دانشکده علوم

گروه ریاضی محض

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

$p-$پوچ توانی و حل پذیری گروه ها

استاد راهنما

دکتر هوشنگ بهروش

دانشجو

سعیده کریم بگلو

۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

این پایان نامه را تقدیم به پدرم و مادر

مهربانم می کنم و آنهایی که

می خواهند بیشتر بدانند

اگر خدا قرآن را از عالم بالا برای سنجش راست و دروغ اعمالمان برای انسانها هدیه فرستادند نعمت بی پایانش را دریغ نداشت و عالم ریاضی را که یک دستگاه قیاسی بزرگ است در این دنیا بوجود آورد. باشد که او را تا هستیم شکر گوییم.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. وظیفه ی خود می دانم که از برادران و خواهر نازنینم سپاسگذاری را داشته باشم و خالصانه از جناب آقای دکتر عبادیان استاد راهنمای عزیز کمال تشکر و قدر دانی داشته باشم همچنین از جناب آقایان دکتر استادباشی ، دکتر آقالاری و دکتر شمس تشکر و سپاسگزاری را دارم.

ازکلیه استادهای گرامی دوران تحصیلم، مخصوصاً از آقای دکتراصغر اسکویی، دکتررضا سزیده که در مدت تحصیلات اینجانب زحمات فراوانی را متحمل شده‌اند، تشکر می‌نمایم.

و در پایان از دوست بسیار صمیمی خانم مهسا سلیمانی نیا نهایت تشکر وسپاسگذاری دارم

سعدی محمدامینی
شهریور ۱۳۹۱

نام خانوادگی: محمدامینی نام:سعدی

عنوان پایان‌نامه: گروههای که سرشتهای تحویل ناپذیری غیر خطی مرتبه عناصر یا دسته های مزدوج را جدا می کند.

استاد راهنما: دکتر بهروش

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش:جبر

دانشگاه: ارومیه دانشکده: علوم ریاضی

تاریخ فارغ‌التحصیلی: تابستان ۱۳۹۱ تعداد صفحه:...

کلیدواژه‌ها: گروه ، سرشت

چکیده در این پایان نامه با استفاده از پیروی دیفرانسیل بیروت- بوکات سعی می کنیم که مرتبه ای از توابع قویا ستاره گون برای کلاس توابع قویا محدب با مرتبه ی معیین را پیدا کنیم.

فهرست مطالب

چکیده

می‌دانیم که زیرگروه های پوچ توان، حل پذیر هستند. فرض کنیم زیرگروه های ماکزیمال غیر نرمال گروه متناهی G پوچ توان باشند. نشان خواهیم داد که G حل پذیر است و برای هر p ای $p-$پوچ توان باشد.

همچنین نشان خواهیم داد که اگر G پوچ توان نباشد، آنگاه مقسوم علیه های اول مرتبه G بین ۲ و k+۲ است به‌طوری که k تعداد زیرگروه های نرمال ماکسیمال هستند که پوچ توان نمی‌باشند.

پیشگفتار

گروه متناهی G را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $|G|$ نشان دهنده مرتبه یک گروه متناهی G است و $\pi(G)$ مجموعه مقسوم علیه های اول مشمول در $|G|$ باشد. می‌دانیم که $H < G$ یک زیرگروه ماکزیمال از G است.

گروه متناهی G را یک گروه ناپوچ توان مینیمال می‌نامیم هرگاه هر زیرگروه محض آن پوچ توان باشد، اما خود گروه پوچ توان نباشد.

در این پایان نامه $p-$پوچ توانی و حل پذیری گروه های متناهی را از طریق پوچ توانی زیرگروه های ماکزیمال بررسی می‌کنیم و همچنین گروه های متناهی را با برخی زیرگروه های ناپوچ توان بررسی خواهیم کرد که اجتماع آنها کل بخش پوچ توان غیر نرمال از گروه را پوشش می‌دهد و تعدادی از مشخصه های گروه های متناهی را در نظر می‌گیریم که زیرگروه های ماکزیمال غیر نرمال آنها پوچ توان هستند و نشان می‌دهیم این گروه ها شامل گروه های ناپوچ توان مینیمال می‌باشند.

در این پایان نامه با استفاده از قضیه (۱.۳.۳) و (۶.۳.۳) و مرجع [۸] به مطالعه خواص $p-$پوچ توان‌ها می‌پردازیم. در واقع شرایطی را بررسی می‌کنیم که در آن یک گروه می‌تواند $p-$پوچ توان باشد.

این پایان نامه مشتمل بر سه فصل است. در فصل اول به بیان تعاریف و لم های مقدماتی می‌پردازیم که بیشتر هدف از ارائه این فصل یاد آوری مطالبی است که در گذشته مورد مطالعه قرار گرفته اند.

در فصل دوم گامی جلوتر نهاده و با استفاده از مراجع [۱] و [۸] و [۹] قضایایی را مطرح

می‌کنیم که اساسی ترند و ما را در اثبات قضایای فصل سه یاری می‌کنند. به طور مثال، تعاریف مهمی مانند کواترنیون- آزاد، $p-$پوچ توانی و قضایای اساسی مانند قضیه (۱۸.۱.۲)، قضیه فروبینوس (۱۹.۱.۲) و قضیه تامپسون (۲۳.۱.۲) را بیان می‌کنیم.

در نهایت در فصل سوم که قسمت اصلی این پایان نامه می‌باشد، $p-$پوچ توانی و حل پذیری گروه ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم و به اثبات قضیه اصلی خواهیم پرداخت.

فصل ۱
مفاهیم اولیه

مقدمه ای بر نظریه گروهای مقدماتی

در این فصل مفاهیم مقدماتی نظریه گروه ها را مرور خواهیم کرد، هدف ما علاوه بر یاد آوری فراهم کردن اصطلاحات، علامت ها و مقدماتی است که در فصل های آتی مورد نیاز خواهد بود. در این پایان نامه تمام گروه ها، متناهی فرض شده اند.

تعریف ۱.۰.۱. فرض می‌کنیم که G یک گروه و X مجموعه‌ی غیر تهی باشد گوییم که G روی X عمل می‌کند اگر تابع $G \times X \longrightarrow X$ وجود داشته باشد به‌طوری که به ازای هر $x \in X$ و هر $g_۱, g_۲ \in G$ داشته باشیم:

$$x(g_۱g_۲) = (xg_۱)g_۲$$

و

$$x۱ = x.$$

لم ۱.۰.۲. *فرض کنیم G یک گروه باشد همچنین H و M زیرگروهایی از آن باشند به قسمی که $H \trianglelefteq G$ و $H \leq M \leq G$. در این صورت $H \trianglelefteq M$.*

برهان. چون $H \trianglelefteq G$ پس برای هر $g \in G$ و $h \in H$، $g^{-1}hg \in H$. با توجه به اینکه $M \leq G$ برای هر $m \in M$ و $h \in H$، خواهیم داشت $m^{-1}hm \in H$. بنابراین $H \trianglelefteq M$. □

قضیه ۱.۰.۳. *اگر $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$، آنگاه $HK \trianglelefteq G$.*

برهان. به [[۱۶]، قضیه ۳.۳۹] مراجعه شود. □

تعریف ۱.۰.۴. جابه‌جاگر [1] یک زوج مرتب g_1 , g_2 از اعضای G، عبارت است از عضو $[g_1, g_2] = g_1^{-1}g_2^{-1}g_1g_2 \in G$ به موجب این تعریف بلا فاصله قضیه زیر را خواهیم داشت:

قضیه ۱.۰.۵. *فرض می‌کنیم $g_1, g_2 \in G$. در این صورت*

(۱) $[g_2, g_1] = [g_1, g_2]^{-1}$.

(۲) $[g_1, g_2] = 1$ *اگرو تنها اگر g_1، g_2 جابجایی پذیر باشند.*

تعریف ۱.۰.۶. فرض می‌کنیم $HK \leq G$. در این صورت زیرگروه جابه‌جاگر متناظر با H و K عبارت است از

$$[H, K] = \langle [H, K] : h \in H, k \in K \rangle \leq G.$$

تعریف ۱.۰.۷. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت

$$G' = [G, G] = \langle [a, b] | a, b \in G \rangle$$

را زیرگروه مشتق [2] G گویند.

---

[1] commutater
[2] Derived sub group

لم ۸.۰.۱. *فرض می‌کنیم G گروهی دلخواه باشد و $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$. در این صورت $[H,K] \leq H \cap K$. به ویژه، اگر $H \cap K = 1$ آنگاه هر عضو H با هر عضو K جابه‌جا می‌شود.*

برهان. به [[۶]، لم ۵.۳.۳]مراجعه شود. □

قضیه ۹.۰.۱. *(قضیه دوم یکریختی) فرض کنیم G یک گروه باشد، $N \trianglelefteq G$ و $K \leq G$ در این صورت $K/(N \cap K) \cong NK/N$.*

برهان. به [[۱۵]، قضیه ۱۹.۹.۳] مراجعه شود. □

قضیه ۱۰.۰.۱. *(قضیه سوم یکریختی) فرض کنیم G گروه و $HK \trianglelefteq G$ به‌طوری که $K \leq H$. در این صورت $H/K \trianglelefteq G/K$ و $(G/K)(H/K) \cong G/H$.*

برهان. به [[۱۵]، لم ۵.۳.۳]مراجعه شود. □

تعریف ۱۱.۰.۱. (زیرگروه ما کسیمال) زیرگروه H از G سره (یا محض [۳]) می‌نامیم هرگاه داشته باشیم $H \neq G$. همچنین فرض کنیم G یک گروه و M یک گروه سره از G باشد. در این صورت M را یک زیرگروه ماکزیمال از G گویند، هرگاه $M \leq H \leq G$ نتیجه دهد که $M = H$ یا $H = G$. به عبارت دیگر اگر بین M و G زیرگروه دیگری (بجز خود M و G) از G نتواند قرار گیرد.

لم ۱۲.۰.۱. *فرض می‌کنیم $K \leq M < G$ به‌طوری که $K \trianglelefteq G$. در این صورت M/K زیرگروه ماکزیمال از G/K است اگر و تنها اگر M زیرگروهی ماکزیمال از G باشد.*

[۳] Proper subgroup

برهان. فرض می‌کنیم M/K زیرگروهی ماکزیمال از G/K باشد. اگر $M < L \leq G$، آنگاه $M/K < L/K < G/K$ که بنا به فرض $L/K = G/K$. لذا $L = G$. حال اگر M زیرگروهی ماکزیمال از G باشد و $M/K < L/K < G/K$، آنگاه $M < L \leqslant G$، لذا $L = G$. □

تعریف ۱.۰.۱۳. (زیرگروه مینیمال) زیر گروه $H \neq 1$ را زیرگروه مینیمال از G می‌نامند، هرگاه هیچ زیرگروه غیر بدیهی از G وجود نداشته باشد، که H شامل آن باشد.

تعریف ۱.۰.۱۴. (زیرگروه نرمال ماکزیمال [۴]) فرض کنیم $M \lhd G$. در این صورت M را زیرگروه نرمال ماکزیمال G می‌گوییم اگر زیرگروه نرمال K از G وجود نداشته باشد، به قسمی که $M < K < G$.

لم ۱.۰.۱۵. *فرض کنیم $M \trianglelefteq G$. در این صورت M یک زیرگروه نرمال ماکزیمال G است اگر و تنها اگر مرتبه‌ی G/M عدد اول باشد.*

برهان. به [[۶]، قضیه ۲.۱۱]مراجعه شود. □

تعریف ۱.۰.۱۶. (زیرگروه نرمال مینیمال [۵]) فرض کنیم G یک گروه باشد. زیرگروه نرمال غیر بدیهی H را یک زیرگروه نرمال مینیمال G گوییم هرگاه H حاوی هیچ زیرگروه نرمال G به جز خود و ۱ نباشد. به عبارت دیگر، هرگاه $N \subseteq H$ و $N \lhd G$ آنگاه $N = H$ یا $N = 1$.

قضیه ۱.۰.۱۷. *فرض کنیم G دارای یک سری اصلی باشد. همچنین فرض کنیم که H و K زیرگرو ه های نرمالی از G باشد به‌طوری که $K < H$. در این صورت H/K یک عامل اصلی G است اگر و تنها اگر H/K یک زیرگروه نرمال مینیمال G/K باشد.*

[۴] sub groupl maximal normal
[۵] sub group minimal normal

برهان. به [[۶]، قضیه ۳۶.۷]مراجعه شود. □

تعریف ۱.۰.۱۸. فرض کنیم G یک گروه باشد. زیرگروه فراتینی[۶] G که آن را با $\Phi(G)$ نشان می‌دهند به صورت زیر تعریف می‌شود:
$\Phi(G) = G$ اگر G دارای زیرگروه ماکزیمال نباشد، و $\Phi(G)$ اشتراک تمام زیرگروه های ماکزیمال G است، اگر G دارای زیرگروه ماکزیمال باشد.

لم ۱.۰.۱۹. $\Phi(G) \lhd G$.

برهان. به [[۷]، لم ۱۰.۱۳]مراجعه شود. □

لم ۱.۰.۲۰. *فرض کنیم G یک گروه باشد و $N \trianglelefteq G$. در این صورت $\Phi(N) \leqslant \Phi(G)$.*

برهان. به [[۶]، لم ۷.۱۱]مراجعه شود. □

تعریف ۱.۰.۲۱. فرض کنیم H زیرگروهی از یک گروه G باشد. در این صورت مجموعه

$$N_G(H) = \{g \in G : g^{-1} \cdot H \cdot g = H\}$$

را نرمالساز[۷] H در G می‌نامیم.

قضیه ۱.۰.۲۲. *اگر H زیرگروه G باشد، آنگاه $H \trianglelefteq N_G(H)$.*

برهان. به [[۶]، قضیه ۵۵.۳]مراجعه شود. □

قضیه ۱.۰.۲۳. *H زیرگروه نرمال G است اگر و تنها اگر $N_G(H) = G$.*

برهان. به [[۶]، قضیه ۵۶.۳]مراجعه شود. □

[۶] Frattini
[۷] Normalizer

تعریف ۲۴.۰.۱. فرض کنیم G گروه باشد. در این صورت مرکزساز[۸] $x \in G$ را با $C_G(x)$ نمایش می‌دهیم و آن راچنین تعریف می‌کنیم:

$$C_G(x) = \{g \in G : gx = xg\}.$$

فرض کنیم X زیر مجموعه‌ای از G باشد و در این صورت مرکز ساز X در G را با $C_G(X)$ نمایش می‌دهیم و آن را چنین تعریف می‌کنیم:

$$C_G(X) = \bigcap_{x \in X} C_G(x)$$

همچنین مرکز گروه[۹] G را با $Z(G)$ نمایش می‌دهیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z(G) = \{g \in G : \forall x \in G, xg = gx\}.$$

لم ۲۵.۰.۱. *برای* $C(a) = C_G(x) = \{x \in G : ax = xa\}$ *فرض کنیم* $x \in G$ *باشد،* $C_G(x)$ *زیرگروه* G *است.*

برهان. با توجه به تعریف مرکز ساز، $e \in C_G(x)$ اگر $x, y \in C_G(X)$ باشد، در این صورت داریم،

$$(xy)g = x(yg) = x(gy) = (gx)y = g(xy)$$

در نتیجه $xy \in C_G(x)$ همچنین $xg = gx$ آنگاه $x^{-1}g = gx^{-1}$ بنابراین $C_G(x)$ زیرگروه G است. □

نتیجه ۲۶.۰.۱. *هرگاه* G *یک گروه متناهی و* p *کوچکترین مقسوم علیه اول* $|G|$ *و* K *یک زیرگروه نرمال* G *از مرتبه* p *باشد، آنگاه* $K \leqslant Z(G)$.

[۸] Centralizer
[۹] Centre

برهان. به [[۶]، لم ۳۹.۴]مراجعه شود. $\square$

تعریف ۲۷.۰.۱. فرض کنیم G یک گروه دلخواه، $H \leq G$ و $g \in G$ باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$H^g = \{h^g : g \in H\}.$$

تعریف ۲۸.۰.۱. فرض می‌کنیم G و H گروه باشند و e_G و e_H به ترتیب عضوهای خنثی گروه ها را نشان می‌دهند. مجموعه $G \times H$ را چنین تعر یف می‌کنیم:

$$G \times H = \{(g,h) : g \in G, h \in H\}$$

حاصل ضرب $(g_۱, h_۱)$ و $(g_۲, h_۲)$ را به‌طوری که $g_۱, g_۲ \in G$ و $h_۱, h_۲ \in H$ چنین تعر یف می‌کنیم:

$$G \times H = (g_۱, h_۱)(g_۲, h_۲) = (g_۱ g_۲, h_۱ h_۲)$$

با عمل تعریف شده در بالا را حاصل ضرب مستقیم گروه‌های G و H می‌نامیم.

لم ۲۹.۰.۱. *فرض کنیم H و K زیرگروه هایی از گروه G باشند به‌طوری که:*

(۱) $G = HK$.

(۲) $hk = kh$ *برای هر* $k \in K$ *و هر* $h \in H$.

(۳) $H \cap K = \{۱\}$.

در این صورت $G \cong H \times K$.

برهان. به [[۶]، لم ۳۴.۲]مراجعه شود. $\square$

تعریف ۳۰.۰.۱. اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد، آنگاه مجموعه‌ی تمام جایگشت های مجموعه $\{۱, ۲, ..., n\}$ تحت، عمل ترکیب، به عنوان عمل ضرب، گروه متقارن [۱۰] درجه

[۱۰] Symmetric group

n نامیده می‌شود که با S_n نمایش می‌دهیم، داریم $|S_n| = n!$.

تعریف ۳۱.۰.۱. یک ایزومورفیسم از هر گروه دلخواه G به خودش را یک خود ریختی [۱۱] می‌نامیم. مجموعه تمام خود ریختی های گروه G را با $\mathrm{Aut}(G)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۲.۰.۱. یک خود ریختی از یک گروه G یک همریختی مانند $\phi : G \longrightarrow G$ است که یک زیرگروه H از G مشخصه در G می‌نامیم که توسط $H \text{ char } G$ نشان داده می‌شود. اگر $\phi(H) = H$.

لم ۳۳.۰.۱. *فرض می‌کنیم G یک گروه باشد. هرگاه $H \trianglelefteq G$ و K یک زیرگروه مشخصه‌ی H باشند، آنگاه $K \trianglelefteq G$.*

برهان. به [[۶]، لم ۱۵.۳]مراجعه شود. $\square$

تعریف ۳۴.۰.۱. فرض کنیم F یک میدان و n عدد طبیعی باشد. مجموعه همه ماتریس های معکوس پذیر $n \times n$ را که درایه های هر یک از آنها در F اند را با $\mathrm{Gl}(n, F)$ نشان داده و آن را گروه خطی عام [۱۲] می‌نامیم. همچنین مجموعه‌ی همه اعضایی از $\mathrm{Gl}(n, F)$ که دترمینال هر یک از آن ها برابر۱ است، زیرگروهی از $\mathrm{Gl}(n, F)$ است . که آنرا با $\mathrm{Sl}(n, F)$ نشان داده و گروه خطی خاص [۱۳] از درجه n روی F می‌نامیم .

تعریف ۳۵.۰.۱. گروه معرفی شده در زیر گروه چند وجهی از مرتبه $۲m$ نامیده می‌شود،

$$D_{۲m} = \langle x, y : x^m = y^۲ = ۱, y^{-۱}xy = x^{-۱} \rangle.$$

[۱۱] Automorphism
[۱۲] general linear
[۱۳] Special linear

تعریف ۳۶.۰.۱. گروه معرفی شده در زیر، گروه کواترنیون تعمیم یافته از مرتبه $4m$ نامیده می‌شود.

$$Q_{4m} = \langle a, b : a^{2m} = 1, b^2 = a^m, bab^{-1} = a^{-1} \rangle.$$

نتیجه ۳۷.۰.۱. *یک نمایش برای گروه کواترنیون Q_8 عبارت است*

$$Q_8 = \langle x, y | x^4 = 1, x^2 = y^2, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle.$$

تعریف ۳۸.۰.۱. فرض کنید m عدد صحیح مثبت باشد. گروه نیم دووجهی از مرتبه 2^m را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$SD_{2^m} = \langle a, b : a^{2^{m-1}} = 1, a^{2^{m-2}} = b^2, bab^{-1} = a^{-1} \rangle.$$

۱.۱ $p-$گروه های متناهی و قضایای سیلو

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و p یک عدد اول باشد. گروه G را یک $p-$گروه [۱۴] می‌نامیم در صورتی که مرتبه هر عضو توان مثبتی از p باشد.

نتیجه ۲.۱.۱. *اگر G یک $p-$گروه متناهی باشد، آنگاه مرتبه G به صورت p^α است که در آن α یک عدد صحیح نا منفی است.*

تعریف ۳.۱.۱. گروه آبلی A را مقدماتی [۱۵] گوییم، هرگاه یک عدد اول مانند p وجود داشته باشد به‌طوری که به ازای هر $a \in A$،

$$a^p = 1.$$

[۱۴] $-p$ group
[۱۵] elementary

لم ۴.۱.۱. *فرض کنیم G یک $p-$گروه باشد. در این صورت ۱ $= \phi(G)$ اگر و تنها اگر G آبلی مقد ماتی باشد.*

برهان. به [[۱۶]، لم ۹.۱۱] مراجعه شود. □

لم ۵.۱.۱. *اگر H یک $p-$زیرگروه از یک گروه متناهی G باشد، آنگاه*

$$[N_G(H) : H] \equiv [G : H] \bmod p.$$

برهان. به [[۱۵] ، لم ۶.۱۳.۳] مراجعه شود. □

تعریف ۶.۱.۱. قرار داد می‌کنیم که π همواره معرف مجموعه‌ای از اعداد اول است.

(۱) عدد صحیح n را $\pi-$عدد می‌گوییم اگر مقسوم علیه اول n به π تعلق داشته باشد.

(۲) فرض کنیم G گروه متناهی باشد. G را یک π گروه می‌نامیم اگر $|G|$، $\pi-$عدد باشد.

(۳) فرض کنیم $g \in G$ دارای مرتبه‌ای متناهی باشد. g را یک $\pi-$عضو در G می‌نامیم هرگاه $|G|$ یک $\pi-$عدد باشد

قضیه ۷.۱.۱. *اگر G ، $\pi-$گروه متناهی باشد، آنگاه کلیه زیرگروه ها و گروه های خارج قسمت G ، $\pi-$گروه هستند.*

برهان. کلیه زیرگروه ها و گروه های خارج قسمت G، مرتبه G را عاد می‌کنند. □

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم G گروه متناهی باشد و $|G| = p^n \cdot m$ به‌طوری که p عددیست اول و ۱ $= (p, m)$ و ۱ $\geqslant n$. در این صورت هر زیرگروه G که از مرتبه p^n باشد را یک $p-$زیرگروه سیلو[۱۶] G می‌نامند. مجموعه تمام $p-$زیرگروه های سیلو G را با سمبل $\mathrm{Syl_p}(G)$ نمایش می‌دهیم.

[۱۶] sylow sub group