  $T=2$ .
- شکل ۶-۱ تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات دما ( $T$ ) و ثابت ( $J$ ) برای  $B=0$   
 شکل ۶-۲ تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات دما ( $T$ ) و ثابت ( $J$ ) برای  $B=2$   
 شکل ۶-۳ تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات دما ( $T$ ) و ثابت ( $J$ ) برای  $B=4$   
 شکل ۶-۴ تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات دما ( $T$ ) و میدان ( $B$ ) برای  
 ۶۸ حالت  $J=1$
- شکل ۶-۵ تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات دما ( $T$ ) و میدان ( $B$ ) برای  
 ۶۹ حالت  $J=-1$
- شکل ۶-۶ تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات دما ( $T$ ) و ثابت ( $J$ ) برای  $B=0$   
 شکل ۶-۷ تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات دما ( $T$ ) و ثابت ( $J$ ) برای  $B=1$   
 شکل ۶-۸ تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات دما ( $T$ ) و ثابت ( $J$ ) برای  $B=2$   
 شکل ۶-۹ تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات دما ( $T$ ) و ثابت ( $J$ ) برای  $B=4$   
 شکل ۶-۱۰ تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات دما ( $T$ ) و میدان ( $B$ ) برای  $J=1$   
 شکل ۶-۱۱ تغییرات معیار تلاقی بر حسب تغییرات دما ( $T$ ) و میدان ( $B$ ) برای  $J=-1$

- شکل ۶-۱۲ تغییرات معیار تلاقی برحسب تغییرات دما ( $T$ ) و ثابت ( $J$ ) برای  $B=0$  ۷۹
- شکل ۶-۱۳ تغییرات معیار تلاقی برحسب تغییرات دما ( $T$ ) و ثابت ( $J$ ) برای  $B=1$  ۸۰
- شکل ۶-۱۴ تغییرات معیار تلاقی برحسب تغییرات دما ( $T$ ) و ثابت ( $J$ ) برای  $B=2$  ۸۰
- شکل ۶-۱۵ تغییرات معیار تلاقی برحسب تغییرات دما ( $T$ ) و ثابت ( $J$ ) برای  $B=4$  ۸۱
- شکل ۶-۱۶ تغییرات معیار تلاقی برحسب تغییرات دما ( $T$ ) و میدان ( $B$ ) برای  $J=1$  ۸۲

## فهرست جدول‌ها

صفحه

عنوان

جدول ۱-۱ برخی از سیستم‌هایی که می‌توان آنها را به‌عنوان کیوییت در نظر گرفت ۴

پیش‌گفتار

دنیای کنونی فیزیک را می‌توان به دو بخش عمده تقسیم کرد؛ یکی فیزیک کلاسیک و دیگری فیزیک کوانتوم. منظور از فیزیک کلاسیک مجموعه‌ای از قوانین و روابط فیزیکی است که تقریباً تا اوایل قرن بیستم بدست آمده بود و قادر بودند بسیاری از پدیده‌های عالم را توصیف کنند، اما پدیده‌هایی وجود داشتند که یا توضیح آن‌ها با این قوانین ممکن نبود و یا توجیه آن پدیده‌ها به صورت منحصر به فرد انجام می‌شد و امکان تعمیم آن به پدیده‌های دیگر وجود نداشت. آغاز قرن بیستم مصادف با آغاز دو واقعه‌ی مهم در فیزیک بود که دیدگاه بنیادی ما را درمورد ساختار جهان متحول کرد، یکی نظریه‌ی نسبیت اینشتین بود، و دیگری پدیدار شدن فیزیک کوانتومی.

نظریه‌ی نسبیت قوانین نیوتنی را به چالش می‌کشید و به تصحیح این قوانین در محدوده‌ی سرعت‌های بالا می‌پرداخت؛ همچنین خمیدگی فضا-زمان در اثر وجود گرانش از دیگر مباحث جدیدی بود که با ظهور نظریه‌ی نسبیت خودنمایی کرد.

فیزیک کوانتومی نیز پای علم را به دنیای میکروسکوپی بیشتر باز کرد و موجب درک بهتر و بیشتر از این دنیای پر رمز و راز شد. توصیف و توجیه بسیاری از پدیده‌ها مانند ابرسانایی و همچنین پیش‌بینی ساخت بسیاری از ابزارها مانند لیزرها و... بر اساس فیزیک کوانتومی صورت گرفته است.

گذشته از مواردی که درباره‌ی فواید و راه‌گشایی‌های مکانیک کوانتومی بیان شد، باید گفت که در دنیای کنونی که به حق نام عصر اطلاعات را به خود گرفته است مهم‌ترین چیز رسیدن به انتقال سریع‌تر، گسترده‌تر و با امنیت بالاتر اطلاعات است، که فیزیک کوانتومی نیز در این عرصه وارد شده و با بررسی سیستم‌های اسپینی [۱-۲] هدف ساخت کامپیوترهای کوانتومی [۳]، موضوعاتی نظیر کدگذاری چگال [۴]، فرابرد کوانتومی [۵]، نقاط کوانتومی [۳]، کلیدهای کوانتومی [۶]، اسپین‌های هسته [۵]، شبکه‌های اپتیکی [۷]- [۸] و ... را دنبال می‌کند.

## فصل ۱

### مفاهیم و اصول، اطلاعات و محاسبات کوانتومی

اولین بار و در سال ۱۳۶۱، ریچارد فایمن بیان کرد که شبیه سازی یک سیستم کوانتومی با کامپیوترهای کلاسیکی کار دشوار و طاقت فرسایست و برای انجام این شبیه سازی‌ها، پیشنهاد ساخت کامپیوترهای کوانتومی، که بر اساس مکانیک کوانتومی کار کنند را ارائه داد. به دنبال بیان چنین ایده‌ای مقالاتی توسط افرادی نظیر دیوید دویچ در زمینه‌ی محاسبه‌گرهای کوانتومی، پیتر شور در مورد الگوریتم کوانتومی و افرادی دیگر نیز در زمینه‌های ارتباطات کوانتومی و امنیت آن‌ها انتشار یافت. با ادامه‌ی تحقیقات نظری و عملی و گسترده شدن این شاخه‌ی نوپای فیزیک کوانتومی، نامی جدید تحت عنوان اطلاعات و محاسبات کوانتومی<sup>۱</sup> برای آن انتخاب شد.

#### ۱-۱ بیت و کیوبیت

برای آشنای با مفهوم کیوبیت، ابتدا اطلاعات خود را در مورد بیت مرور می‌کنیم. بیت‌ها در واقع کوچک‌ترین واحد اطلاعات کلاسیکی به‌شمار می‌روند که در کامپیوترهای فعلی مورد استفاده هستند و اساس محاسبات و ارتباطات کلاسیکی محسوب می‌شوند. با بیان نام بیت ذهن ما ناخودآگاه به طرف یک سری صفر و یک معطوف می‌شود که تصور صحیحی از بیت است زیرا در واقع همین صفر یا یک‌ها هستند که به بیت‌ها مفهوم می‌دهند. البته بیت را در کامپیوترهای کلاسیکی به‌صورت صفر و یک بیان می‌کنند ولی به‌طور کلی هر سیستم دوحالتی مانند بالا-پایین، چپ-راست، بله-خیر، صحیح-غلط، خاموش-روشن و نظیر این‌ها را می‌توان بیت نامید؛ در کل به چنین حالت‌هایی حالت‌های منطقی گفته می‌شود. اساس فرآیندهای اطلاعات کوانتومی نیز مانند اطلاعات کلاسیکی بر کدگذاری عددی استوار است. حامل‌های فیزیکی اطلاعات با پیشرفت علمی گسترده‌تر می‌شوند اما در حال حاضر دو عامل ولتاژ و نور به عنوان ابزار فیزیکی عینیت بخشیدن به حالت‌های صفر و یک استفاده می‌شوند. مثلاً برای انتقال اطلاعات در فیبرهای نوری، عدم وجود نور بیانگر منطق ۰ و یک پالس نوری کوتاه نماینده‌ی منطق ۱ است. حال این سوال پیش می‌آید که اگر منبع نوری که برای انتقال اطلاعات استفاده می‌شود ضعیف و ضعیف‌تر گردد تا

<sup>۱</sup>Quantum computation and Information



در نهایت به یک کوانتوم منفرد از نور - یک فوتون - تبدیل شود چه اتفاقی می‌افتد؟ چه انتظاری باید از ترانزیستوری داشته باشیم که تاکنون با یک الکترون منفرد کلید می‌خورد اما حال باید با یک فوتون سروکار داشته باشد؟

اگر بخواهیم به سوال‌هایی از این قبیل که مطرح می‌شوند پاسخ دهیم باید وارد دنیای میکروسکوپی با شرایط و قوانین خاص مربوط به آن شویم، به عبارت دیگر نمی‌توانیم برای سیستم‌های دو حالتی در محدوده‌ی مکانیک کوانتومی، از اصطلاح کلاسیکی بیت استفاده کنیم و به جای آن از واژه‌ی کیوبیت<sup>۱</sup>، که مخفف عبارت بیت کوانتومی<sup>۲</sup> است استفاده می‌کنیم. بنابراین می‌توان گفت که کیوبیت، واحد اطلاعات کوانتومی است.

در علم اطلاعات کوانتومی، ابزارهای کوانتومی، نقش حامل‌های اطلاعات را ایفا می‌کنند. وقتی که ما بتوانیم فرآیندی خاص را پیدا کنیم که شامل دو مجموعه‌ی ممکن باشد، می‌توانیم  $\circ$  و  $\mathbf{1}$ ها را بسته به آن ویژگی خاص، تعریف کنیم. چند مورد از راه‌کارهای عملی برای اجرای فیزیکی سیستم‌های کیوبیتی عبارتند از [۹]:



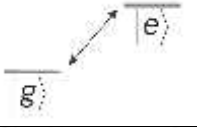
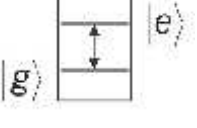
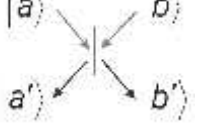
- حالت‌های برانگیخته‌ی الکترون‌ها در یونها و یا اتم‌های فوق سرد.
  - اتم‌های دو سطحی (همچنین اتم‌هایی با بیش از دو سطح، البته زمانی که دو سطح از آن در یک فرآیند خاص نقش اصلی را ایفا کنند)، و یون‌هایی با دو سطح انرژی؛
  - قطبش ذرات با اسپین  $\frac{1}{2}$ ؛
  - قطبش فوتون‌های منفرد؛
  - نقاط کوانتومی؛
  - مدهای میدان الکترومغناطیسی در یک کاواک مشدد.
- البته این موارد به‌عنوان همه‌ی سیستم‌های کیوبیتی نیستند و سیستم‌های کیوبیتی دیگری نیز وجود دارند. جدول ۱-۱ می‌تواند به درک بهتر سیستم‌های کیوبیتی کمک کند. در این جدول به دلیل ویژگی‌های دو حالتی، که در نشانه‌ی گیومه آمده‌اند، به موجودات فیزیکی مربوط به آن‌ها، کیوبیت گفته می‌شود.

---

<sup>1</sup>Qubit

<sup>2</sup>Quantum bit

جدول ۱-۱ برخی از سیستم‌هایی که می‌توان آنها را به‌عنوان کیوبیت در نظر گرفت

$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	کیوبیت (ویژگی دو حالتی)
$\updownarrow$ $ V\rangle$	$\leftrightarrow$ $ H\rangle$	فوتون (قطبش خطی)
 $ L\rangle$	 $ R\rangle$	فوتون (قطبش دایره‌ای)
$\uparrow$ $+\frac{1}{2}\hbar$	$\downarrow$ $-\frac{1}{2}\hbar$	الکترون، نوترون، هسته‌های اتم (اسپین)
		اتم، یون (لایه‌های داخلی)
		نقاط کوانتومی (سطوح انرژی)
		ذرات (مُد‌ها در ابزار تقسیم‌کننده باریکه)

## ۲-۱ تعریف ریاضی کیوبیت

کیوبیت را از نظر ریاضی این‌گونه تعریف می‌شود "هر سیستم کوانتومی که بیشتر از دو حالت مستقل خطی نداشته باشد را می‌توان بصورت بردارهایی در فضای هیلبرت دو بعدی شرح داد، که به حالت‌های کوانتومی در این فضا، کیوبیت، گفته می‌شود".

در دنیای ریاضی هر فضایی را که برای کار انتخاب می‌کنیم دارای پایه‌های مستقل متعامد مربوط به خودش است، برای مثال وقتی می‌خواهیم به بررسی یک حرکت کلاسیکی در فضای مختصات دکارتی بپردازیم، بردارهای مربوط به این حرکت را براساس پایه‌های نرمال و متعامد در این فضا، یعنی  $\hat{k}, \hat{j}, \hat{i}$  تعریف می‌کنیم؛ به عبارت دیگر این سه بردار از یکدیگر مستقل‌اند و نمی‌توان آن‌ها را براساس یکدیگر تعریف و یا به یکدیگر وابسته کرد. در فضای مورد استفاده در مبحث اتم‌های دو سطحی، یعنی فضای هیلبرت، پایه‌های نرمال متعامد را با حالت بالا یا پایین بودن اسپین الکترون بیان می‌کنیم که آن‌ها را به ترتیب با  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  نشان می‌دهیم که البته این دو پایه را می‌توان برای محاسبات جبری به ترتیب به شکل ماتریسی  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  و  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  نیز نشان داد. این پایه‌ها را، پایه‌های محاسباتی<sup>۱</sup> و همچنین پایه‌های استاندارد<sup>۲</sup> نیز می‌نامند [۱۳]. برخلاف بیت‌ها که تنها می‌توانند حالت ۰ یا ۱ را داشته باشند، یک سیستم کوانتومی می‌تواند علاوه بر این حالت‌ها در هر حالتی که نتیجه‌ی برهم‌نهی پایه‌های متعامد است قرار داشته باشد. کیوبیت‌ها با توجه به پایه‌های متعامد بیان شده، به شکل کلی زیر نشان داده می‌شوند [۹]

$$|\psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle \quad (1-1)$$

البته حالت کلی فوق با اعمال شرط  $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$  نام کیوبیت را به خود می‌گیرد. اشاره به یک اصطلاح خالی از فایده نیست، و آن اینکه در برخی موارد بجای استفاده از عبارت سیستم‌های کیوبیتی<sup>۳</sup> به اختصار از کلمه‌ی کیوبیت‌ها<sup>۴</sup> استفاده می‌شود.

لازم به ذکر است که نام کیوبیت فقط اختصاص به فضای هیلبرت دو بعدی دارد و بدین معنی است که ما در فضای بالاتر، مثلاً در فضای هیلبرت سه بعدی، که مربوط به ذرات با اسپین یک است، کیوبیت نداریم، بلکه در آن‌جا با کیوتریت<sup>۵</sup> ها سروکار داریم. به‌طورکلی هر بردار در فضای هیلبرت  $d$  بعدی، بعنوان یک کیودیت<sup>۶</sup> شناخته می‌شود [۱۳].

برای محاسبات در فضای هیلبرت دو بعدی، عملگرهای یکانی و عملگرهای پائولی ابزارهای مهمی به-شمار می‌روند.

<sup>1</sup> Computational basis

<sup>2</sup> Standard basis

<sup>3</sup> Qubit systems

<sup>4</sup> Qubits

<sup>5</sup> Qtrit

<sup>6</sup> Qudit

### ۳-۱ عملگرهای پائولی

نیاز ما به عملگرهای پائولی از آنجا ناشی می‌شود که ما با الکترون‌هایی با اسپین  $\frac{1}{2}$  که در فضای هیلبرت دوبعدی تفسیر می‌شوند مواجه می‌شویم، بنابراین سه عملگر هرمیتی را با نام عملگرهای پائولی معرفی می‌کنیم. در این مجموعه، عملگرهای پائولی را با  $\sigma_i$  نمایش داده‌ایم که در برخی موارد،  $i$  را با نشانه-های  $1, 2, 3$  و در بعضی مواقع با  $x, y, z$  نمایش خواهیم داد. نمایش جبری این عملگرها، که شاید بیشتر به کار ما می‌آید به صورت زیر است [۱۱]:

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2-1)$$

برخی از ویژگی‌های این عملگرها عبارتند از:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma_i^\dagger \\ \sigma_i &= \sigma_i^{-1} \\ tr(\sigma_i) &= 0 \end{aligned} \quad (3-1)$$

$$\sigma_i^2 = I$$

که منظور از علامت  $I$ ، ماتریس واحد دو در دو به شکل  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  می‌باشد.

اگر ویژه بردارهای  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  را به عنوان پایه‌های نرمال متعامد  $\sigma_z$  انتخاب کنیم؛ که به ترتیب دارای ویژه مقادیر  $+1$  و  $-1$  باشند، می‌توان این عملگرها را به صورت نمایش برا-کتی نشان داد:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \\ \sigma_y &= -i(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|) \\ \sigma_z &= |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| \end{aligned} \quad (4-1)$$