بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه آزاد اسلامی

واحد تهران مرکزی

دانشکده‌ی علوم پایه، گروه ریاضی

پایان نامه برای دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد (M.Sc)

گرایش: آنالیز عددی

عنوان:

یک روش هسنبرگی برای حل عددی معادلات ماتریسی سیلوستر بلوکی

استاد راهنما:

آقای دکتر مجید امیرفخریان

استاد مشاور:

آقای دکتر جلیل رشیدی نیا

پژوهشگر:

کیاوش حبیبی کیا

زمستان ۱۳۹۱

تشکر و قدردانی:

در تهیه‌ی پایان نامه‌ای که در دست شماست، استاد عزیزم جناب آقای دکتر امیرفخریان با سعه‌ی صدر ارشاد و راهنمایی‌ام نموده‌اند؛ ضمنا جناب آقای دکتر جلیل رشیدی‌نیا نیز مشاوره‌ام نموده‌اند. در این جا لازم می‌دانم کمال تشکر و قدردانی را از این دو بزرگوار به عمل بیاورم. از دو استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر فریبرزی و جناب آقای دکتر عسگری نیز، که در طول تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد زحمات فراوانی را از جانب من قبول کرده‌اند، کمال تشکر را دارم. همچنین تحصیل خود تا این مرحله را مدیون همت والا و کمک‌های مادی و معنوی پدر و مادر عزیزم هستم.

بسمه تعالی

تعهدنامه‌ی اصالت پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد

اینجانب کیاوش حبیبی‌کیا دانشجوی کارشناسی ارشد رشته‌ی ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی با شماره‌ی دانشجویی ۸۹۰۹۳۹۷۲۹۰۰ اعلام می‌نمایم که کلیه‌ی مطالب مندرج در این پایان نامه با عنوان "یک روش هسنبرگی برای حل عددی معادلات ماتریسی سیلوستر بلوکی" حاصل کار پژوهشی خود بوده و چنانچه دستاوردهای پژوهشی دیگران را مورد استفاده قرار داده باشم، طبق ضوابط و رویه‌های جاری، آن را ارجاع داده و در فهرست منابع و مآخذ ذکر نموده‌ام. علاوه بر آن تاکید می‌نمایم که این پایان نامه قبلا برای احراز هیچ مدرک هم سطح، پایین‌تر یا بالاتر ارائه نشده و چنانچه در هر زمان خلاف آن ثابت شود، بدینوسیله متعهد می‌شوم، در صورت ابطال مدرک تحصیلی‌ام توسط دانشگاه، بدون کوچک‌ترین اعتراض آن را بپذیرم.

تاریخ و امضا

بسمه تعالی

در تاریخ: ۱۳۹۱/۱۱/۲۸

دانشجوی کارشناسی ارشد آقای کیاوش حبیبی‌کیا از پایان نامه‌ی خود دفاع نموده و با نمره‌ی ۱۷ به حروف هفده و با درجه‌ی بسیار خوب مورد تصویب قرار گرفت.

امضای استاد راهنما

بسمه تعالی

دانشکده علوم پایه

(این چکیده به منظور چاپ در پژوهش نامه دانشگاه تهیه شده است)

نام واحد دانشگاهی: تهران مرکزی کد واحد: ۱۰۱	کد شناسایی پایان نامه: ۱۰۱۳۰۱۰۹۹۰۲۰۱۴
عنوان پایان نامه: یک روش هسنبرگی برای حل عددی معادلات ماتریسی سیلوستر بلوکی	
نام و نام خانوادگی دانشجو: کیاوش حبیبی‌کیا شماره دانشجویی: ۸۹۰۹۳۹۷۲۹۰۰ رشته تحصیلی: ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی	تاریخ شروع پایان نامه: ۹۰/۱۲/۰۱ تاریخ اتمام پایان نامه:
استاد راهنما: دکتر مجید امیرفخریان استاد مشاور: دکتر جلیل رشیدی‌نیا	
آدرس و شماره تلفن:	

چکیده‌ی پایان نامه: معادله‌ی ماتریسی سیلوستر $XA+BX=C$ در بسیاری از مسائل ریاضی کاربرد دارد، به همین دلیل بسیاری از نویسندگان به آن پرداخته‌اند. روش‌های متداول مانند روش هسنبرگ–شور برای مسائل با مقیاس بزرگ مناسب نیستند، در این پایان نامه به بررسی یک روش جدید برای حل این معادله‌ی ماتریسی می‌پردازیم. این روش شامل کاهش متعامد ماتریس A به یک ماتریس بلوکی–بالاهسنبرگی ($P^TAP=H$) و سپس حل معادله‌ی کاهش یافته به ازای Y ($Y=XP$) می‌باشد.

نظر استاد راهنما برای چاپ در پژوهش نامه‌ی دانشگاه   **تاریخ و امضا**

فهرست مطالب

چکیده

معادله‌ی ماتریسی سیلوستر $XA + BX = C$ در بسیاری از مسائل ریاضی کاربرد دارد، به همین دلیل بسیاری از نویسندگان به آن پرداخته‌اند. روش‌های متداول مانند روش هسنبرگ–شور برای مسائل با مقیاس بزرگ مناسب نیستند، در این پایان نامه به بررسی یک روش جدید برای حل این معادله‌ی ماتریسی می‌پردازیم. این روش شامل کاهش متعامد ماتریس A به یک ماتریس بلوکی–بالاهسنبرگی ($P^T AP = H$) و سپس حل معادله‌ی کاهش یافته به ازای Y ($Y = XP$) می‌باشد.

مقدمه

معادله‌ی سیلوستر زیر را در نظر می‌گیریم:

$$XA + BX = C$$

که A یک ماتریس مربعی $n \times n$ ، B یک ماتریس مربعی $m \times m$ ، C یک ماتریس $m \times n$ ، و X نیز یک ماتریس $m \times n$ می‌باشد. ماتریس‌های A ، B ، و C معلوم و ماتریس X مجهول است.

معادله‌ی سیلوستر در طیف گسترده‌ای از کاربردهای ارتباطات و بسیاری از مسائل کنترل مورد استفاده قرار می گیرد. به عنوان مثال می‌توان به بهینه سازی طراحی کنترل در سیستم‌های خطی، پردازش سیگنال‌ها، فیلترینگ، بازسازی تصاویر، تکنیک‌های جدا سازی در معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، و قطری سازی بلوکی ماتریس‌ها اشاره کرد. با توجه به اهمیت مطلب، این معادله مورد توجه بسیاری از نویسندگان بوده است.

تعداد زیادی روش برای حل عددی معادله‌ی ماتریسی سیلوستر وجود دارد که بر اساس تبدیل ماتریس‌های ضریب، به شکل هسنبرگی یا به شکل شور می‌باشند. روش‌های استاندارد برای حل معادله‌ی ماتریسی سیلوستر عبارتند از:

روش بارتلز–استوارت، روش هسنبرگ–شور، و روش هسنبرگی.

متأسفانه این روش‌ها برای مسائل با ابعاد بزرگ مناسب نیستند. برای مسائل با مقیاس بزرگ روش‌های تکرار شونده‌ای با عنوان روش‌های زیرفضای کرایلف در نظر گرفته شده است.

در این پایان نامه ابتدا وجود و یکتایی جواب معادله‌ی ماتریسی سیلوستر بررسی می‌شود، سپس روش‌های استاندارد حل این معادله‌ی ماتریسی (روش‌های بارتلز–استوارت و هسنبرگ–شور)

را بیان می‌کنیم و در آخر روشی را که محمد ای. رامادان و همکارانش [۳] در سال ۲۰۱۰ ارائه کردند، که روشی برای حل معادلات ماتریسی سیلوستر با مقیاس بزرگ است، شرح می‌دهیم. این روش با روش‌های استاندارد پیشین متفاوت است.

۱. فصل اول:

وجود و یکتایی جواب معادله‌ی ماتریسی سیلوستر

برای بررسی وجود و یکتایی جواب معادله‌ی ماتریسی سیلوستر، دانستن مفاهیمی مانند ضرب و جمع کرونکر و عمل برداری، مورد نیاز است. بنابراین در این فصل ابتدا به معرفی این مفاهیم و برخی از ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم و سپس در آخر فصل شرط وجود و یکتایی جواب معادله‌ی ماتریسی سیلوستر را در قضیه‌ای تحت همین عنوان، بیان می‌کنیم.

تعریف ۱. ۱. ضرب کرونکر

فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ ، آنگاه ماتریس $mp \times nq$ با تعریف:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

را حاصل ضرب کرونکر ماتریس‌های A و B می‌نامند.

ضرب کرونکر خاصیت جابجایی ندارد، یعنی $A \otimes B \neq B \otimes A$.

لم ۱. ۲. فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. آنگاه:

۱. ۲. ۱. $(\alpha A) \otimes B = \alpha(A \otimes B) = A \otimes (\alpha B)$ برای هر $\alpha \in \mathbb{R}$ و هر $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$.

۱. ۲. ۲. $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$ برای هر $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$.

۱. ۲. ۳. $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$ برای هر $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$ و هر $C \in \mathbb{R}^{r\times s}$.

۱. ۲. ۴. $(A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C$ برای هر $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ و هر $C \in \mathbb{R}^{r\times s}$.

۱. ۲. ۵. $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$ برای هر $B, C \in \mathbb{R}^{p\times q}$.

۱. ۲. ۶. $A \otimes ۰ = ۰ \otimes A = ۰$.

۱. ۲. ۷. $I_m \otimes I_n = I_{mn}$.

برهان:

(۱. ۲. ۱) :

$$
\begin{aligned}
(\alpha A) \otimes B &= \left(\alpha \begin{bmatrix} a_{۱۱} & \cdots & a_{۱n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\right) \otimes B \\
&= \begin{bmatrix} \alpha a_{۱۱} & \cdots & \alpha a_{۱n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m۱} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix} \otimes B = \begin{bmatrix} \alpha a_{۱۱} B & \cdots & \alpha a_{۱n} B \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m۱} B & \cdots & \alpha a_{mn} B \end{bmatrix} \\
&= \alpha \begin{bmatrix} a_{۱۱} B & \cdots & a_{۱n} B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} B & \cdots & a_{mn} B \end{bmatrix} = \alpha (A \otimes B)
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{bmatrix} \alpha a_{۱۱} B & \cdots & \alpha a_{۱n} B \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m۱} B & \cdots & \alpha a_{mn} B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{۱۱} \alpha B & \cdots & a_{۱n} \alpha B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} \alpha B & \cdots & a_{mn} \alpha B \end{bmatrix} = A \otimes (\alpha B)
$$

(۱. ۲. ۲) :

$$
(A \otimes B)^T = \begin{bmatrix} a_{۱۱} B & \cdots & a_{۱n} B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m۱} B & \cdots & a_{mn} B \end{bmatrix}^T
$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}B^T & \cdots & a_{m1}B^T \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n}B^T & \cdots & a_{mn}B^T \end{bmatrix} = A^T \otimes B^T$$

این رابطه بجز ترانهاده، برای ترانهاده‌ی مزدوج نیز برقرار است.

(۱. ۲. ۳) :

$$\begin{aligned} (A \otimes B) \otimes C &= \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \otimes C \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11}B) \otimes C & \cdots & (a_{1n}B) \otimes C \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{m1}B) \otimes C & \cdots & (a_{mn}B) \otimes C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}(B \otimes C) & \cdots & a_{1n}(B \otimes C) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(B \otimes C) & \cdots & a_{mn}(B \otimes C) \end{bmatrix} \\ &= A \otimes (B \otimes C) \end{aligned}$$

(۱. ۲. ۴) :

$$\begin{aligned} (A + B) \otimes C &= \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \right) \otimes C \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \otimes C \\ &= \begin{bmatrix} (a_{11} + b_{11})C & \cdots & (a_{1n} + b_{1n})C \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{m1} + b_{m1})C & \cdots & (a_{mn} + b_{mn})C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}C + b_{11}C & \cdots & a_{1n}C + b_{1n}C \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}C + b_{m1}C & \cdots & a_{mn}C + b_{mn}C \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}C & \cdots & a_{1n}C \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}C & \cdots & a_{mn}C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}C & \cdots & b_{1n}C \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1}C & \cdots & b_{mn}C \end{bmatrix} \\ &= (A \otimes C) + (B \otimes C) \end{aligned}$$

(۱. ۲. ۵) :

$$
\begin{aligned}
A \otimes (B+C) &= \begin{bmatrix} a_{۱۱}(B+C) & \cdots & a_{۱n}(B+C) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m۱}(B+C) & \cdots & a_{mn}(B+C) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{۱۱}B + a_{۱۱}C & \cdots & a_{۱n}B + a_{۱n}C \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m۱}B + a_{m۱}C & \cdots & a_{mn}B + a_{mn}C \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{۱۱}B & \cdots & a_{۱n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m۱}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{۱۱}C & \cdots & a_{۱n}C \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m۱}C & \cdots & a_{mn}C \end{bmatrix} \\
&= (A \otimes B) + (A \otimes C)
\end{aligned}
$$

(۱. ۲. ۶) :

$$
A \otimes ۰ = \begin{bmatrix} a_{۱۱}۰ & \cdots & a_{۱n}۰ \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m۱}۰ & \cdots & a_{mn}۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & & \vdots \\ ۰ & \cdots & ۰ \end{bmatrix} = ۰
$$

و

$$
۰ \otimes A = \begin{bmatrix} ۰A & \cdots & ۰A \\ \vdots & & \vdots \\ ۰A & \cdots & ۰A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & \cdots & ۰ \\ \vdots & & \vdots \\ ۰ & \cdots & ۰ \end{bmatrix} = ۰
$$

(۱. ۲. ۷) :

$$
I_m \otimes I_n = \begin{bmatrix} ۱I_n & \cdots & ۰I_n \\ \vdots & & \vdots \\ ۰I_n & \cdots & ۱I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & \cdots & ۰ \\ \vdots & & \vdots \\ ۰ & \cdots & I_n \end{bmatrix} = I_{mn}
$$

■

قضیه‌ی ۱. ۳.

فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$، $B \in \mathbb{R}^{r\times s}$، $C \in \mathbb{R}^{n\times p}$ و $D \in \mathbb{R}^{s\times t}$. آنگاه:

$$
(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)
$$

اثبات:

$$
\begin{aligned}
(A \otimes B)(C \otimes D) &= \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1p}D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}D & \cdots & c_{np}D \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}c_{k1}BD & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}c_{kp}BD \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk}c_{k1}BD & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk}c_{kp}BD \end{bmatrix} \\
&= (AC) \otimes (BD)
\end{aligned}
$$

■

نتیجه‌ی ۱. ۴. قضیه‌ی قبل می‌تواند به صورت زیر تعمیم داده شود:

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) \ldots (A_k \otimes B_k) = (A_1A_2 \ldots A_k) \otimes (B_1B_2 \ldots B_k)$$

قضیه‌ی ۱. ۵.

اگر $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ و $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ نامنفرد باشند، آنگاه $A \otimes B$ نیز نامنفرد است و

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

اثبات: با توجه به قضیه‌ی (۱. ۳) داریم:

$$
\begin{aligned}
(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) &= (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) \\
&= I_m \otimes I_n = \begin{bmatrix} 1I_n & 0I_n & \cdots & 0I_n \\ 0I_n & 1I_n & \cdots & 0I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0I_n & 0I_n & \cdots & 1I_n \end{bmatrix} = I_{mn}
\end{aligned}
$$

و

$$(A^{-1} \otimes B^{-1})(A \otimes B) = (A^{-1}A) \otimes (B^{-1}B) = I_m \otimes I_n = I_{mn}$$

این نشان می‌دهد که $A^{-۱} \otimes B^{-۱}$ یک معکوس منحصر به فرد برای $A \otimes B$ نسبت به ضرب معمولی ماتریس‌ها است. بنابراین $A \otimes B$ نامنفرد است.

■

قضیه‌ی ۱. ۶.

اگر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ مشابه ماتریس $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ با تبدیل $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ، و ماتریس $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$ مشابه ماتریس $E \in \mathbb{R}^{m\times m}$ با تبدیل $T \in \mathbb{R}^{m\times m}$ باشد، آنگاه ماتریس $A \otimes C$ مشابه ماتریس $B \otimes E$ با تبدیل $S \otimes T$ است.

اثبات: فرض کنیم $A = S^{-۱}BS$ و $C = T^{-۱}ET$ باشد. با توجه به قضیه‌های (۱. ۳) و (۱. ۵) داریم:

$$\begin{aligned}(S \otimes T)^{-۱}(B \otimes E)(S \otimes T) &= (S^{-۱} \otimes T^{-۱})(BS \otimes ET)\\ &= (S^{-۱}BS) \otimes (T^{-۱}ET) = A \otimes C\end{aligned}$$

■

قضیه‌ی ۱. ۷.

فرض کنیم $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ و $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ دو ماتریس متعامد یکه باشند. آنگاه ماتریس $Q \otimes R$ یک ماتریس متعامد یکه است.

اثبات: ماتریس‌های Q و R متعامد یکه هستند، پس داریم: $QQ^T = I$ و $RR^T = I$. با استفاده از قضیه‌های (۱. ۲) و (۱. ۳) داریم:

$$\begin{aligned}(Q \otimes R)(Q \otimes R)^T &= (Q \otimes R)(Q^T \otimes R^T)\\ &= (QQ^T) \otimes (RR^T) = I \otimes I = I\end{aligned}$$

در نتیجه ماتریس $Q \otimes R$ متعامد یکه است.

■

قضیه‌ی ۱. ۸.

اگر ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ بالامثلثی باشند، آنگاه $A \otimes B$ بالامثلثی است.

اثبات: A و B بالامثلثی هستند، پس $A = [a_{i,j}]$ که $a_{i,j} = ۰$ برای $i > j$ و $B = [b_{p,q}]$ که $b_{p,q} = ۰$ برای $p > q$. طبق تعریف داریم:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{۱۱}B & \cdots & a_{۱n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n۱}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{۱۱}B & \cdots & a_{۱n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix}$$

از آنجایی که $a_{i,j} = ۰$ برای $i > j$ بنابراین تمام بلوک‌های زیر قطر بلوکی اصلی برابر با صفر هستند. حالا ماتریس‌های بلوکی روی قطر اصلی یا $a_{i,i}B$ها را بررسی می‌کنیم. این ماتریس‌ها همگی بالامثلثی هستند زیرا B بالامثلثی است. بنابراین، $A \otimes B$ بالامثلثی است.

■

قضیه‌ی ۱. ۹.

فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. اگر λ مقدار ویژه‌ی ماتریس A و $x \in \mathbb{R}^{n}$ بردار ویژه‌ی متناظر با λ باشد، و اگر μ مقدار ویژه‌ی ماتریس B و $y \in \mathbb{R}^{m\times m}$ بردار ویژه‌ی متناظر با μ باشد، آنگاه $\lambda\mu$ مقدار ویژه‌ی ماتریس $A \otimes B$ و $x \otimes y \in \mathbb{R}^{nm}$ بردار ویژه‌ی متناظر با $\lambda\mu$ می‌باشد. هر مقدار ویژه‌ی ماتریس $A \otimes B$ از ضرب مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های A و B به دست می‌آیند. اگر $\{\lambda_۱, \lambda_۲, \dots, \lambda_n\}$ مجموعه‌ی بردارهای ویژه‌ی A ، و $\{\mu_۱, \mu_۲, \dots, \mu_m\}$ مجموعه‌ی بردارهای ویژه‌ی B باشند، آنگاه

$$\{\lambda_i\mu_j ; i = ۱, \dots, n \,, j = ۱, \dots, m\}$$

مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی $A \otimes B$ می‌باشد (هر سه مجموعه می‌توانند شامل مقادیر ویژه‌ی تکراری نیز باشند). همچنین، مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی $A \otimes B$ با مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی $B \otimes A$ برابرند.

اثبات: فرض کنیم $Ax = \lambda x$ و $By = \mu y$ و $x, y \neq ۰$. با توجه به قضیه‌های قبل داریم:

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = (Ax) \otimes (By) = (\lambda x) \otimes (\mu y) = \lambda\mu(x \otimes y)$$

این نشان می‌دهد که $\lambda\mu$ یک مقدار ویژه از ماتریس $A \otimes B$ با بردار ویژه‌ی متناظر $x \otimes y$ است.

با توجه به قضیه‌ی (۲. ۱۶. ۳)، ماتریس‌های متعامد یکه‌ی $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و $V \in \mathbb{C}^{m\times m}$ وجود دارند، به طوری که $U^T AU = \Delta_A$ و $V^T BV = \Delta_B$، که Δ_A و Δ_B بالامثلثی هستند. پس داریم:

$$(U \otimes V)^T (A \otimes B)(U \otimes V) = (U^T AU) \otimes (V^T BV) = \Delta_A \otimes \Delta_B$$

$\Delta_A \otimes \Delta_B$ بالامثلثی و مشابه ماتریس $A \otimes B$ است. مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های A ، B و $A \otimes B$ دقیقا عناصر روی قطر اصلی به ترتیب ماتریس‌های Δ_A ، Δ_B و $\Delta_A \otimes \Delta_B$ می‌باشند، و طبق تعریف ضرب کرونکر، عناصر قطری $\Delta_A \otimes \Delta_B$ شامل mnتا حاصل ضرب دو به دوی عناصر قطری Δ_A و Δ_B می‌باشد.

■

تعریف ۱. ۱۰. جمع کرونکر

فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. ماتریس $mn \times mn$ به صورت $(I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)$ را جمع کرونکر ماتریس‌های A و B می‌نامند و با علامت $A \oplus B$ نمایش می‌دهند.

$$A \oplus B = (I_m \otimes A) + (B \otimes I_n) = (B \otimes I_n) + (I_m \otimes A)$$

قضیه‌ی ۱. ۱۱.

فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. آنگاه ماتریس‌های $(I_m \otimes A)$ و $(B \otimes I_n)$ نسبت به ضرب معمولی ماتریس‌ها خاصیت جابجایی دارند.

اثبات:

$$\begin{aligned}(I_m \otimes A)(B \otimes I_n) &= (I_m B) \otimes (A I_n) \\ &= B \otimes A = (B I_m) \otimes (I_n A) \\ &= (B \otimes I_n)(I_m \otimes A)\end{aligned}$$

■

ذکر این نکته دارای اهمیت است که جمع کرونکر هم مانند ضرب کرونکر خاصیت جابجایی ندارد؛ یعنی $A \oplus B \neq B \oplus A$. زیرا طبق تعریف جمع کرونکر داریم:

$$\begin{aligned}A \oplus B &= (I_m \otimes A) + (B \otimes I_n) = (B \otimes I_n) + (I_m \otimes A) \\ &\neq (I_n \otimes B) + (A \otimes I_m) = (A \otimes I_m) + (I_n \otimes B) = B \oplus A\end{aligned}$$

قضیه‌ی ۱. ۱۲.

فرض کنیم $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$. اگر λ یک مقدار ویژه‌ی A و $x \in \mathbb{R}^n$ بردار ویژه‌ی متناظر λ باشد، و اگر μ یک مقدار ویژه‌ی B و $y \in \mathbb{R}^m$ بردار ویژه‌ی متناظر μ باشد، آنگاه $\lambda + \mu$ یک مقدار ویژه‌ی ماتریس $(I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)$ و بردار $y \otimes x \in \mathbb{R}^{nm}$ بردار ویژه‌ی متناظر $\lambda + \mu$ می‌باشد. هر مقدار ویژه‌ی ماتریس حاصل جمع کرونکر به صورت مجموع مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های A و B ظاهر می شود. اگر $\{\lambda_i; i = ۱, \dots, n\}$ مجموعه‌ی مقادیر ویژه-ی ماتریس A و $\{\mu_j; j = ۱, \dots, m\}$ مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس B باشد، آنگاه

$$\{\lambda_i + \mu_j; i = ۱, \dots, n\,, j = ۱, \dots, m\}$$

مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس $(I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)$ می‌باشد (در هر سه مجموعه الزاما مقادیر ویژه متمایز نیستند). و مجموعه‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های $(I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)$ و $(I_n \otimes B) + (A \otimes I_m)$ برابرند.

اثبات: فرض کنیم $Ax = \lambda x$ و $By = \mu y$. با استفاده از قضیه‌های قبل داریم:

$$\begin{aligned}[(I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)](y \otimes x) &= (I_m \otimes A)(y \otimes x) + (B \otimes I_n)(y \otimes x) \\ &= y \otimes (Ax) + (By) \otimes x \\ &= y \otimes (\lambda x) + (\mu y) \otimes x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda(y \otimes x) + \mu(y \otimes x) \\
&= (\lambda + \mu)(y \otimes x)
\end{aligned}
$$

حال فرض کنیم $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ و $V \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ماتریس‌های متعامد یکه باشند، به طوری که ماتریس‌های $U^T A U = \Delta_A$ و $V^T B V = \Delta_B$ بالامثلثی باشند. آنگاه ماتریس $W = V \otimes U \in \mathbb{C}^{mn \times mn}$ یک ماتریس متعامد یکه است و داریم:

$$
\begin{aligned}
W^T (I_m \otimes A) W &= (V \otimes U)^T (I_m \otimes A)(V \otimes U) \\
&= (V^T \otimes U^T)(I_m \otimes A)(V \otimes U) \\
&= (V^T I_m V) \otimes (U^T A U) \\
&= I_m \otimes \Delta_A = \begin{bmatrix} \Delta_A & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \Delta_A \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{aligned}
W^T (B \otimes I_n) W &= (V \otimes U)^T (B \otimes I_n)(V \otimes U) \\
&= (V^T B V) \otimes (U^T I_n U) \\
&= \Delta_B \otimes I_n = \begin{bmatrix} \mu_1 I_n & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_m I_n \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

هر دو ماتریس، بالامثلثی هستند. پس:

$$
W^T [(I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)] W = (I_m \otimes \Delta_A) + (\Delta_B \otimes I_n)
$$

یک ماتریس بالامثلثی با مقادیر ویژه‌ی ماتریس حاصل جمع کرونکر A و B روی قطر اصلی‌اش می‌باشد. قطر اصلی ماتریس $(I_m \otimes \Delta_A) + (\Delta_B \otimes I_n)$ شامل تمام حاصل جمع‌های ممکن مقادیر ویژه‌ی A و مقادیر ویژه‌ی B می‌باشد.

■