دانشگاه پیام نور

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی

عنوان :

مدولها وزیر مدولهای اول و حلقه های چگال

استاد راهنما :

منصوره معانی شیرازی

نگارش :

پاییز 87

چکیده

در این رساله، نوعی از مدول ها معرفی می شوند که برای آنها، دو مفهوم p و اول هم ارزند. همچنین شرایطی ذکر خواهد شد که تحت آنها، حلقه R ددکیند است اگر و فقط اگر R - مدول M، اول باشد. در نهایت، به این پرسش که چه مدول هایی در شرط فرمول رادیکال صدق می کند پاسخ داده می شود.

فهرست

فصل 1
مفاهیم پایه

در سراسر این رساله، تمام حلقه ها جابجایی و یکدار و مدول ها یکانی می باشند.
ایده آل های ماکسیمال و اول، دو دسته مهم از ایده آل های یک حلقه را تشکیل می دهند که در بخش یک معرفی و مورد بررسی قرار می گیرند. در این بخش ملاحظه خواهیم کرد که هر ایده آل ماکسیمال یک آیده آل اول است. ولی عکس این مطلب درست نیست. مدول ها روی یک حلقه تعمیمی از گروههای آبلی می باشند. در بخش دو، بعد از معرفی مدول و همریختی، چند مدول ابتدایی از قبیل مدول های ساده را معرفی می کنیم. در بخش دو و چهار توجه ما به ساختارخارجی مدول هاست تا ساختار داخلی آنها. فضا های برداری که حالت خاصی از مدو ل های آزاد می باشند، کاربرد های گستردهای داشته و در بخش سه به طور جامع بررسی می شوند. به ازای هر مدول A یک مدول انژکتیو مانند J و یک دنباله کامل چون $0 \to A \to J$ وجود دارند. به عبارت دیگر، هرمدول را می توان در یک مدول انژکتیو نشاند. به دلیل اهمیت این مدول ها، در بخش چهار به بررسی آنها می پردازیم. در بخش پنج، نکات اساسی مربوط به حلقه ها و مدول های آرتینی و نوتری را که در این فصل و فصل های آینده لازم می شوند، به طور خلاصه می آوریم. با توجه به ساخت آشنای میدان اعداد گویا از حلقه اعداد صحیح، یک حلقه خارج قسمتی نیز به همین نحو از یک حلقه ساخته می شود. در بخش شش، به حلقه های خارجی قسمتی و موضعی سازی و مدول کسری و خواص آنها می پردازیم. در بخش هفت، دامنه های ددکیند را بررسی می کنیم. این رده، بطور محض، بین رده دامنه ایده آل های اصلی و رده دامنه صحیح نوتری قرار دارد. از تعریف دامنه ددکیند، روشن نیست که هر دامنه ددکیند، نوتری است. برای اثبات این امر و به دست آوردن سایر خواص دامنه ددکیند، مفهوم ایده آل های کسری را نیز در این بخش می آوریم.

1-1 ایده آل های ماکسیمال و اول

یادآوری می کنیم که اگر I, J ایده آل های حلقه R باشند، حاصل ضرب J و I را با IJ نشان داده و برابر است با $\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i : x_i \in I, y_i \in J\right\}$. همچنین به راحتی می توان دید که حاصل ضرب ایده آل ها خاصیت شرکت پذیری دارند یعنی $(I_1 I_2) I_3 = I_1 (I_2 I_3)$ و چون حلقه R جابجایی است لذا $I_1 I_2 = I_2 I_1$ و به علاوه همیشه داریم $I_1 I_2 \subseteq I_1 \cap I_2$. اما تساوی چه زمانی صورت می گیرد؟ به عنوان مثال یکی از حالت هایی که تساوی برقرار می شود، این است که I_2 و I_1، نسبت به هم اول باشند، یعنی $I_1 + I_2 = R$. زیرا،

$$I_1 \cap I_2 = (I_1 \cap I_2) R = (I_1 \cap I_2)(I_1 + I_2) = (I_1 \cap I_2) I_1 + (I_1 \cap I_2) I_2 \subseteq I_1 I_2 .$$

تعریف 1-1-1 فرض کنیم R یک حلقه باشد. ایده آل M از R یک ایده آل ماکسیمال است اگر $M \neq R$ و اگر N یک ایده آل R شامل M باشد، آنگاه $N = M$ یا $N = R$.

تعریف 1-1-2 حلقه R یک حلقه ی ساده است، اگر هیچ ایده آل غیر بدیهی نداشته باشد.

نتیجه 1-1-3 فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت R یک میدان است اگر و فقط اگر R یک حلقه ی ساده باشد.

اثبات: با استفاده از تعریف بالا اثبات بدیهی است.

قضیه 1-1-4 فرض کنیم R یک حلقه و I یک ایده آل R باشد به طوری که $I \neq R$. در این صورت I یک ایده آل ماکسیمال R است اگر و فقط اگر $\frac{R}{I}$ یک میدان باشد.

اثبات: فرض کنیم I یک ایده آل ماکسیمال از حلقه R باشد. از این که بین ایده آل های $\frac{R}{I}$ و ایده آل های R که شامل I هستند، تناظر یک به یکی برقرار است، لذا تنها ایده آل های $\frac{R}{I}$، صفر و خود $\frac{R}{I}$ است. بنا براین $\frac{R}{I}$ یک میدان است. برعکس، اگر $\frac{R}{I}$ یک میدان باشد و J یک ایده آل R به طوری که $I \subseteq J$، در این صورت $\frac{J}{I}$ یک ایده آل $\frac{R}{I}$ است. بنا بر این $J = R$ یا $J = I$. لذا I یک ایده آل ماکسیمال R است.

تعریف 1-1-5 ایده آل $P \neq R$ از حلقه R یک ایده آل اول است، اگر برای هر $a,b \in R$ که داشته باشیم: $ab \in P$ ، آنگاه $a \in P$ یا $b \in P$.

قضیه 1-1-6 ایده آل P از حلقه R اول است اگر و تنها اگر $\frac{R}{P}$ یک حوزه صحیح باشد.

اثبات: فرض کنیم P یک ایده آل اول R باشد و $(x+P)(y+P)=P$ که $x,y \in R$. بنابراین $xy+P=P$، لذا $xy \in P$ و بنابر فرض $x \in P$ یا $y \in P$ که این نتیجه می دهد $x+P=P$ یا $y+P=P$. بر عکس، فرض کنید $\frac{R}{P}$ یک حوزه صحیح باشد و $xy \in P$. بنابراین داریم:

$$xy+P=P \Rightarrow (x+P)(y+P)=P \Rightarrow x+P=P \text{ یا } y+P=P \Rightarrow x \in P \text{ یا } y \in P$$

قضیه 1-1-7 فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت هر ایده آل ماکسیمال m از R، یک ایده آل اول است.

اثبات: از این که $\frac{R}{m}$ یک میدان است، لذا یک حوزه صحیح می باشد و بنابراین m یک ایده آل اول R است.

تذکر: عکس قضیه فوق همواره برقرار نیست. زیرا به عنوان مثال، ایده آل صفر در حلقه اعداد صحیح Z اول است ولی ماکسیمال نیست.

قضیه 1-1-8 اگر مجموعه $\{P_a : a \in I\}$ یک زنجیر از ایده آل های اول حلقه R باشد، آنگاه $\bigcap_{a\in I} P_a$ و $\bigcup_{a\in I} P_a$ ایده آل های اول حلقه R می باشند.

اثبات: واضح است.

تعریف 1-1-9 زیر مجموعه ناتهی S از حلقه R ضربی است مشروط بر اینکه به ازای هر $a,b\in S$ داشته باشیم $ab\in S$.

قضیه 1-1-10 ایده آل $I \neq R$ در حلقه R اول است اگر و فقط اگر $R-I$ یک مجموعه ضربی باشد.

اثبات: فرض کنید I یک ایده آل اول است، واضح است که $1\in R-I$. اگر $x\in R-I$ و $y\in R-I$ باشد، آنگاه $xy\in R-I$ چون در غیر این صورت، $xy\in I$ و I یک ایده‌آل او ل R است، لذا $x\in I$ یا $y\in I$ که خلاف فرض است.
برعکس، فرض کنید $R-I$ یک زیر مجموعه ی بسته ی ضربی باشد و $xy\in I$ که $x,y\in R$. باید نشان دهیم که $x\in I$ یا $y\in I$. اگر $y\notin I$ و $x\notin I$، آنگاه چون $R-I$ نسبت به ضرب بسته است، لذا $xy\in R-I$ که این خلاف فرض است. بنابراین I اول است.

قضیه 1-1-11 فرض کنید I یک ایده آل از حلقه R و S یک زیرمجموعه بسته ضربی R باشد به طوری که $I\cap S=f$. در این صورت مجموعه

$$T=\{J : I\subseteq J,\ J\cap S=f,\ \text{است}\ R\ \text{یک ایده آل حلقه}\ J\}$$

همراه با رابطه ترتیب جزئی شمول دارای حداقل یک عضو ماکسیمال است.

اثبات: از اینکه $I \in T$ لذا $T \neq f$. همچنین اگر K یک زنجیر از اعضای T باشد و قرار دهیم $a' = \bigcup_{a \in K} a$، آنگاه با توجه به زنجیر بودن K ، a' یک ایده آل از حلقه R است و نیز $a' \cap S = f$ و $I \subseteq a'$. بنابراین $a' \in T$ و برای هر $a \in K$ داریم $a \subseteq a'$. بنابراین K دارای کران بالا در T است. لذا طبق لم زرن T دارای حداقل یک عضو ماکسیمال است. حال فرض کنید P یکی از عضو های ماکسیمال T باشد، از اینکه $P \cap S = f$ بنابراین $P \neq R$.

نتیجه 1-1-12 در حلقه ی نا صفر R، همواره ایده آل های ماکسیمال وجود دارد. در واقع هر ایده آل در R (جز خود R) مشمول یک ایده آل ماکسیمال است.

اثبات: قرار دهید $S = \{1_R\}$، از اینکه S یک زیرمجموعه بسته ضربی حلقه R است و $S \cap I = f$ که درآن $I \neq R$ یک ایده آل دلخواه R است، لذا بنا به قضیه 1-1-11 ایده آل ماکسیمالی از حلقه R وجود دارد به طوری که شامل I است.

1-2 مدول ها، همریختی ها

در این بخش یکی از مهمترین ساختارهای جبری، یعنی مدول ها را بررسی می کنیم. گروههای آبلی، فضاهای برداری و حلقه ها که ساختارهای جبری آشنا هستند، همگی در قالب مدول ها جای دارند، یعنی در واقع ساختار مدولی دارند.

تعریف 1-2-1 مدول A را یک R - مدول یکانی گوییم، هرگاه به ازای هر $a \in A$، $1_R a = a$.

تعریف 1-2-2 فرض کنیم R یک حلقه، A یک R - مدول و B زیر مجموعه ای نا تهی از A باشد. B یک زیر مدول A است مشروط بر اینکه B یک زیر گروه جمعی A بوده و به ازای هر $b \in B$ و هر $r \in R$ ، $rb \in B$.

زیر مدول های حلقه ی R به عنوان یک R - مدول، همان ایده آل های R هستند.

محکی را برای تشخیص زیر مدول بودن زیر مجموعه ای ناتهی از یک مدول ارائه می کنیم:

نتیجه(محک فشرده)3-2-1 فرض کنیم M یک R - مدول و N زیر مجموعه ای ناتهی از M باشد. اگر به ازای هر دو عضو از N مثل x,y و هر عضو از R مثل r، $x+y\in N$ و $rx\in N$، آنگاه N یک زیر مدول M است.

اثبات: می دانیم M گروهی آبلی است و N یک زیر مجموعه ی ناتهی از M. با توجه به شرط های قضیه، نتیجه می گیریم که به ازای هر دو عضو از N مثل x,y، $x-y\in N$. پس N گروهی آبلی است. همچنین، با توجه به اینکه به ازای هر عضو از N مثل x و هر عضو از R مثل r، $rx\in N$، نتیجه می گیریم که N یک زیر گروه M است.

مثال: هر گاه $S\neq \phi$ یک زیر مجموعه از R - مدول M و I یک ایده آل از R باشد، آنگاه $IS=\left\{\sum_{i=1}^{n} r_i s_i : r\in I, s\in S, n\in N\right\}$ یک زیر مدول M است.

قضیه 4-2-1 هر گاه R یک حلقه بوده و B زیر مدولی از R - مدول A باشد، آنگاه تناظر یک به یکی بین مجموعه ی تمام زیر مدول های A ، شامل B و مجموعه ی تمام زیر مدول های A/B وجود دارد که با $C \mapsto C/B$ داده می شود. از این رو هر زیر مدول A/B به شکل C/B است، که در آن C زیر مدولی از A شامل B می باشد.

اثبات: رجوع کنید به [2، قضیه 10-1-4].

تعریف 5-2-1 فرض کنیم M یک R - مدول باشد. دراین صورت پوچساز M را با نماد $ann(M)$ نشان داده و برابر است با $ann(M)=\{r\in R : rm=0$ به ازای هر $m\in M\}$.

تذکر 1-2-6 فرض کنیم M یک R - مدول و I یک ایده آل در R باشد. اگر $I \subseteq ann(M)$، در این صورت Mرا می توان به عنوان یک $\frac{R}{I}$ - مدول در نظر گرفت. همچنین از اینکه $I \subseteq ann\left(\frac{M}{IM}\right)$، لذا می توان R - مدول $\left(\frac{M}{IM}\right)$ را به عنوان $\frac{R}{I}$ - مدول نیز در نظر گرفت.

تذکر 1-2-7 فرض کنیم M یک R - مدول، I یک ایده آل در R و L یک زیرمدول M باشد به طوری که $IM \subseteq L$. در این صورت M/L یک $\frac{R}{I}$ - مدول است.

تعریف 1-2-8 هر گاه X زیر مجموعه ای از مدول A روی حلقه ی R باشد، آنگاه اشتراک تمام زیرمدول های A شامل X، زیر مدول تولید شده به وسیله ی X نام دارد.

نتیجه 1-2-9 اگر A یک R - مدول باشد و $f \neq X \subseteq A$، آنگاه A زیر مدول تولیدشده توسط X است اگر و فقط اگر هر عنصر A را بتوان به صورت یک تر کیب خطی مانند $r_1x_1 + \mathbf{L} + r_nx_n$ که $x_i \in X$ و $r_i \in R$، بیان کرد.

تعریف 1-2-10 اگر X یک مجموعه ی متناهی بوده و B مدول تولیدشده توسط X باشد، گوییم B متناهی مولد است. هر گاه X فقط از یک عنصر تشکیل شده باشد، زیر مدول تولید شده به وسیله ی X را زیر مدول دوری گوییم.

مثال: فرض کنیم R یک حلقه و M یک R - مدول باشد. دراین صورت M مجموعه ی مولدی برای M است. همچنین، R به عنوان R - مدول، دوری است. زیرا، $R = \{r1 : r \in R\}$.

تعریف 1-2-11 هرگاه $\{B_i : i \in I\}$ خانواده ای از زیر مدول های R - مدول A باشد، آنگاه زیر مدول تولید شده توسط $X = \bigcup_{i \in I} B_i$ را مجموع B_i ها می نامیم و با نماد $\sum_{i \in I} B_i$ نشان می دهیم.

تذکر 1-2-12 با استفاده از نمادهای تعریف فوق، داریم:

$$\sum_{i\in I} B_i = \{b_{i_1} + \ldots + b_{i_n} : b_{i_k} \in B_{i_k}, 1 \le k \le n, n \in N\}.$$

تعریف 1-2-13 هر گاه A و B دو R - مدول باشند، تابع $f : A \to B$ را یک R - همریختی می نامیم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

(یک) برای هر $x, y \in A$، $f(x+y) = f(x) + f(y)$،

(دو) برای هر $x \in A$ و هر $r \in R$، $f(rx) = rf(x)$.

مثال: فرض کنیم M یک R - مدول باشد و $x, y \in M$. دراین صورت نگا شت $f : Rx \to M$ داده شده با $f(rx) = ry$، به ازای هر $r \in R$، یک R ـ همریختی است، هرگاه $ann(x) \subseteq ann(y)$.

تعریف 1-2-14 فرض کنیم R و S حلقه بوده و $f : R \to S$ یک همریختی حلقه ها باشد. در این صورت S - مدول A را می توان با تعریف کردن $rx = f(r)x$، به ازای هر $x \in A$ و هر $r \in R$، به یک R - مدول، بدل کرد.

قضیه 1-2-15 هر گاه R یک حلقه، B و A دو R - مدول و $f : A \to B$ یک R - همریختی باشد، آنگاه $\operatorname{Im} f \cong \frac{A}{\ker f}$.

اثبات: $\bar{f} : \frac{A}{\ker f} \to \operatorname{Im} f$ با ضابطه ی $\bar{f}(a + \ker f) = f(a)$ به ازای هر $a \in A$ یک R - همریختی است و به سهولت می توان دید که یک به یک و پوشا نیز می باشد. پس $\operatorname{Im} f \cong \frac{A}{\ker f}$.

در پایان، چند مدو ل ابتدائی را معرفی می کنیم.

تعریف 1-2-16 فرض کنید R یک حلقه باشد. آنگاه R - مدول نا صفر M را ساده گوییم، هرگاه زیرمدول غیر بدیهی نداشته باشد.

تبصره1: هر مدول ساده، نا صفر است.

تبصره2: هر مدول ساده، دوری است.

اثبات: فرض کنیم A یک R - مدول ساده باشد. به ازای هر $0 \neq a \in A$، Ra یک زیر مدول ناصفر A می باشد و لذا با توجه به اینکه A یک R - مدول ساده است داریم $Ra = A$.
توجه کنید که عکس تبصره فوق در حالت کلی درست نیست. یعنی، هر R - مدول دوری، ساده نیست. به عنوان مثال، Z_6 به عنوان Z - مدول، دوری است ولی ساده نیست.

تبصره: گوییم ایده آل $I \neq 0$ از حلقه ی R یک ایده آل مینیمال است، اگر به ازای هر ایده آل J که $0 \subseteq J \subseteq I$، $J = 0$ یا $J = I$.

مثال: $I \neq 0$ یک ایده آل مینیمال از حلقه ی R است اگر و فقط اگر ایده آل ناصفر I، یک R - مدول ساده باشد.

قضیه 1-2-17 فرض کنیم B زیر مجموعه ای از مدول A روی حلقه ی R باشد. در این صورت $ann(B) = \{r \in R : rb = 0$ به ازای هر $b \in B\}$ یک ایده آل R است.

اثبات: رجوع کنید به [2، قضیه 9-1-4].

تبصره1: به ازای هر عنصر b از R - مدول B، $ann\left(b\right)$ $ann\left(B\right)\subseteq ann\left(b\right), ann\left(b\right)=ann\left(Rb\right)$.

تبصره2: اگر B یک R - مدول ساده باشد، در این صورت ایده آل $ann(B)$ یک ایده آل ماکسیمال در R است.

تبصره3: فرض کنید A یک R - مدول باشد. به ازای هر $a\in A$، Ra و $\frac{R}{ann(a)}$ یکریختند.

قضیه 1-2-18 فرض کنیم A مدولی روی حلقه ی R باشد. در این صورت A ساده است اگر و فقط اگر A با R - مدول $\frac{R}{M}$ یکریخت باشد، که در آن M یک ایده آل ماکسیمال از R است.

اثبات: فرض کنیم A مدولی ساده روی حلقه ی R است، دراین صورت به ازای هر $0\neq a\in A$
$A=Ra\cong\frac{R}{ann(a)}$ که بوضوح $ann(a)$ یک ایده آل ماکسیمال از R است.
بر عکس، بدیهی است.

تعریف 1-2-19 R - مدول M وفادار است اگر $ann(M)=0$.

قضیه 1-2-20 فرض کنیم A یک مدول روی دامنه صحیح R بوده و به ازای هر $a\in A$،
$ann(a)=\{r\in R : ra=0\}$. در این صورت:
(یک) $A_t=\{a\in A : ann(a)\neq 0\}$ زیر مدولی از A است.
به علاوه، اگر R یک دامنه ایده آل اصلی و $p\in R$ اول باشد، در این صورت
(دو) هر گاه $p^i a=0$ برای $i\in N$، آنگاه $ann(a)=\langle p^j\rangle$ به طوری که $0\leq j\leq i$.
(سه) هر گاه $ann(a)=\langle p^j\rangle$ برای $j\in N$، آنگاه به ازای هر i به طوری که $0\leq i<j$، $p^i a\neq 0$.

اثبات: رجوع کنید به [2، قضیه 4- 6-4].

تعریف 1-2-21 فرض کنیم A یک مدول روی یک دامنه ی صحیح باشد. زیر مدول A_t در قضیه ی1-2- 20 زیر مدول تابی نام دارد.

گوییم A یک مدول تابی است اگر $A_t = A$ و فارغ از تاب است اگر $A_t = 0$.

مثال: هر مدول آزاد، فارغ از تاب است.

1-3 فضای برداری

تعریف 1-3-1 هر گاه حلقه ی R یک میدان و M یک R - مدول باشد، آنگاه R - مدول M را یک فضای برداری می نامیم.

تعریف 1-3-2 زیر مجموعه ی X از R - مدول A را مستقل خطی گوییم در صورتی که به ازای هر n عنصر متمایز $x_1, \ldots, x_n \in X$ و به ازای هر $r_1, \ldots, r_n \in R$، داشته باشیم

$r_1x_1 + \ldots + r_nx_n = 0 \Rightarrow r_i = \ldots = r_n = 0$.

یک زیر مجموعه ی مستقل خطی از R - مدول A که A را تولید می کند، یک پایه A نام دارد.

قضیه 1-3-3 شرایط زیر بر روی R - مدول F با هم معادلند:

(یک) F دارای پایه ای ناتهی است.

(دو) F جمع مستقیم داخلی خانواده ای از R - مدول های دوری است که هر یک به عنوان R - مدول با R یکریخت است.

(سه F) با مجموع مستقیم نسخه هایی از R - مدول R، یکریخت است.

(چهار) مجموعه ی ناتهی X و تابع $i : X \to F$ با خاصیت زیر وجود دارد:

به ازای هر R - مدول A و تابع $f : X \to A$، همریختی منحصر به فردی مانند $\bar{f} : F \to A$ وجود دارد به طوری که $\bar{f}i = f$.

توجه کنید که مدول F، باخواص بالا، یک مدول آزاد گفته می شود.

اثبات: رجوع کنید به [2، قضیه 1-2-4].

قضیه 1-3-4 هر گاه V یک فضای برداری روی میدان F باشد و X زیر مجموعه ای از V باشد که V را تولید می کند، آنگاه X شامل پایه ای از V می باشد.

اثبات: رجوع کنید به [2، قضیه 5-2-4].

تذکر 1-3-5 قضیه بالا برای مدول های آزاد درست نیست. زیرا اگر Z را به عنوان Z - مدول در نظر بگیریم، آنگاه $X=\{1\}$ پایه ای برای آن است که نشان می دهد Z، به عنوان Z - مدول، آزاد است. از طرفی مجموعه ی $\{2,3\}$ نیز مجموعه مولدی برای Z - مدول Z است، اما شامل پایه ای برای Z نیست. چون $\{2,3\}$ مستقل خطی نیست و هیچ یک از مجموعه های $\{2\},\{3\}$ نمی تواند Z را تولید کند.

قضیه 1-3-6 هرگاه V یک فضای برداری روی میدان F باشد، آنگاه هر دو پایه ی V دارای یک عدد اصلی می باشند.

اثبات: رجوع کنید به [2، قضیه 7-2-4].

تعریف 1-3-7 عدد اصلی هر پایه از فضای برداری V روی میدان F ، بعد V روی F نام دارد و با $\dim V$ نشان می دهیم.

4-1 مدول های انژکتیو و تصویری

تعریف 1-4-1 فرض کنید M یک R - مدول باشد. در این صورت R - مدول U را M - انژکتیو گویند، اگر به ازای هر همریختی یک به یک $f: K \to M$ و هر R - همریختی $g: K \to U$، یک R - همریختی $h: M \to U$ وجود داشته باشد، به طوری که $hof = g$.

تعریف 2-4-1 فرض کنیم M و N دو R - مدول باشند. مجموعه ی تمام همریختی های از M به N را با $Hom_R(M, N)$ نمایش می دهیم، یعنی :

$Hom_R(M,N) = \{j : M \to N$ یک R ـ همریختی است $\}$.

تعریف 3-4-1 اگر C و B و A مدولهایی روی حلقه ی R باشند، آنگاه دنباله $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ را کامل کوتاه گوییم، هرگاه $\mathrm{Im}\, f = \ker g$.

قضیه 4-4-1 فرض کنیم U و M، R - مدول باشند. شرایط زیر با هم معادلند:

(یک) U ، یک M - انژکتیو است.

(دو) برای هر زیر مدول K از M، هر R - همریختی $g: K \to U$ به یک R - همریختی $\bar{g}: M \to U$ توسیع داده می شود.

(سه) برای هر دنباله ی کامل کوتاه $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ از R - مدول ها و R - همریختی ها، دنباله ی

$0 \to Hom_R(N,U) \xrightarrow{g^*} Hom_R(M,U) \xrightarrow{f^*} Hom_R(K,U) \to 0$،

کامل کوتاه است.

اثبات: رجوع کنید به [3، قضیه 8-16-5].

تعریف 1-4-5 گوئیم مدول P روی حلقه R تصویری است، اگر به ازای هر نمودار

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

از R - همریختی ها، که سطر پائین آن کامل است (g برووریختی باشد)، یک R - همریختی مانند $h : P \to A$ وجود داشته باشد به طوری که نمودار زیر تعویض پذیر باشد؛ یعنی، $gh = f$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "g"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

1-5 مدول های آرتینی و نوتری

تعریف 1-5-1 مدول A را نوتری گوییم، اگر به ازای هر زنجیر $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ از زیر مدول های A ، عددی طبیعی مانند n وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $i \geq n$، $A_i = A_n$.

تعریف 1-5-2 مدول B را آرتینی گوییم، اگر به ازای هر زنجیر $B_1 \supseteq B_2 \supseteq \ldots$ از زیر مدول های B، عددی صحیح مانند n وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $i \geq n$ $B_i = B_n$.

تعریف 1-5-3 زیر مدول U از R - مدول M مینیمال گفته می شود، اگر U به عنوان یک R - مدول، ساده باشد.

قضیه 1-5-4 R - مدول A ، نوتری(آرتینی) است اگر و فقط اگر در شرط ماکسیمال (مینیمال) روی زیر مدول ها صدق کند.

اثبات: فرض کنید Σ مجموعه ی همه زیر مدولهای A باشد.

$(\Leftarrow)$ فرض کنیم T یک زیر مجموعه غیر تهی از Σ باشد که دارای عضو ماکسیمال نیست. لذا برای هر x در T عنصر y در T وجود دارد به قسمی که $x \subseteq y$ و $x \neq y$. لذا می توان یک زنجیر صعودی اکید از عضوهای T پیدا کرد و این خلاف فرض است.

$(\Rightarrow)$ اگر زنجیری اکید مانند $x_1 \subset x_2 \subset \ldots$ از زیرمدولهای A وجود داشته باشد، آنگاه مجموعه $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ دارای عضو ماکسیمال نیست و این خلاف فرض است.

تذکر 1-5-5 حلقه های آرتینی، نوتری نیز هستند. ولی عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. همچنین در مورد مدولها، چنین گزاره ای در حالت کلی نادرست است. به عنوان مثال، Z_p^{∞} به عنوان Z - مدول آرتینی است ولی نوتری نیست و حلقه $K[x]$ نوتری هست ولی آرتینی نیست.

قضیه 1-5-6 مدول A روی حلقه R نوتری است اگر و فقط اگر هر زیر مدول A متناهی مولد باشد. به ویژه، حلقه R نوتری است اگر وفقط اگر هر ایده آل R متناهی مولد باشد.

اثبات: فرض کنید A نوتری، B زیر مدول دلخواه A و Σ مجموعه همه زیر مدولهای متناهی تولید شده B باشد. Σ غیر تهی است، زیرا $0 \in \Sigma$ و لذا باتوجه به نوتری بودن A، Σ دارای عضو ماکسیمال مثلا B_0 است. باید ثابت کنیم که $B = B_0$. درغیر اینصورت، عنصر $x \in B$ وجود دارد به طوری که $x \notin B_0$. حال زیر مدول $B_0 + Rx$ متناهی تولید شده و شامل B_0 است که این خلاف ماکسیمال بودن B_0 است. لذا $B = B_0$ و در نتیجه B متناهی تولید شده است.

برعکس، فرض کنید $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ یک زنجیرصعودی از زیر مدولهای A باشد و قرار دهید $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. در این صورت B یک زیر مدول A ا ست و لذا بنا بر فرض متناهی تولید شده است. فرض کنید $B = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$، در نتیجه برای هر x_i عدد طبیعی n_i وجود دارد به طوری

که $x_i \in A_{n_i}$. حال فرض کنید $n = Max\,\{n_i\}_{i=1}^{k}$، بنابراین $B \subseteq A_n$ و درنتیجه $A_n = A_{n+1} = \cdots$.
لذا A نوتری است.

لم 1-5-7 فرض کنیم H، K و L، R - مدول باشند و $K \subseteq H$. در این صورت داریم:
$H \cap (K+L) = K + (H \cap L)$.

اثبات: با استفاده از عضو گیری، اثبات بدیهی ا ست.

قضیه 1-5-8 فرض کنیم M، M' و M''، R - مدول باشند و دنباله ی
$0 \to M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ از R - مدول ها و R - همریختی ها کامل باشد. در این صورت:

(یک) M نوتری است اگر و فقط اگر M' و M'' نوتری باشند.

(دو) M آرتینی است اگر و فقط اگر M' و M'' آرتینی باشند.

اثبات: (یک) از اینکه دنباله مفروض کامل است، پس f یک به یک و g پوشا است، لذا می توان مدول M'را به عنوان زیر مدول M و مدول M'' را مساوی M/M' در نظر گرفت. بنابراین دنباله کوتاه را می توان به صورت $0 \to M' \to M \to \frac{M}{M'} \to 0$ نوشت. فرض کنید M نوتری است، از اینکه زیر مدول M' یک زیر مدول M است، لذا M' نیز نوتری است. حال فرض کنید زنجیر زیر از زیر مدول های $M'' = \frac{M}{M'}$ باشد:

$$K_1'' \subseteq K_2'' \subseteq K_3'' \subseteq \cdots$$

از اینکه بین زیر مدول های $\frac{M}{M'}$ و زیر مدو لهای M که M' را در بر دارد، تناظر یک به یک برقرار است، لذا زنجیر زیر را از زیر مدول ها M داریم:

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \cdots$$