

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه علامه طباطبائی  
دانشکده‌ی علوم ریاضی و رایانه

پایان‌نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

ریاضیات مالی

## عنوان

**فرایند لوی زمان تغییر یافته و کاربرد آن در قیمت‌گذاری  
اختیارات اروپایی**

پژوهش‌گر

**حدیث بارانی**

استاد راهنما

**جناب آقای دکتر رضا پورطاهری**

استاد مشاور

**جناب آقای دکتر محمد جلوداری ممقانی**

آذر ۱۳۹۳

کلیه حقوق مادی و معنوی اعم از چاپ و تکثیر، نسخه‌برداری، ترجمه، اقتباس و ... از این پایان‌نامه

برای دانشگاه علامه طباطبائی محفوظ است. نقل مطالب با ذکر منبع مانعی ندارد.

## تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب حدیث بارانی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضیات مالی متعهد می‌شوم: در نگارش پایان‌نامه‌ی تحصیلی خود با عنوان:

« فرایند لوی زمان تغییر یافته و کاربرد آن در قیمت‌گذاری اختیارات اروپایی »

امانت را رعایت کرده‌ام، نظرات مطرح شده در پایان‌نامه متعلق به اینجانب است و در تمامی مواردی که به نحوی از دیدگاه‌های دیگران بهره گرفته‌ام، منبع یا منابع هر یک را به دقت ذکر کرده‌ام. چنانچه پس از تسلیم پایان‌نامه، برای دفاع و یا حتی پس از فراغت از تحصیل معلوم شود اصل امانت‌داری و حقوق معنوی پژوهشگران، صاحب‌نظران و استادان را رعایت نکرده‌ام، دانشگاه می‌تواند موضوع را در مراجع ذیصلاح پیگیری نموده و نسبت به ابطال حقوق مترتب بر آن، اقدام لازم را انجام دهد.

نام و نام خانوادگی دانشجو:

امضاء و تاریخ:

## تقدیم

این پایان نامه را ضمن تشکر و سپاس بی کران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می نمایم به:  
محضرات زشمنیدر و مادر عزیزم به خاطر همه ی تلاش های محبت آمیزی که در دوران مختلف  
زندگی ام انجام داده اند و بامهربانی چگونه زیستن را به من آموخته اند؛  
به استادان فرزانه و فریخته ای که در راه کسب علم و معرفت مراباری نمودند؛

و

به دیگر اعضای خانواده ام که نفس خیر و دعای روح پرورشان بدرقه ی راهم بود.

## سپاسگزاری

سپاس خدای را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند.

بدون شک جایگاه و منزلت معلم اجلّ از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه‌ی او با زبان قاصد و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آن جایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تأمین می‌کند و بر حسب وظیفه از باب «من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزّ و جلّ» بر خود لازم می‌دانم:

از پدر و مادر عزیزم این دو معلم بزرگوار که همواره بر کوتاهی و درشتی من قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یآوری بی‌چشم‌داشت برای من بوده‌اند؛

از استاد فرزانه جناب آقای دکتر پورطاهری که در کمال سعه‌ی صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی بر من دریغ نمودند و زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند؛

از استاد گران‌قدر جناب آقای دکتر جلوداری ممقانی که زحمت مشاوره این پایان‌نامه را در حالی متقبل شدند که بدون مساعدت ایشان این امر به نتیجه مطلوب نمی‌رسید؛

از استاد گرمی جناب آقای دکتر بادامچی‌زاده که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند؛

و از تک‌تک اعضای خانواده‌ام که با همراهی صمیمانه‌ی خود مایه‌ی دلگرمی‌ام بوده‌اند؛

کمال تشکر و قدردانی را دارم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

## چکیده

قیمت‌گذاری اختیار معامله یکی از برجسته‌ترین مباحث مطرح در ریاضیات مالی است. مدل بلک-شولز مشهورترین مدل زمان پیوسته‌ی قیمت اختیار است که در آن توزیع لگاریتم بازده دارایی نرمال و تلاطم ثابت است. مدل بلک-شولز نمی‌تواند ویژگی‌های آماری سری‌های زمانی مالی را در تمام حالات بیان کند. برای مثال قیمت‌های حاصل از این مدل با داده‌های بازارهای مالی سازگار نیستند. مدل‌های فراوانی به عنوان جایگزین این مدل پیشنهاد شده‌اند. فرایندهای لوی که ساده‌ترین مدل‌های مارکوف با پرش هستند، جایگزین مناسبی برای این منظور می‌باشند. این فرایندها دارای توزیع بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیرند که قادر به نمایش چولگی و کشیدگی اضافی است. از طرفی با اعمال تغییر زمان تصادفی بر اجزای فرایندهای لوی، فرایند لوی زمان تغییر یافته پدید می‌آید. تبعی نمودن که عبارت است از ساخت فرایند لوی زمان تغییر یافته با استفاده از فرایند لوی افزایشی دیگر، در این پایان‌نامه نقش محوری دارد.

این پایان‌نامه با معرفی فرایند لوی و فرایند لوی زمان تغییر یافته، و به طور خاص فرایند لوی تبعی شده، تلاشی برای فراهم نمودن ابزارهای مدل‌های قیمت‌گذاری اختیارات است. لذا ابتدا به معرفی کامل این فرایندها می‌پردازیم سپس با استفاده از اندازه مارتینگل معادل چگونگی قیمت‌گذاری اختیارات اروپایی با استفاده از این فرایندها را شرح می‌دهیم.

**واژگان کلیدی:** فرایند لوی، توزیع بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر، تغییر زمان، فرایند لوی زمان تغییر یافته، تبعی نمودن، اندازه مارتینگل معادل، قیمت‌گذاری اختیار اروپایی.

# فهرست مطالب

ز	فهرست شکل‌ها
ح	نمادها و علائم اختصاری
۸۴	مراجع
۸۸	واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

## ۱ کلیات

۱	۱-۱ مقدمه
۱	۲-۱ بیان مسئله
۵	۳-۱ پیشینه‌ی موضوع
۶	۴-۱ اهمیت و ضرورت موضوع
۷	۵-۱ هدف تحقیق
۷	۶-۱ مفاهیم و تعاریف اولیه
۱۲	۱-۶-۱ تابع مشخصه
۱۳	۲-۶-۲ اندازه‌های تصادفی
۱۴	۳-۶-۱ اندازه احتمال و برخی مفاهیم مربوط به آن
۱۵	۷-۱ بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیری
۱۸	۸-۱ مبانی قیمت‌گذاری



۹-۱ چشم انداز فصل‌های آینده ..... ۲۱

## ۲ فرایندهای لوی

۱-۲ مقدمه ..... ۲۳

۲-۲ آشنایی و اهمیت فرایندهای لوی ..... ۲۴

۱-۲-۲ مفهوم پرش و اندازه لوی ..... ۲۸

۲-۲-۲ مثال‌هایی از فرایندهای لوی ..... ۲۸

۱-۲-۲-۲ حرکت براونی ..... ۲۸

۲-۲-۲-۲ فرایند پواسون ..... ۲۹

۳-۲-۲-۲ فرایند پواسون مرکب ..... ۳۰

۴-۲-۲-۲ فرایند لوی هم‌بافته ..... ۳۰

۵-۲-۲-۲ فرایندهای لوی پایدار ..... ۳۱

۶-۲-۲-۲ فرایند پایدار خوش‌خو ..... ۳۲

۷-۲-۲-۲ تبعی‌کننده‌ها ..... ۳۲

۳-۲ فرایندهای لوی و توزیع بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر ..... ۳۲

۴-۲ ویژگی‌های مسیری فرایندهای لوی ..... ۳۴

۵-۲ فرایندهای پرش انتشار و پرش محض لوی ..... ۳۵

۱-۵-۲ فرایندهای پرش-انتشار ..... ۳۷

۲-۵-۲ فرایندهای پرش محض ..... ۴۱

۱-۲-۵-۲ فرایند گاوسی معکوس ( $IG$ ) ..... ۴۲

۲-۲-۵-۲ فرایند گاما ..... ۴۲

۳-۲-۵-۲ فرایند گاوسی معکوس نرمال ( $NIG$ ) ..... ۴۳

۴-۲-۵-۲ فرایند واریانس گاما ( $VG$ ) ..... ۴۳

۵-۲-۵-۲ فرایند  $CGMY$  ..... ۴۵

۶-۲-۵-۲ فرایند  $Meixner$  ..... ۴۵

۴۶.....	فرایندهای لوی و مارتینگل‌ها	۶-۲
۴۷.....	چکیده‌ی فصل	۷-۲
<b>۳ فرایند لوی زمان تغییر یافته</b>		
۴۸.....	مقدمه	۱-۳
۴۹.....	تغییر زمان	۲-۳
۴۹.....	فرایند تصادفی زمان تغییر یافته	۱-۲-۳
۴۹.....	فرایند لوی زمان تغییر یافته	۳-۳
۵۰.....	تابع مشخصه‌ی فرایند لوی زمان تغییر یافته	۱-۳-۳
۵۰.....	تبعی‌کننده‌ها	۴-۳
۵۱.....	ویژگی‌های تبعی‌کننده‌ها	۱-۴-۳
۵۲.....	مثال‌هایی از تبعی‌کننده‌ها	۲-۴-۳
۵۲.....	تبعی‌کننده‌ی پایدار	۱-۲-۴-۳
۵۳.....	تبعی‌کننده‌ی پایدار خوش‌خو	۲-۲-۴-۳
۵۴.....	تبعی‌کننده‌ی گاوسی معکوس	۳-۲-۴-۳
۵۴.....	تبعی‌کننده‌ی گاما	۴-۲-۴-۳
۵۵.....	تبعی نمودن	۵-۳
۵۵.....	تبعی نمودن فرایندهای لوی	۱-۵-۳
۵۹.....	حرکت براونی زمان تغییر یافته	۶-۳
۶۰.....	حرکت براونی تبعی شده	۱-۶-۳
۶۲.....	مدل‌های مبتنی بر حرکت براونی تبعی شده	۲-۶-۳
۶۲.....	فرایند گاوسی معکوس به عنوان حرکت براونی تبعی شده	۱-۲-۶-۳
۶۴.....	فرایند واریانس گاما به عنوان حرکت براونی تبعی شده	۲-۲-۶-۳
۶۵.....	چکیده‌ی فصل	۷-۳

#### ۴ قیمت‌گذاری اختیار اروپایی

۶۶.....	مقدمه	۱-۴
۶۷.....	مدل بازار لوی نمایی	۲-۴
۶۸.....	تغییر اندازه برای فرایندهای لوی	۱-۲-۴
۶۸.....	اندازه مارتینگل تبدیل اشر	۱-۱-۲-۴
۷۱.....	قیمت گذاری تحت مدل لوی نمایی	۲-۲-۴
۷۲.....	قیمت گذاری اختیار با استفاده از تبدیل لاپلاس	۱-۲-۲-۴
۷۳.....	قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی با استفاده از تبدیل فوریه	۲-۲-۲-۴
۷۹.....	مدل بازار لوی نمایی زمان تغییر یافته	۳-۴
۸۰.....	تغییر اندازه برای فرایندهای لوی زمان تغییر یافته تحت تبدیل اشر	۱-۳-۴
۸۱.....	قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی تحت فرایند لوی زمان تغییر یافته	۲-۳-۴
۸۳.....	چکیده ی فصل	۴-۴

## فهرست شکل‌ها

- شکل ۱ - ۱: مقایسه بافت نگار بازده روزانه شاخص  $S\&P500$  (از ژوئن ۱۹۸۰ تا دسامبر ۲۰۰۵ و چگالی  $N(0,1)$ ..... ۲
- شکل ۲ - ۱: مسیر نمونه‌ای حرکت براونی هندسی ..... ۳
- شکل ۳ - ۱: مسیر نمونه‌ای فرایند پواسون مرکب با توزیع گاوسی برای مقادیر پرش..... ۴
- شکل ۴ - ۱: مسیر نمونه‌ای فرایند گاوسی معکوس نرمال با پارامترهای  $\alpha = 50$  و  $\beta = -10$  و  $\delta = 1$  ..... ۴
- شکل ۲ - ۱: تابع چگالی اندازه لوی فرایند پواسون (سمت چپ) و چگالی اندازه لوی فرایند پواسون مرکب با پرش‌های توزیع شده دوگانه (سمت راست)..... ۳۴
- شکل ۲ - ۲: چگالی اندازه لوی برای فرایند  $NIG$  (سمت چپ) چگالی اندازه لوی برای فرایند  $\alpha$ - پایدار..... ۳۴

## نمادها و علائم اختصاری

نماد	تعریف
$\Omega$	فضای نمونه
$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$	پالایه
$P(A)$	احتمال پیشامد $A$
$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$	فضای احتمال پالایه شده
$\{X_t\}_{t \geq 0}$	فرایند تصادفی
$\{B_t\}_{t \geq 0}$	حرکت براونی استاندارد
$\{N_t\}_{t \geq 0}$	فرایند پواسون
$(A, \gamma, \mathcal{V})$	سه تایی مشخصه یا سه تایی لوی
$\emptyset_X$	تابع مشخصه فرایند لوی $X$
$\varphi_X$	نمای مشخصه فرایند لوی $X$
$J_X$	اندازه پرش فرایند $X$
$V_X$	وردش فرایند $X$
$a. s.$	تقریباً به طور حتم
$\rho$	چگالی لوی
$C^\infty$	مجموعه‌ی تمام توابع با بی‌نهایت بار مشتق‌پذیر پیوسته

$\mathfrak{B}(\mathbb{R})$	کوچک‌ترین $\sigma$ -جبر روی $(\mathbb{R})$ که شامل همه مجموعه‌های باز در $\mathbb{R}$ است.
*	پیچش
$\Phi$	تابع توزیع نرمال استاندارد
$\mathcal{L}_f$	تبدیل لاپلاس تابع $f$
$F_f$	تبدیل فوریه‌ی تابع $f$
$\Theta$	نمای لاپلاس تبعی‌کننده‌ی $T$

# فصل ۱

## کلیات

### ۱-۱ مقدمه

در سال‌های اخیر اوراق اختیار معامله و قیمت‌گذاری آن، در دنیای مالی و سرمایه‌گذاری، اهمیت روز افزونی پیدا کرده است. اختیار معامله روی دارایی پایه تعریف می‌شود. بنابراین لازمه‌ی قیمت‌گذاری اختیار، قیمت‌گذاری دارایی پایه‌ی آن است. در این پایان‌نامه، سهام را دارایی پایه در نظر گرفته‌ایم که یکی از پرکاربردترین دارایی‌ها است.

در بخش ۱-۲، مسئله‌ی مورد بررسی در این پایان‌نامه را توصیف می‌کنیم. در بخش ۱-۳، مروری بر پیشینه‌ی موضوع داریم. در بخش ۱-۴، اهمیت و ضرورت موضوع را بیان می‌کنیم. در بخش ۱-۵، هدف مورد نظر این پایان‌نامه را بیان می‌کنیم. در بخش ۱-۶، مفاهیم و تعریف‌های مورد نیاز را می‌آوریم. در بخش ۱-۷ توزیع بی‌نهایت بار تقسیم‌پذیر ارائه می‌شود. در بخش ۱-۸، تعاریف و مفاهیم مالی که در پایان‌نامه به کار رفته ذکر شده است. در بخش ۱-۹، چشم‌اندازی به فصل‌های بعدی خواهیم داشت.

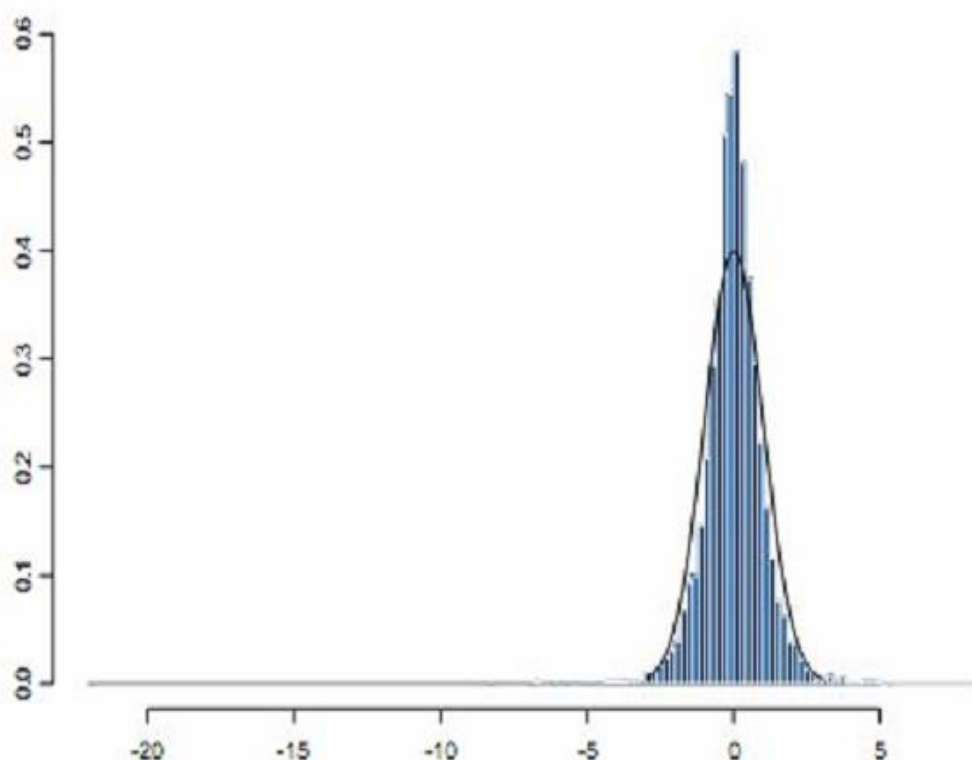
مرجع‌های اصلی این فصل عبارتند از: [۲]، [۱۸]، [۱۹]، [۲۳]، [۴۲] و [۴۵].

### ۱-۲ بیان مسئله

نظریه‌ی قیمت‌گذاری اختیار معامله توجه متخصصان زیادی را به خود جلب کرده است که از بین آنها فیشر بلک و میرن شولز شناخته شده‌تر هستند. آنان مدلی ارائه کردند که منجر به فرمول صریحی برای قیمت اختیارات متداول گردید. مدل بلک-شولز بر پایه‌ی حرکت براونی هندسی است که در آن توزیع لگاریتم بازده دارایی نرمال و تلاطم ثابت است. مدل بلک-شولز تأثیر زیادی بر نحوه‌ی قیمت‌گذاری اختیار معامله داشته است. هم‌چنین این مدل نقشی اساسی و

محوری در موفقیت مهندسی مالی در دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ داشته است. اما این مدل کاستی‌هایی هم دارد که در ادامه به توصیف آن‌ها می‌پردازیم.

همان‌طور که در شکل ۱-۱ مشاهده می‌شود، توزیع لگاریتم بازده روزانه‌ی شاخص  $S\&P\ 500$ ، به عنوان یکی از بزرگ‌ترین شاخص‌های رتبه‌بندی در اقتصاد آمریکا، قله‌ی کشیده‌تر و دم سنگین‌تری نسبت به توزیع نرمال دارد. این شواهد نشان می‌دهند که توزیع بازده سهام کشیدگی بالاتری نسبت به توزیع نرمال دارد و اغلب یک چولگی منفی را بیان می‌کند. از طرفی تلاطم نیز با گذشت زمان به طور تصادفی تغییر می‌کند. با توجه به گسسته بودن واحد پول و زمان، حرکت قیمت‌ها صرفاً توسط پرش صورت می‌گیرد، در حالی که رفتار مدل حرکت براونی در طول زمان پیوسته است. لذا مدل کلاسیک بلک-شولز در همه جا قادر به انعکاس ویژگی‌های آماری سری-های زمانی مالی نیست و قیمت‌های حاصل از مدل بلک-شولز با داده‌های بازار سازگار نیستند.



شکل ۱-۱. مقایسه بافت نگار بازده روزانه شاخص  $S\&P\ 500$  (از ژوئن ۱۹۸۰ تا دسامبر ۲۰۰۵ و چگالی  $(N(0,1))$ )

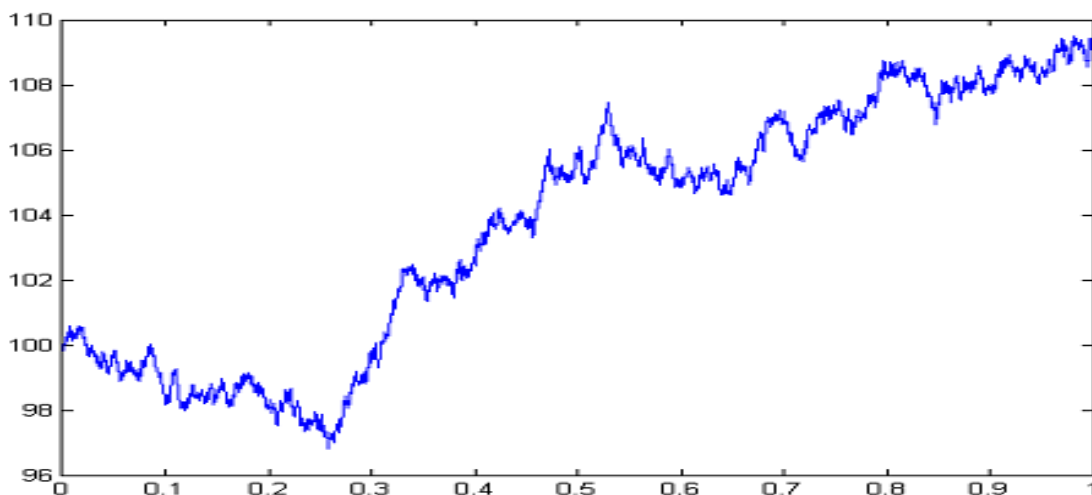
در پی تعمیم‌هایی از مدل بلک-شولز، فرایندهای لوی، شامل مدل‌های پرش-انتشار و مدل‌های پرش محض، مطرح شدند. این فرایندها بسیاری از واقعیت‌های داده‌های بازارهای مالی مانند دم-های سنگین، چولگی و کشیدگی اضافی بازده دارایی‌ها را در بر می‌گیرد.



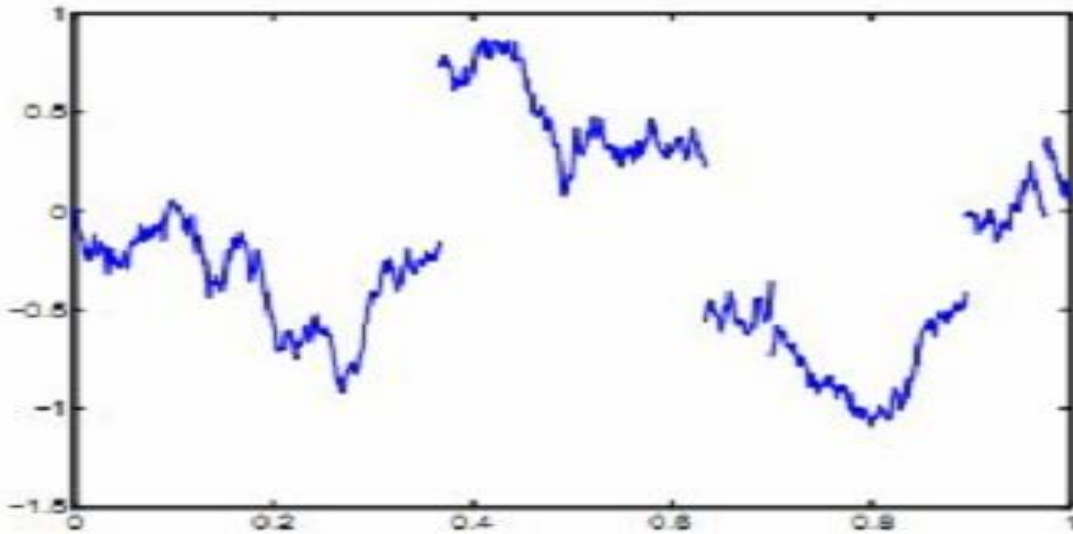
فرایندهای پرش-انتشار فرایندهایی هستند که علاوه بر مؤلفه‌ی براونی ناپیوستگی‌های پرشی دارند. در واقع فرایند پرش-انتشار، ترکیبی از فرایند پرش و فرایند انتشار است که در هر بازه‌ی زمانی متناهی دارای تعداد متناهی پرش می‌باشد.

مشاهده‌ی قیمت دارایی‌ها بیانگر وجود تعداد زیادی پرش کوچک در هر بازه‌ی زمانی متناهی است. بدین ترتیب شاخه‌ی دیگری در ادبیات قیمت‌گذاری اختیار مبتنی بر فرایندهای پرش محض لوی وارد شد که دارای تعداد نامتناهی پرش در هر بازه‌ی زمانی متناهی است. شواهد تجربی حاکی از آن است که لگاریتم قیمت مشاهده شده‌ی سهام با مدل‌های فرایندهای پرش محض لوی هم‌خوانی و هماهنگی بیشتری دارد. در فرایند پرش محض نیازی به معرفی مؤلفه‌ی براونی نیست. زیرا مدل‌بندی قیمت‌های دارایی با فرایندهای پرش محض فعالیت نامتناهی، وجود پرش‌های کوچک (که به طور مداوم اتفاق می‌افتند) و پرش‌های بزرگ (که گاهی مواقع اتفاق می‌افتند) را ضمانت و نیاز به مؤلفه‌ی انتشار را حذف می‌کند.

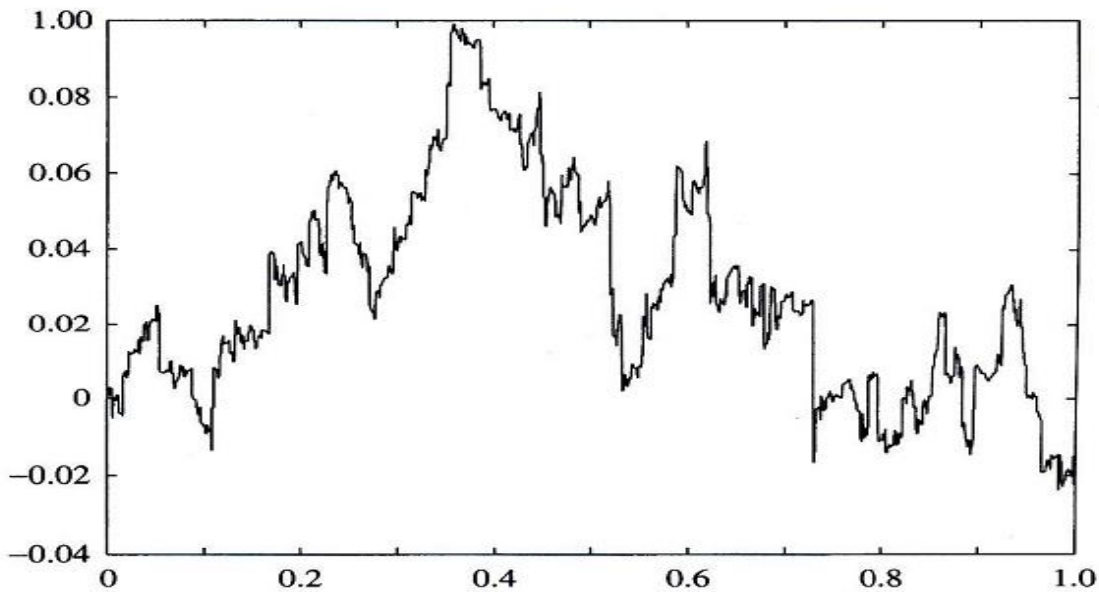
در ادامه در شکل ۱-۲ مسیر نمونه‌ای حرکت براونی هندسی به عنوان فرایند پایه‌ی مدل بلک-شولز نشان داده شده است. همچنین در شکل‌های ۱-۳ و ۱-۴ به ترتیب مسیر نمونه‌ای فرایند پواسون مرکب به عنوان یک فرایند پرش-انتشار لوی و مسیر نمونه‌ای فرایند گاوسی معکوس نرمال به عنوان یک فرایند پرش محض لوی نشان داده شده است. پیوستگی مسیرهای مدل براونی به‌وضوح قابل مشاهده است ولی در مسیرهای فرایندهای لوی ناپیوستگی‌های پرشی را مشاهده می‌کنیم که وجود این پرش‌ها نیز با مشاهدات داده‌های بازار سهام، مبنی بر وجود پرش و ناپیوستگی در مسیر قیمت‌ها، سازگار می‌باشد. لذا علاوه بر فرایندهای مورد استفاده در ادبیات سنتی قیمت‌گذاری اختیارات، رده‌ی فرایندهای لوی که شامل فرایندهای پرشی است، دینامیک شاخص سهام را به صورت دقیق‌تری بیان می‌کند.



شکل ۱-۲: مسیر نمونه‌ای حرکت براونی هندسی



شکل ۳-۱: مسیر نمونه‌ای فرایند پواسون مرکب با توزیع گاوسی برای مقادیر پرش



شکل ۴-۱: مسیر نمونه‌ای فرایند گاوسی معکوس نرمال با پارامترهای  $\alpha = 50$  و  $\beta = -10$  و  $\delta = 1$

تغییر زمان، تبدیلی یکنوا از متغیر زمان و روشی برای تولید فرایندهای جدید در نظریه‌ی فرایندهای تصادفی است. از طرفی تلاطم تصادفی را می‌توان به‌وسیله‌ی اعمال تغییر زمان تصادفی بر فرایندهای لوی ایجاد کرد. به این ترتیب با اعمال تغییر زمان بر اجزای پرش و انتشار فرایندهای لوی، رده‌ای از مدل‌های تلاطم تصادفی به نام فرایندهای لوی زمان تغییر یافته به وجود می‌آید که بیان می‌کنند تلاطم‌های تصادفی با گذشت زمان تغییر می‌کنند.

فرض کنید  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  یک فرایند لوی روی فضای احتمال پالایش شده‌ی  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$  باشد و  $T = \{T_t\}_{t \geq 0}$  یک فرایند تصادفی کادلاگ افزایشی باشد به طوری که  $T_t$  به ازای هر  $t \geq 0$  یک زمان توقف نسبت به پالایه‌ی  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  و به ازای هر  $t \geq 0$  با احتمال یک متناهی است. خانواده‌ی زمان‌های توقف  $\{T_t\}$  را یک تغییر زمان تصادفی و فرایند

$$Y = \{Y_t\}_{t \geq 0} = \{X_{T_t}\}_{t \geq 0}.$$

را فرایند لوی زمان تغییر یافته گوئیم.

از طرف دیگر برای ساخت فرایندهای لوی جدید با استفاده از یک فرایند لوی معلوم، چند روش مانند خوش‌خو نمودن اندازه لوی، تبدیلات خطی و تبعی نمودن وجود دارد. تبعی نمودن به-وسیله‌ی کلاس ویژه‌ای از تغییرات زمانی انجام می‌گیرد. در این پایان‌نامه روی تبعی نمودن که به ساخت فرایند لوی زمان تغییر یافته توسط فرایند لوی افزایشی دیگر اشاره دارد، تمرکز می‌کنیم. در ادبیات مالی از بین انواع فرایندهای لوی، تمرکز بر حرکت براونی زمان تغییر یافته بیشتر است. بسیاری از مدل‌های مورد توجه در نظریه‌ی مالی بر اساس حرکت براونی زمان تغییر یافته می‌باشند که در آن تغییر زمان به صورت یک تبعی‌کننده انتخاب می‌شود.

### ۳-۱ پیشینه‌ی موضوع

لویی بشیلیه در ۱۹۰۰ [۴] اولین مدل در زمینه‌ی قیمت‌گذاری اختیار را ارائه داد. وی قیمت سهام را براساس حرکت براونی با رانش مدل‌بندی کرد. امکان منفی شدن قیمت سهام یکی از اشکالات اساسی این مدل بود.

ساموئلسن در ۱۹۶۵ [۴۴] مدل بشیلیه را بسط داد و قیمت سهام را براساس حرکت براونی هندسی مدل‌بندی کرد. بلک و شولز در ۱۹۷۳ [۱۱] و چند ماه بعد از آن مرتون [۳۸] از مدل ارائه شده توسط ساموئلسن برای قیمت‌گذاری اختیارات استفاده نمودند. مدل بلک - شولز در دهه‌ی ۱۹۸۰ یک مدل عمومی بود و تاثیر زیادی بر نحوه‌ی قیمت‌گذاری در بازار اختیارات گذاشت.

مدل بلک - شولز تا چندین سال به عنوان تنها مدل ارائه شده در دنیای ریاضیات مالی مورد استفاده قرار گرفت. براساس این مدل، توزیع لگاریتم بازده نرمال و تلاطم ثابت است. رابیناشتین در ۱۹۹۴ [۴۳] نشان داد که بازده دارایی تحت توزیع ریسک خنثی دارای چولگی منفی با دمی چاق است. ناندی در ۱۹۹۶ [۴۱] نشان داد که توزیع بازده دارایی کشیدگی بالاتری نسبت به توزیع نرمال دارد. مندلیبرات در ۱۹۹۷ [۳۶] نشان داد که توزیع بازده سهام کشیدگی بالاتری نسبت به توزیع نرمال دارد و دارای چولگی منفی است. جاریون در ۱۹۹۸

[۳۰] و کار و همکاران در ۲۰۰۲ [۱۵] با بررسی چولگی و کشیدگی توزیع بازده دارایی‌ها به نتایجی متفاوت با آنچه که در مدل بلک - شولز مطرح شده بود رسیدند.

این تحقیقات پژوهشگران را متوجه فرایندهای دیگر از جمله فرایندهای لوی نمود. فرایندهای لوی به احترام ریاضی‌دان بزرگ فرانسوی، پل لوی، که اولین بار در دهه‌ی ۱۹۳۰ [۳۱] آنها را مورد مطالعه قرار داد، نام‌گذاری شده است. ساختار اصلی فرایندهای لوی در دوره‌ی طلایی نظریه‌ی احتمال یعنی دهه‌ی ۱۹۳۰ بیشتر به‌وسیله‌ی لوی، خین چین ریاضی‌دان روسی و ایتو ریاضی‌دان ژاپنی مورد بررسی قرار گرفته است. مرتون در ۱۹۷۶ [۳۹] با افزودن مؤلفه‌ی پرش به حرکت براونی هندسی فرایند پرش - انتشار را معرفی نمود.

فرایند پرش محض نخستین بار در ۱۹۷۶ توسط کاکس و راس [۲۲] معرفی شد. با آن‌که بسیاری از مدل‌های مالی در چند دهه با محوریت حرکت براونی گسترش یافته است، ولی فرایندهای لوی غیرنرمال نیز در سطحی وسیع در مدل‌های مالی وارد شده‌اند. مندلبرات اولین کسی بود که فرایندهای لوی غیرنرمال را در ۱۹۶۳ [۳۷] مطالعه و در ۱۹۹۷ [۳۶] این مفهوم را برای فرایند قیمت‌دارایی معرفی کرد.

تغییر زمان روشی برای تولید فرایندهای جدید در نظریه‌ی فرایندهای تصادفی است. ادبیات نوپایی برای استفاده از این روش جهت حل مسائل مالی در حال رشد است. در ادبیات مالی، تمرکز اصلی بر حرکت براونی زمان تغییر یافته و بطور کلی بیشتر روی فرایندهای لوی زمان تغییر یافته است. حرکت براونی زمان تغییر یافته نخستین بار در ۱۹۷۳ [۲۰] برای مدل قیمت‌دارایی توسط کلارک مورد استفاده قرار گرفته است. فرایندهای لوی زمان تغییر یافته برای قیمت‌گذاری اختیار نخستین بار توسط کار و وو در ۲۰۰۰ [۱۷] مطرح شدند. هانگ و وو در ۲۰۰۴ [۲۸] مدل قیمت‌گذاری اختیارات را بر اساس فرایندهای لوی زمان تغییر یافته بررسی کردند.

#### ۱-۴ اهمیت و ضرورت موضوع

توجه به وضعیت اخیر بازارهای مالی نشان می‌دهد که ارزش‌گذاری اختیار معامله مبحثی گسترده و مهم است. مشهورترین مدل زمان پیوسته‌ی قیمت‌گذاری، مدل بلک - شولز است که در آن تلاطم ثابت فرض شده و همچنین توزیع نرمال را به لگاریتم بازده دارایی‌های پایه برآزش می‌دهد. اما لگاریتم بازده اغلب دارایی‌های مالی از شرایط توزیع نرمال پیروی نمی‌کند. آنها دارای چولگی هستند و کشیدگی بیشتر از توزیع نرمال دارند از این رو قیمت‌های حاصل از مدل بلک - شولز با داده‌های بازار سازگار نیستند.

در راستای هر چه نزدیک‌تر نمودن مدل‌های ریاضی به واقعیت‌های بازار، فرایندهای لوی معرفی شدند. فرایندهای لوی ساده‌ترین رده فرایندها همراه با پرش‌های تصادفی با مقدار تصادفی و در زمان‌های تصادفی هستند. با اعمال تغییر زمان تصادفی بر فرایند لوی خانواده‌ی فرایندهای