



ارائه شده برای دریافت درجه دکتری

توسط :

استاد راهنما

استاد مشاور

بسمه تعالی

شماره :

تاریخ: 84/6/26

معاونت پژوهشی

فرم پروژه تحصیلات تکمیلی 7

فرم اطلاعات پایان نامه
کارشناسی ارشد و دکترا



دانشگاه صنعتی امیرکبیر

(پلی تکنیک تهران)

معادل

بورسیه

دانشجوی آزاد

نام و نام خانوادگی : رضا تیموری فعال

رشته تحصیلی : مهندسی مکانیک

دانشکده : مکانیک

شماره دانشجویی : 78126906

نام و نام خانوادگی استاد راهنما : دکتر شهریار فریریز

عنوان به فارسی : تحلیل تنش پادصفحه ای در محیطهای تضعیف شده توسط چندین ترک و حفره

عنوان به انگلیسی : Anti-plane Stress Analysis of Media Weakened by Multiple Cracks and Cavities

کارشناسی ارشد

نظری

توسعه ای

بنیادی

کاربردی

دکترا

تعداد واحد : -

تاریخ خاتمه : 84/3/3

تاریخ شروع : 82/6/17

سازمان تأمین کننده اعتبار : معاونت پژوهشی دانشگاه صنعتی امیرکبیر

واژه های کلیدی به فارسی : تحلیل تنش، نابجایی پادصفحه ای، ترک، حفره

واژه های کلیدی به انگلیسی : Stress Analysis, screw dislocation, crack, cavity

نظرها و پیشنهادهای به منظور بهبود فعالیت های پژوهشی دانشگاه : -

- :

دانشجو : -

84/6/26 :

امضا استاد راهنما :

نسخه 1) معاونت پژوهشی

نسخه 2) کتابخانه و به انضمام دو جلد پایان نامه به منظور تصفیه حساب با کتابخانه و مرکز اسناد و مدارک علمی

:

میدان تنش و جابجایی در صفحه بینهایت، نیم صفحه، باریکه، گوه نامحدود و محدود حاوی نابجائی پادصفحه ای ولترا بدست آمده است. با استفاده از روش توزیع نابجائی معادلات انتگرال برای این محیطها وقتی که توسط مجموعه ای از ترکهای مستقیم یا منحنی تضعیف شده اند ایجاد می شود. با بستن دو سر ترک مساله حفره هم بررسی شده است. معادلات انتگرال از نوع کوشی می باشند و روشهای خاصی برای حل این معادلات وجود دارد. در صورتیکه محیط دارای حفره و ترک باشد روشهای بکار رفته توسط سایر محققین بعلت وجود تکینگی در نوک ترک و عدم وجود تکینگی در حفره دیگر کارا نبوده و روش جدیدی برای حل معادلات با تکینگی کوشی ابداع گردیده که این نوع مسائل را حل نماید. بکمک اصل باکنر اثر بارگذاری خارجی در دوردست و یا در مرزهای محیط روی سطوح ترکها بدست می آیند. معادلات انتگرال حل شده و دانسیته نابجایی بدست آمده اند سپس ضریب شدت تنش در نوک ترکها و تنش محیطی بی بعد روی حفره ها محاسبه گردیده اند. برای نشان دادن صحت روابط بدست آمده نتایج با مراجع متفاوت مقایسه شده و تطابق بسیار خوبی مشاهده گردیده است. همچنین کارایی روش با حل تعدادی مثال بررسی شده است.

| | |
|-----|--|
| الف | قدر دانی |
| ب | اعلان منحصر بفرد بودن پایان نامه |
| پ | چکیده فارسی |
| خ | فهرست جدولها و شکلها |
| ر | فهرست علائم |
| ۱ | مقدمه |
| ۳ | مرور کارهای پیشین |
| ۱۹ | - |
| ۲۱ | ۱-۱ نایجایی پادصفحه ای در صفحه نامحدود |
| ۲۲ | ۱-۲ باریکه با نایجایی |
| ۲۸ | ۱-۳ نیم صفحه با نایجایی |
| ۳۰ | ۱-۴ گوه نامحدود با دو جنس متفاوت با نایجایی در فصل مشترک |
| ۳۱ | ۱-۴-۱ گوه مرکب با دو وجه آزاد |
| ۳۳ | ۱-۴-۲ گوه مرکب با یک وجه گیردار و یک وجه آزاد |
| ۳۵ | ۱-۵ حالت‌های خاص گوه نامحدود |
| ۳۵ | ۱-۵-۱ گوه ایزوتروپیک با دو وجه آزاد |
| ۳۶ | ۱-۵-۲ گوه ایزوتروپیک با یک وجه گیردار و یک وجه آزاد |
| ۳۷ | ۱-۵-۳ گوه مرکب با زوایای راس مساوی $\alpha = \beta$ و دو وجه آزاد |
| | ۱-۵-۴ گوه مرکب با زوایای راس مساوی $\alpha = \beta$ ، با یک وجه گیردار و یک وجه آزاد |
| ۳۸ | |
| ۴۳ | ۱-۶ گوه محدود |
| ۴۵ | ۱-۶-۱ گوه مرکب که در آن شرط مرزی تمامی لبه ها آزاد می باشد |
| | ۱-۶-۲ گوه مرکب که در آن شرط مرزی لبه $\theta = 0$ گیردار و بقیه لبه ها آزاد می باشد |
| ۴۷ | |
| | ۱-۶-۳ گوه مرکب که در آن شرط مرزی لبه دایروی گیردار و بقیه لبه ها آزاد می باشد |
| ۵۰ | |
| | ۱-۶-۴ گوه مرکب که در آن شرط مرزی لبه $\theta = \alpha + \beta$ آزاد و بقیه لبه ها گیردار می باشد |
| ۵۲ | |
| ۵۴ | ۱-۷ اصل باکتر |
| ۵۵ | ۱-۸ روش توزیع نایجایی |

| | |
|----|---|
| ۵۸ | - |
| ۵۹ | ۲-۱ صفحه نامحدود |
| ۵۹ | ۲-۲ نیم صفحه |
| ۶۱ | ۲-۳ باریکه |
| ۶۴ | ۲-۴ گوه مرکب نامحدود با دو وجه آزاد |
| ۶۷ | ۲-۵ گوه مرکب نامحدود با یک وجه آزاد و یک وجه گیردار |
| ۶۹ | ۲-۶ گوه ایزوتروپیک نامحدود با دو وجه آزاد |
| ۷۰ | ۲-۷ گوه ایزوتروپیک نامحدود با یک وجه آزاد و یک وجه گیردار |
| ۷۰ | ۲-۸ گوه مرکب نامحدود با زوایای مساوی $\alpha = \beta$ و با دو وجه آزاد |
| | ۲-۹ گوه مرکب نامحدود با زوایای مساوی $\alpha = \beta$ و با یک وجه آزاد و یک وجه گیردار |
| ۷۱ | |
| ۷۳ | ۲-۱۰ گوه مرکب محدود که در آن تمامی لبه ها آزاد هستند |
| | ۲-۱۱ گوه مرکب محدود که در آن لبه $\theta = 0$ گیردار و بقیه لبه ها آزاد می باشد |
| ۷۴ | |
| ۷۵ | ۲-۱۲ گوه مرکب که در آن لبه دایروی گیردار و بقیه لبه ها آزاد هستند |
| | ۲-۱۳ گوه مرکب که در آن لبه $\theta = \alpha + \beta$ آزاد و بقیه لبه ها گیردار می باشند |
| ۷۶ | |
| ۷۸ | - |
| ۸۱ | ۳-۱ صفحه نامحدود |
| ۸۱ | ۳-۲ نیم صفحه |
| ۸۲ | ۳-۳ باریکه |
| ۸۳ | ۳-۴ گوه |
| | ۳-۴-۱ گوه مرکب نامحدود نامتجانس با دو وجه آزاد حاوی ترکهای مستقیم در فصل مشترک |
| ۸۵ | |
| | ۳-۴-۲ گوه مرکب نامحدود نامتجانس با یک وجه گیردار و یک وجه آزاد حاوی ترک در فصل مشترک |
| ۸۵ | |
| ۸۶ | ۳-۴-۳ گوه ایزوتروپیک نامحدود با دو وجه آزاد حاوی ترکهای منحنی |
| | ۳-۴-۴ گوه ایزوتروپیک نامحدود با یک وجه گیردار و یک وجه آزاد حاوی ترکهای منحنی |
| ۸۸ | |
| | ۳-۴-۵ گوه مرکب نامحدود نامتجانس با دو وجه آزاد و زوایای راس مساوی حاوی ترک در فصل مشترک |
| ۸۹ | |
| | ۳-۴-۶ گوه مرکب نامحدود با یک وجه گیردار و یک وجه آزاد و زوایای راس مساوی حاوی ترکهای مستقیم واقع در فصل مشترک دو گوه نامتجانس |
| ۸۹ | |

۷-۴-۳ گوه مرکب و ایزوتروپیک محدود با تمامی شرایط مرزی و

- ۹۰ حالت‌های خاص ذکر شده برای گوه نامحدود
-
- ۹۲
- ۹۵ ۴-۱ ترک لبه ای
- ۹۵ ۴-۲ ترک احاطه شده در محیط
- ۹۸ -
- ۱۰۰ ۵-۱ حل جامع معادلات انتگرالی تکین
- ۱۰۸ -
- ۱۱۱ ۶-۱ صفحه نامحدود
- ۱۱۱ مثال (۱) : یک ترک دایروی
- ۱۱۲ مثال (۲) : یک حفره دایروی
- ۱۱۳ مثال (۳) : دو حفره دایروی
- ۱۱۴ مثال (۴) : دو حفره دایروی و یک ترک مستقیم واقع در بین حفره ها
- ۱۱۶ مثال (۵) : سه حفره دایروی و یک ترک مستقیم واقع در بین حفره ها
- ۱۱۹ مثال (۶) : دو حفره بیضوی و یک ترک مستقیم واقع در بین حفره ها
- ۱۲۱ مثال (۷) : یک ترک مستقیم و یک ترک بیضوی
- ۱۲۲ ۶-۲ نیم صفحه
- ۱۲۲ مثال (۸) : سه حفره دایروی در نیم صفحه
- مثال (۹) : نیم صفحه تضعیف شده با یک ترک احاطه شده، یک ترک
- ۱۲۴ لبه ای و یک حفره بیضوی
- ۱۲۶ ۶-۳ باریکه
- ۱۲۶ مثال (۱۰) : دو حفره دایروی و یک ترک در باریکه
- ۱۲۹ مثال (۱۱) : سه حفره دایروی در باریکه
- ۱۳۰ مثال (۱۲) : باریکه تضعیف شده توسط دو ترک لبه ای و یک حفره بیضوی
- ۱۳۲ ۶-۴ گوه نامحدود مرکب با دو وجه آزاد
- ۱۳۲ مثال (۱۳) : یک ترک مستقیم واقع در فصل مشترک دو گوه نامتجانس
- مثال (۱۴) : دو ترک مستقیم واقع در فصل مشترک دو گوه نامتجانس
- ۱۳۳ بهم چسبیده با دو وجه آزاد
- ۱۳۴ ۶-۵ گوه نامحدود مرکب با یک وجه گیردار و یک وجه آزاد
- مثال (۱۵) : دو ترک مستقیم واقع در فصل مشترک دو گوه نامتجانس
- ۱۳۴ بهم چسبیده با یک وجه گیردار و یک وجه آزاد
- ۱۳۴ ۶-۶ گوه نامحدود ایزوتروپیک

- مثال (۱۶) : یک ترک مستقیم شعاعی واقع بر یک گوه ایزوتروپیک نامحدود با دو وجه آزاد
 ۱۳۴
- مثال (۱۷) : یک ترک مستقیم شعاعی واقع بر یک گوه ایزوتروپیک نامحدود با یک وجه آزاد و یک وجه گیردار
 ۱۳۶
- مثال (۱۸) : دو ترک مستقیم واقع بر یک گوه ایزوتروپیک نامحدود با شرایط مرزی متفاوت
 ۱۳۶
- ۶-۷ گوه محدود ایزوتروپیک
 ۱۳۹
- مثال (۱۹) : یک حفره بیضوی در گوه ایزوتروپیک محدود که در آن لبه $\theta = \alpha + \beta$ آزاد و بقیه لبه ها گیردار می باشند
 ۱۳۹
- مثال (۲۰) : دو ترک مستقیم واقع بر یک گوه ایزوتروپیک محدود که در آن لبه $\theta = \alpha + \beta$ آزاد و بقیه لبه ها گیردار می باشند
 ۱۴۰
- ۱۴۲
- پیشنهادات برای کارهای آتی
 ۱۴۴
- مراجع
 ۱۴۵

- شکل ۱-۱: نمایش نابجائی پادصفحه ای در صفحه نامحدود
- شکل ۱-۲: نمایش نابجائی پادصفحه ای در باریکه
- شکل ۱-۳: کانتور در نظر گرفته شده جهت محاسبه انتگرالها
- شکل ۱-۴: نمایش نابجائی پادصفحه ای در نیم صفحه
- شکل ۱-۵: نمایش نابجائی پادصفحه ای در گوه نامحدود
- شکل ۱-۶: نمایش نابجائی پادصفحه ای در گوه محدود
- شکل ۱-۷: نمایش اصل باکنر
- شکل ۱-۸: نمایش یک نابجائی در یک محیط دلخواه
- شکل ۲-۱: نمایش بار گذاری خارجی خود تعادلی روی مرز آزاد نیم صفحه
- شکل ۲-۲: نمایش باریکه با بارگذاری روی لبه بالایی باریکه
- شکل ۲-۳: کانتورهای در نظر گرفته شده جهت انتگرال گیری به روش مانده ها
- شکل ۳-۱: نمایش ترک با اشکال دلخواه در محیط الاستیک
- شکل ۳-۲: نمایش ترک با شکل دلخواه در گوه
- شکل ۴-۱: نمایش مختصات محلی در نوک ترک
- شکل ۶-۱: نمایش منحنی های در نظر گرفته شده برای شکل ترکها در دستگاه مختصات دکارتی
- شکل ۶-۲: نمایش منحنی های در نظر گرفته شده برای شکل ترکها در دستگاه مختصات قطبی
- شکل ۶-۳: نمایش یک ترک دایروی
- شکل ۶-۴: نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش بی بعد بر حسب ω_s
- شکل ۶-۵: نمودار تغییرات تنش محیطی بی بعد در نقاط مختلف حفره
- شکل ۶-۶: نمایش دو حفره دایروی با یک ترک مستقیم
- شکل ۶-۷: تنش محیطی بی بعد $\sigma_{zy}/\tau_{\infty}$ در نقطه $(d,0)$ واقع بر مرز حفره سمت راست بر حسب d/a
- شکل ۶-۸: نمایش دو حفره دایروی با یک ترک مستقیم
- شکل ۶-۹: ضرایب شدت تنش نوک ترک بر حسب d/a
- شکل ۶-۱۰: نمایش سه حفره دایروی با یک ترک مستقیم
- شکل ۶-۱۱: ضرایب شدت تنش نوک سمت چپ ترک بر حسب زاویه دوران γ برای $d/a = 3$
- شکل ۶-۱۲: ضرایب شدت تنش نوک سمت راست ترک بر حسب زاویه دوران γ برای $d/a = 3$
- شکل ۶-۱۳: ضرایب شدت تنش نوک سمت چپ ترک بر حسب d/a برای زاویه دوران $\gamma = 90$
- شکل ۶-۱۴: ضرایب شدت تنش نوک سمت راست ترک بر حسب d/a برای زاویه دوران $\gamma = 90$
- شکل ۶-۱۵: دو حفره بیضوی و یک ترک مستقیم واقع در بین حفره ها

- شکل ۱۶-۶: ضرایب شدت تنش بی بعد نوک ترک بر حسب d/a
- شکل ۱۷-۶: تنش محیطی بی بعد در نقطه $(a+d, 0)$ از مرز حفره سمت راست بر حسب d/a
- شکل ۱۸-۶: تنش بی بعد محیطی در نقاط مختلف مرز حفره سمت راست بر حسب زاویه θ
- شکل ۱۹-۶: یک ترک مستقیم و یک ترک بیضوی
- شکل ۲۰-۶: تغییرات ضرایب شدت تنش در نوکهای ترکهای مستقیم و بیضوی بر حسب b/a
- شکل ۲۱-۶: نمایش سه حفره دایروی در نیم صفحه
- شکل ۲۲-۶: تنش محیطی بی بعد در نقاط مختلف مرز حفره بر حسب زاویه θ
- شکل ۲۳-۶: تنش محیطی بی بعد در نقاط مختلف نیمه سمت راست مرز حفره وسطی بر حسب زاویه θ برای $d/a = 1$ و $d/a = 0.5$
- شکل ۲۴-۶: نمایش نیم صفحه تضعیف شده توسط یک ترک احاطه شده در محیط و یک ترک لبه ای و یک حفره بیضوی
- شکل ۲۵-۶: ضرایب شدت تنش در نوکهای ترک احاطه شده در محیط و ترک لبه ای
- شکل ۲۶-۶: تنش بی بعد محیطی در نقاط مختلف مرز حفره بیضوی بر حسب زاویه θ برای $d/a = 1$
- شکل ۲۷-۶: نمایش سه حفره دایروی در باریکه تحت بار گذاری روی وجه بالایی
- شکل ۲۸-۶: تنش محیطی بی بعد در نقاط مختلف مرز حفره سمت راست بر حسب زاویه θ برای $d/a = 1$ و $h/a = 3$
- شکل ۲۹-۶: ضرایب شدت تنش ترک بر حسب d/a
- شکل ۳۰-۶: نمایش سه حفره دایروی در باریکه تحت بار گذاری روی وجه بالایی
- شکل ۳۱-۶: تنش محیطی بی بعد در نقاط مختلف مرز حفره وسطی بر حسب زاویه θ برای $d/a = 0.5$
- شکل ۳۲-۶: نمایش سه حفره دایروی در باریکه تحت بار گذاری روی دو وجه
- شکل ۳۳-۶: تنش محیطی بی بعد در نقاط مختلف مرز حفره وسطی بر حسب زاویه θ برای $d/a = 0.5$
- شکل ۳۴-۶: نمایش باریکه تضعیف شده توسط دو ترک لبه ای و یک حفره بیضوی
- شکل ۳۵-۶: ضرایب شدت تنش در نوکهای ترکهای لبه ای
- شکل ۳۶-۶: تنش محیطی بی بعد در نقاط مختلف مرز حفره بیضوی بر حسب زاویه θ برای $d/a = 1$
- شکل ۳۷-۶: نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش نرمالیزه شده بر حسب طول ترک برای گوه با دو وجه آزاد
- شکل ۳۸-۶: نمودار تغییرات ضرایب شدت تنش نرمالیزه شده بر حسب طول ترک برای گوه با یک وجه گیردار و یک وجه آزاد
- شکل ۳۹-۶: تغییرات k/k_0 بر حسب زاویه راس گوه برای گوه ایزوتروپیک نامحدود با دو وجه آزاد

شکل ۶-۴۰: تغییرات k/k_0 برحسب زاویه راس گوه برای گوه ایزوتروپیک نامحدود با یک وجه آزاد و یک وجه گیردار

شکل ۶-۴۱: ضرایب شدت تنش بی بعد برای دو ترک شعاعی واقع بر گوه ایزوتروپیک نامحدود با یک وجه آزاد و یک وجه گیردار

شکل ۶-۴۲: ضرایب شدت تنش بی بعد برای دو ترک شعاعی واقع بر گوه ایزوتروپیک نامحدود با دو وجه آزاد

شکل ۶-۴۳: تغییرات k/k_0 برحسب زاویه راس گوه برای گوه ایزوتروپیک نامحدود با یک وجه آزاد و یک وجه گیردار

شکل ۶-۴۴: تغییرات k/k_0 برحسب زاویه راس گوه برای گوه ایزوتروپیک نامحدود با یک وجه آزاد و یک وجه گیردار

شکل ۶-۴۵: تنش محیطی بی بعد برحسب زاویه θ برای گوه ایزوتروپیک محدود با یک وجه آزاد و یک وجه گیردار و لبه دایروی گیردار

شکل ۶-۴۶: ضرایب شدت تنش بی بعد برای دو ترک شعاعی واقع بر گوه ایزوتروپیک محدود با یک وجه آزاد و یک وجه گیردار

جدول (۶-۱) ضرایب شدت تنش بی بعد برای یک ترک شعاعی بطول a_0 با بارگذاری ثابت τ_0 در سطح آن برای $\mu_2 = 23.08\mu_1$ و $\alpha + \beta = 180^\circ$

جدول (۶-۲) ضرایب شدت تنش بی بعد برای یک ترک شعاعی بطول a_0 با بارگذاری ثابت τ_0 در سطح آن برای $\mu_1 = \mu_2$ و $\alpha + \beta = 180^\circ$

| | |
|--|--|
| A_{jk} | ضرائب وزنی روش انتگرالگیری مربعی |
| $A_k(s), B_k(s)$ | ضرائب ظاهر شده در تبدیل تبدیل ملین تغییر مکان $w_k(r, \theta)$ |
| A_i, B_i | حدود ترک |
| a | فاصله ابتدای برش نابجائی تا راس گوه |
| a_i, b_i | اقطار بزرگ و کوچک ترک بیضوی |
| a_1, b_1, a_2, b_2 | ضرائب ظاهر شده در تبدیل فوریه سینوسی تابع w |
| B_{jh} | ضرائب ظاهر شده در بسط توابع پیوسته $g_{zj}(t)$ |
| $b_{zj}(t)$ | تابع دانسیته نابجائی بر حسب متغیر بی بعد |
| b | شعاع گوه مرکب محدود |
| c | ثابت مشخص کننده خط بروموویچ |
| | توابع تعریف شده برای میدان تغییر مکان نابجائی گوه مرکب با زوایای راس مساوی |
| $C(\omega, r, \theta), S(\omega, r, \theta)$ | |
| $D_{zj}(\tau)$ | دانسیته نابجائی پادصفحه ای در نقطه ای از ترک زام |
| $D_1(s)$ | تابع مشخص کننده قطبهای انتگرالهای مختلط تنش گوه با دو وجه آزاد |
| $D_2(s)$ | تابع مشخص کننده قطبهای انتگرالهای مختلط تنش گوه با یک وجه گیردار و یک وجه آزاد |
| $d\lambda_j(\tau)$ | المان طول روی مرز ترک |
| $E(\Omega), F(\Omega)$ | ضرائب ظاهر شده در تبدیل فوریه تابع $w(x, y)$ |
| e | شعاع بی بعد گوه مرکب محدود |
| $f(x_1, y_1, x, y)$ | تابع چند مقداری برای تعریف نابجائی در مختصات دکارتی |
| e_i, η_i | مختصات ابتدای ترک مستقیم در مختصات قطبی |
| f_i, γ_i | مختصات انتهای ترک مستقیم در مختصات قطبی |
| $g(R_1, \theta_1, R, \theta)$ | تابع چند مقداری برای تعریف نابجائی در مختصات قطبی |
| $\mathbf{g}_{zj}(t_p)$ | بردار دانسیته نابجائی ترکها در نقاط گسسته سازی |
| $g_{zi}(t)$ | تابع غیر تکین ظاهر شده در دانسیته نابجائی |
| H_{ij} | ماتریس ضرائب معادلات انتگرالی گسسته شده |
| h_1, h_2 | فواصل محور x از وجوه باریکه |
| h | فاصله محور x انتخابی از وجه نیم صفحه |
| $K_{ij}(\tau, \xi, C_{ij}) _{\text{infinite wedge}}$ | کرنل معادله انتگرالی برای گوه نامحدود |
| $K_{ij}(\tau, \xi) _{\text{finite wedge}}$ | کرنل معادله انتگرالی برای گوه محدود |
| $K_{ij}(\tau, \xi)$ | کرنل معادله انتگرالی |

| | |
|---|--|
| $k_{ij}(s, t)$ | کرنل معادله انتگرالی با متغیرهای بی بعد |
| $(k_{III})_{L_i}, (k_{III})_{R_i}$ | ضرایب شدت تنش نوکهای سمت راست و چپ ترک |
| k_{III}^* | ضریب تمرکز تنش مرز حفره |
| k_0 | ضریب شدت تنش یک ترک مستقیم در صفحه بینهایت |
| $L_k(s)$ | چند جمله ای لاگرانژ |
| l_i | نصف طول ترک مستقیم |
| l | طول بار گذاری ثابت بروی وجوه آزاد گوه |
| M | تعداد حفره ها |
| m | تعداد نقاط گسسته سازی |
| N_1 | تعداد ترکهای احاطه شده در محیط |
| N_2 | تعداد ترکهای لبه ای |
| N | تعداد ترک |
| $\bar{P}_k(s), \bar{Q}_k(s)$ | ضرایب ظاهر شده در تبدیل تبدیل ملین محدود نوع اول تغییر مکان $w_k(r, \theta)$ |
| $P_k(s), Q_k(s)$ | ضرایب ظاهر شده در تبدیل تبدیل ملین محدود نوع دوم تغییر مکان $w_k(r, \theta)$ |
| $Q_i(\xi) \Big _{\text{infinite wedge}}^{\text{trac-free}}$ | سمت راست معادله انتگرالی برای گوه نا محدود با دو وجه آزاد |
| $Q_i(\xi) \Big _{\text{finite wedge}}^{\text{trac-free}}$ | سمت راست معادله انتگرالی برای گوه محدود با دو وجه آزاد |
| $Q_i(\xi)$ | توزیع تنش معلوم روی سطوح ترکها |
| $\mathbf{q}_j(s_r)$ | بردار بارگذاری روی سطوح ترکها در نقاط گسسته سازی |
| $q_i(s)$ | توزیع تنش معلوم روی سطوح ترکها بر حسب متغیر بی بعد |
| $R_j(\tau), \theta_j(\tau)$ | مختصات نقطه ای از ترک زام در مختصات قطبی |
| $\bar{R}, \bar{\theta}$ | مختصات قطبی مماس بر سطوح ترکها |
| r | شعاع بی بعد شده در گوه |
| r_{L_i}, r_{R_i} | فاصله نقاط روی ترک از نوکهای سمت راست و چپ ترک |
| r', θ' | مختصات تعریف شده برای نشان دادن چند مقداری بودن میدان تغییر مکان نابجائی گوه |
| s_r, t_p | نقاط گسسته سازی معادلات انتگرالی |
| s_i | قطبهای انتگرالهای مختلط تنش گوه |
| s | متغیر تبدیل ملین |
| t, s | متغیرهای بی بعد مشخص کننده معادله ترک |
| $T_n(t), U_{n-1}(s)$ | چند جمله ایهای چبیشیف نوع اول و دوم |
| u | جابجائی درون صفحه ای در جهت محور x |
| v | جابجائی درون صفحه ای در جهت محور y |

| | |
|--|--|
| $w(r, \theta) \Big _{\text{infinite wedge}}^{\text{trac-free}}$ | مولفه تغییر مکان گوه مرکب نامحدود با وجوه آزاد |
| $w(r, \theta) \Big _{\text{infinite wedge}}^{\text{trac-disp}}$ | مولفه تغییر مکان گوه مرکب نامحدود با یک وجه گیردار و وجه دیگر آزاد |
| $\overline{\overline{W}}_k(s, \theta)$ | تبدیل ملین محدود نوع اول تغییر مکان $w_k(s, \theta)$ |
| $\overline{W}_k(s, \theta)$ | تبدیل ملین محدود نوع دوم تغییر مکان $w_k(s, \theta)$ |
| $W_k(s, \theta)$ | تبدیل ملین تغییر مکان $w_k(r, \theta)$ |
| $W(\Omega, y)$ | تبدیل فوریه تابع $w(x, y)$ |
| $w_i^+(\xi), w_i^-(\xi)$ | تغییر مکانهای لبه بالایی و پایینی ترک |
| w | جابجائی پاد صفحه ای در جهت محور z |
| $x_j(\tau), y_j(\tau)$ | مختصات نقطه ای از ترک زام در مختصات دکارتی |
| x_{0i}, y_{0i} | مختصات مرکز ترک مستقیم |
| α, β | زوایای راس گوه های تشکیل دهنده گوه مرکب |
| Ω | متغیر تبدیل فوریه |
| γ_i | زاویه ترک مستقیم با افق |
| γ | زاویه راس گوه مرکب |
| $\Delta_j(t)$ | تابع وزنی جهت محاسبه بازشدگی دهانه ترک زام |
| δ_{ij} | تابع دلتای دیراک |
| $\delta(x)$ | تابع دلتای دیراک |
| δ | مولفه بردار برگرز |
| $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{zx}, \gamma_{zy}$ | مولفه های کرنش |
| ρ_0 | فاصله نقطه اثر بردار تنش نقطه ای روی وجه آزاد گوه |
| ρ_1, ρ_2 | محدوده بارگذاری روی وجه آزاد گوه |
| ρ, θ | مختصات هر نقطه در داخل گوه |
| μ, λ | ثابتهای لامه |
| μ_k | ضرایب صلبیت برشی در گوه مرکب |
| μ | نسبت مدول برشی دو گوه |
| | مولفه های تنش نابجائی با مولفه برگرز واحد در مختصات دکارتی |
| $\sigma_{zy} \Big _{\text{dislocation}}(x_j(\tau), y_j(\tau), x, y), \sigma_{zx} \Big _{\text{dislocation}}(x_j(\tau), y_j(\tau), x, y)$ | |
| $\sigma_{zy} \Big _{\text{external}}, \sigma_{zx} \Big _{\text{external}}$ | بارگذاری خارجی در دستگاه دکارتی |
| $\sigma_{zy} \Big _{\text{obtained}}, \sigma_{zx} \Big _{\text{obtained}}$ | مولفه های تنش دستگاه دکارتی برای هر نقطه از محیط |
| $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{xy}, \sigma_{yx}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$ | مولفه های تنش |
| $\sigma_{Z_i X_i}, \sigma_{Z_i Y_i}$ | مولفه های تنش در وجوه ترکهای منحنی |

| | |
|--|---|
| $\tau_{\theta_z}(r, \theta) \Big _{\text{infinite wedge}}^{\text{trac-free}}$ | مولفه تنش گوه مرکب نامحدود با وجوه آزاد |
| $\tau_{\theta_z}(r, \theta) \Big _{\text{infinite wedge}}^{\text{trac-disp}}$ | مولفه تنش گوه مرکب نامحدود با یک وجه گیردار و وجه دیگر آزاد |
| | مولفه های تنش نابجائی با مولفه برگرز واحد |
| $\tau_{Rz} \Big _{\text{dislocation}}(R_j(\tau), \theta_j(\tau), R, \theta), \tau_{\theta_z} \Big _{\text{dislocation}}(R_j(\tau), \theta_j(\tau), R, \theta)$ | |
| $\tau_{\bar{\theta}_z}, \tau_{\bar{R}z}$ | مولفه های تنش در جهت مماسی و عمود بر سطح ترک |
| $\tau_{Rz} \Big _{\text{external}}, \tau_{\theta_z} \Big _{\text{external}}$ | بارگذاری خارجی در دستگاه قطبی |
| $\tau_{Rz} \Big _{\text{obtained}}, \tau_{\theta_z} \Big _{\text{obtained}}$ | مولفه های تنش دستگاه قطبی برای هر نقطه از محیط |
| $\tau_{k\theta_z}, \tau_{krz}$ | مولفه های غیر صفر تنش در گوه مرکب |
| $\tau_{\theta_z}, \tau_{Rz}$ | مولفه های تنش در گوه |
| τ_{∞} | بردار تنش در دور دست |
| τ_0 | بردار تنش متمرکز |
| τ, ξ | متغیرهای مشخص کننده معادله ترک |
| φ_i | زوایه بین محورهای x و X_i و \bar{R} و R |
| ω_{si}, ω_{fi} | پارامترهای مشخص کننده ابتدا و انتهای ترک بیضوی |
| ω | ثابت ظاهر شده در حل نابجائی گوه مرکب با زوایای راس مساوی |

:

تحلیل تنش در محیطهای تضعیف شده توسط مجموعه ای از ترکها و حفره ها از دیرباز مورد توجه محققین بوده است. از جمله تکنیکهای موثر در تحلیل مذکور استفاده از روش توزیع نابجایی می باشد. تحقیقات انجام شده نشان داده است که از نظر ریاضی ترک را می توان بصورت مجموعه ای از نابجایی ها در نظر گرفت و با استفاده از اصل جمع آثار حرکت نسبی لبه های ترک نسبت به یکدیگر و در نتیجه ضریب شدت تنش را محاسبه نمود. در واقع توانایی حل نابجایی در حل مسائل مکانیک شکست خطی به قدرتمندی حل گرین در حل معادلات دیفرانسیل می باشد. در این رساله در ابتدا میدان تنش و تغییر مکان در مناطق متفاوت در اثر نابجایی پادصفحه ای ولترا محاسبه می گردد تا در نهایت برای تحلیل تنش محیطهای حاوی ترک مورد استفاده قرار گیرد. مناطقی که مورد بررسی قرار می گیرند عبارتند از صفحه نامحدود، نیم صفحه، باریکه، گوه مرکب نامحدود و محدود و نیز گوه ایزوتریپیک نامحدود و محدود بعد از بدست آوردن حل نابجایی در این محیطها میدان تنش بدون در نظر گرفتن ترک و حفره فقط در اثر بارگذاری خارجی در این محیطها بدست می آید. از حلهای بدست آمده برای تحلیل تنش در محیطهای شامل ترک و حفره استفاده می شود در مورد حفره نشان داده خواهد شد که حفره را می توان یک ترک بسته ولی بدون تکینگی در نظر گرفت و با اعمال شرایط مناسب تنش محیطی را روی آن بدست آورد.

مسائل مربوط به صفحه نامحدود عبارتند از:

تحلیل یک ترک دایروی، تحلیل یک حفره دایروی، تحلیل دو حفره دایروی، تحلیل دو حفره دایروی و یک ترک مستقیم، تحلیل دو حفره بیضوی شکل و یک ترک مستقیم، تحلیل یک ترک مستقیم و یک ترک منحنی که قسمتی از یک بیضی می باشد. در کلیه مسائل بالا صفحه نامحدود در $|y| \rightarrow \infty$ تحت بار یکنواخت $\sigma_{zy} = \tau_{\infty}$ قرار دارد همینطور تحلیل سه حفره دایروی و یک ترک مستقیم در صفحه بینهایت که تحت بار گذاری $\sigma_{zx} = \tau_{\infty}$ در $|y| \rightarrow \infty$ است انجام می شود.

برای مقایسه جوابهای بدست آمده با مراجع موجود در نیم صفحه، مسئله یک نیم صفحه که توسط سه حفره دایروی تضعیف شده است حل گردید. بار گذاری بصورت نقطه ای روی لبه آزاد نیم صفحه می باشد. در ضمن مسئله نیم صفحه تضعیف شده توسط یک حفره بیضوی و دو ترک مستقیم که یکی لبه ای و دیگری در داخل نیم صفحه قرار دارد و بار گذاری بصورت تنش نقطه ای روی مرز آزاد نیم صفحه اعمال می شود هم حل گردیده است.

باریکه تضعیف شده توسط دو حفره دایروی و یک ترک که فاصله مراکز حفره ها و ترک از لبه آزاد نیم صفحه ۳ برابر شعاع حفره می باشد و بار گذاری بصورت نقطه ای روی لبه بالایی باریکه است همینطور باریکه تضعیف شده توسط یک حفره بیضوی و دو ترک مستقیم لبه ای که در راستای قطر بزرگ حفره بیضوی بوده و ترکها به مرزهای باریکه عمودند و بار گذاری بصورت نقطه ای روی لبه بالایی باریکه است حل گردید.

روش توزیع نابجایی برای تحلیل تنش در گوه ایزوتروپیک و گوه مرکب محدود و نامحدود که توسط ترک و حفره تضعیف شده اند نیز مورد استفاده قرار می گیرد. نخست برای اثبات اعتبار نتایج و مقایسه جوابها با مراجع موجود مسئله یک ترک شعاعی واقع بر فصل مشترک دو گوه نامتجانس چسبیده بهم با تنش ثابت پادصفحه ای که بر روی سطوح ترک اعمال شده حل می شود سپس مسئله دو ترک شعاعی واقع بر فصل مشترک دو گوه نامتجانس حل شده که بار گذاری بصورت تنش ثابت که بروی وجوه آزاد گوه بطول محدود از راس آن وارد می شود می باشد مسئله ذکر شده برای دو حالت گوه با شرایط مرزی دو وجه آزاد و همینطور یک وجه گیردار و یک وجه آزاد حل شده است. علاوه بر این مسائل زیر نیز حل شده اند:

مسئله یک گوه نامحدود ایزوتروپیک که توسط یک ترک شعاعی تضعیف شده، مسئله دو ترک شعاعی هم طول که در راستای خط نصف کننده زاویه راس گوه قرار دارند، مسئله دو ترک با جهت دلخواه واقع بر گوه نامحدود که در سه مسئله ذکر شده گوه با شرایط مرزی، دو وجه آزاد و یا یک وجه آزاد و یک وجه گیردار بوده و بار گسترده ثابت بر وجه یا وجوه آزاد گوه اعمال می گردد، مسئله گوه محدود ایزوتروپی که توسط یک حفره بیضوی که مرکز آن روی منصف زاویه راس گوه با یک وجه گیردار و یک وجه آزاد و مرزی دایروی گیردار قرار دارد و بار گسترده یکنواخت روی وجه آزاد گوه اعمال می گردد، مسئله دو ترک شعاعی هم طول که در راستای خط نصف کننده زاویه راس گوه محدود ایزوتروپیک با شرایط مرزی یک وجه آزاد و یک وجه گیردار قرار دارند و بار گسترده ثابت بر وجه یا وجوه آزاد گوه اعمال می گردد.

:

نخستین بار دانشمندان علم مواد در پروسه بررسی مکانیزم تخریب مواد به وجود نابجایی پی بردند. بعد ها نابجائی از دیدگاه الاستیسیته نیز تعریف گردید. ولترا¹ جزء نخستین کسانی بود که به تعریف نابجائی پرداخت [1].

نابجائی در الاستیسیته با ایجاد یک شکاف در محیط الاستیک، حرکت لبه های شکاف نسبت به یکدیگر و سپس حذف شکاف تعریف می شود. در اثر این عمل تغییر مکان در جسم دو مقداری شده و میدان تنش در ماده بوجود می آید. بسته به اینکه لبه های شکاف در کدام جهت از یکدیگر فاصله بگیرند سه نوع نابجائی تعریف می گردند [2,3]. اگر لبه های شکاف در داخل صفحه در جهت عمود بر شکاف از یکدیگر دور شوند و سپس فاصله بین وجوه شکاف با همان ماده پر شود نابجائی را گوه ای² می نامند. البته این نوع نابجائی را می توان با حذف قسمتی از ماده دو لبه شکاف و سپس چسباندن مجدد لبه های شکاف ایجاد نمود. اگر تغییر مکان دو لبه شکاف بموازات لبه ها باشد نابجایی را لبه ای³ می نامند. در صورتیکه تغییر مکان وجوه شکاف در جهت عمود بر لبه شکاف باشد نابجائی را پاد صفحه ای⁴ می نامند. محاسبه میدان تنش در اثر نابجائی در محیطهای محدود ویا نامحدود را حل نابجائی در آن محیط می نامند. اشلبی⁵ نشان داد که نابجائی در مواد و نابجائی تعریف شده در الاستیسیته دارای ماهیت یکسان هستند و حل نابجایی لبه ای در مواد غیر ایزوتروپ را ارائه نمود [4]. نتایج حل اشلبی برای یک نابجائی لبه ای که خط برش یک خط با جهت دلخواه می باشد بکار برده می شود. محاسبات برای یک نابجائی که توسط نابارو⁶ انجام شده توسط اشلبی به حالت غیر ایزوتروپیک تعمیم داده شده است.

حل انواع نابجائی در محیطهای محدود و بعضی محیطهای نیمه محدود و اثر متقابل این نابجائی ها با ناهمگنی ها⁷ (از قبیل حفره ، ناخالصی ، نواحی محدود شده تحت اثرات حرارتی و جریان پلاستیک و غیره) همواره مورد توجه محققین بوده است. من⁸ مفهوم نابجائی بیان شده توسط ولترا را که به تنشهای پیوسته در یک جسم همبند چندگانه⁹ مربوط می شود توسعه داد تا حالتی که تنش عمودی موازی با صفحه نابجایی، ناپیوسته هستند را نیز شامل گردد و بکمک روش جداسازی متغیرها و روش متغیر مختلط چهار راه حل برای نابجائی های صفحه ای و پاد صفحه ای واقع در مواد الاستیک ایزوتروپیک در مختصات قطبی ارائه نمود [5]. حل ارائه شده تنش را در جسم الاستیک بجز در نزدیکی نابجائی ارائه می نماید به عبارت دیگر میدان تنش رادر اطراف صفحات لغزش کریستالها بیان می کند. نابارو مجموعه ای از روابط را برای مولفه های جابجائی

¹ Volterra

² wedge dislocation (Climb)

³ edge dislocation (Glid)

⁴ screw dislocation

⁵ Eshelby

⁶ Nabarro[Proc.Phys.Soc.52.P.34(1940)]

⁷ inclusion

⁸ Mann

⁹ multiply connected

مربوط به یک حلقه بسته از نابجائی ها را که توسط برگرز¹ (۱۹۳۹) بر اساس تئوری ولترا بیان شده بود، ارائه نمود که حلقه بسته بسیار کوچک نابجائی در صفحه $x-z$ در نزدیکی مبدا مختصات قرار دارد و بردار برگرز عمود بر صفحه می باشد. روابط بیان شده بر اساس نماد ارائه شده توسط لاو^۲ بیان شده که جابجائی تولید شده را به نیروهای ثابت عمل کننده در مبدا ارتباط می دهد. در ضمن مسئله حرکت نابجائی در صفحات لغزش نیز توسط نابارو بررسی شده است [6].

مسئله یک نیم صفحه حاوی نابجائی پادصفحه در حالی که نیم صفحه توسط یک لایه تقویت شده بوسیله هد^۳ حل شده است. هد همچنین نیروی عمل کننده روی یک نابجائی در مجاورت فصل مشترک دو محیط نیمه بینهایت با ماده غیر متشابه را مطالعه نمود [7,8,9].

میدان تنش الاستیک برای یک نابجائی نزدیک یک ناهمگنی دایروی بوسیله داندروز و موراً بدست آمده است و یک موقعیت تعادل برحسب ثوابت الاستیک تشکیل دهنده محیط و ناهمگنی و هندسه ناهمگنی مشخص شده است [10].

رفتار نابجائی پادصفحه ای و لبه ای در همسایگی دو محیط نیمه بینهایت هموزن با ثابتهای الاستیک متفاوت که به یکدیگر در باریکه ای با ضخامت محدود و طول بینهایت بطور موضعی چسبیده اند توسط تاماته و کوریهارا^۵ تحلیل گردیده است [11,12]. در این تحلیل مسئله مقدار مرزی ترکیبی^۶ ایجاد شده با استفاده از روش ارائه شده توسط میلن و تامسون^۷ [13] و بکمک روش توابع با متغیر مختلط، به مسئله هیلبرت^۸ تبدیل شده است در مرجع [14] حل مسئله هیلبرت مورد بررسی قرار گرفت. همچنین با کمک فرمول پیچ-کهلر^۹ که در مرجع [15] مطرح شده نیروی عمل کننده روی نابجائی با در نظر گرفتن تاثیر متقابل فصل مشترک محیط های مذکور محاسبه شده است.

از جمله موارد مهمی که در تئوری نابجائی توجه محققین را بخود جلب نموده مسئله توزیع نابجائی است. آرایش صفحه ای نابجائی اولین بار بوسیله لیبفرید^{۱۰} مطرح گردید [16] و سپس بوسیله هد و لاوت^{۱۱} بعنوان روشی برای بدست آوردن حل تقریبی برای مسائلی که توزیع گسسته از نابجائی را در بردارند در نظر گرفته شد [17].

زنر^{۱۲} [18] و فریدل^{۱۳} [19] دریافتند که از میدان تنش ایجاد شده بوسیله نابجائیهای انباشته شده^{۱۴} مختلف می توان برای ارضا شرایط مرزی در مسائل ترک صفحه ای و پاد صفحه استفاده

¹ J.D.Burgers (1939)

² Love

³ Head

⁴ Dundurs and Mura

⁵ Tamate and Kurihara

⁶ mixed boundary value problem

⁷ Milne-Thompson

⁸ Hilbert

⁹ Peach-Koehler

¹⁰ Leibfried

¹¹ Head and Louat

¹² Zener

¹³ Friedel

¹⁴ pile-up

نمود. بیلبی و اشلبی^۱ مروری از کاربردهای تئوری نابجائی در مسائل الاستیک و الاستوپلاستیک ترک ارائه نموده اند [20]. امکان کاربرد لایه های نابجائی برای حل مسائل مقدار مرزی نخستین بار بوسیله لاوت پیشنهاد شد [21]. نابجائی تعریف شده توسط یک برش مستقیم و جابجائی لبه های برش ، توسط جو^۲ تعمیم داده شده و بکمک تابع تنش ایری تئوری نابجائی مذکور برای ناحیه همبند دوگانه^۳ با برش نابجائی دلخواه بکاررفته است . حل ارائه شده بصورت ترکیب خطی از ترمهای تک مقداری^۴ و چند مقداری بیان شده است . مسائلی از قبیل صفحه نامحدود با حفره دایروی و با برش مستقیم و همچنین مارپیچ بعنوان مثال حل شده و طبیعت تکینگی در نقاط انتهایی برش بررسی و یکتایی جواب اثبات شده است [22]. ویلیس^۵ روشی را برای تعیین تنش تولید شده بوسیله توزیع پیوسته مفروض از نابجائی ها در کریستال الاستیک غیر خطی بدست آورد [23] این روش قابل کاربرد در محیطهای غیر ایزوتروپ هم می باشد و برای یک نابجائی پادصفحه ای در یک کریستال غیر ایزوتروپ بکار رفته است .

بارنت و تتلمن^۶ توزیع خطی از نابجائی های پاد صفحه ای انباشته شده را در نزدیکی یک ناهمگنی استوانه ای (کرنش صفحه ای) بررسی نموده و تنش ها را در فصل مشترک محیط و نابجائی، در راستای توزیع نابجائی ارائه نمودند [24]. میدان تنش حاصل از توزیع دلخواه و پریودیک نابجائی ها^۷ در یک نیم صفحه توسط اوون و مورا^۸ بدست آمده است [25]. مارویاما^۹ ضمن یک مرور کامل روی الاستیسته دوبعدی میدان تنش و جابجائی ناشی از نابجائی پادصفحه ای و لبه ای و تغییر انرژی کرنشی بخاطر ترکهای برشی را مشابه روشهای ذکر شده توسط موسخیلشویلی^{۱۰} محاسبه نموده اند [26]. گمپرلوا و ساکسل^{۱۱} میدان تنش یک نابجائی را که در نزدیکی یک مرز جوش داده شده ، لغزان ویا آزاد قرار دارد بکمک روش تبدیلات فوریه محاسبه نموده و میدان تنش یک نابجائی پاد صفحه ای را نزدیک یک نوع ساده از مرز جوش داده شده بطور صریح ارائه کردند [27]. وسولووسکی و سیگر^{۱۲} با محاسبه میدان تغییر شکل یک نابجائی پادصفحه ای در یک ماده تراکم ناپذیر توانستند بکمک روش اغتشاش^{۱۳} ، معادلات دیفرانسیل برای تعیین جابجائی در ماده ایزو تروپیک دلخواه با تراکم ناپذیری متوسط را بدست آورند [28]. داندرز تنش تولید شده بوسیله یک نابجائی لبه ای را در یک جسم محدود شامل ناخالصی از روی تنش ایجاد

¹ Billby and Eshelby

² Ju

³ doubly connected

⁴ simple valued

⁵ Willis

⁶ Barnett and Tetelman

⁷ plastic distortion

⁸ Owen and Mura

⁹ Maruyama

¹⁰ Muskhilishvili

¹¹ Gemperlova and Saxl

¹² Wesolowski and Seeger

¹³ perturbation

شده بوسیله نیروهای متمرکز اعمال شده در جهت سطح بیرونی نابجائی با تغییر ثابتهای الاستیک مسئله بدست آورد و شباهت بین نیروهای متمرکز و نابجائی لبه ای را نشان داد [29].

وبلیس، هنگن و بلاگ¹ حل دقیق برای میدان تنش تولید شده توسط یک نابجائی در مجاورت یک ناخالصی کروی را ارائه نمودند و انرژی مربوط به تاثیر متقابل و نیروی بین نابجائی و ناخالصی را محاسبه کردند. نتایج با حالتی که ناخالصی بصورت یک کره توخالی² فرض می شود مورد بحث قرار گرفته است [30]. راپپرت و خزرذژیان³ آرایش دلخواهی از نابجائی ها از نوع سمیگلیانو⁴ را در سطح مقطع یک استوانه الاستیک نامحدود در نظر گرفتند و برای حالتی که جا بجایی نسبی در صفحه برش است حل را بر حسب بسط توابع ویژه یک مسئله مقدار مرزی نوع اول نمایش دادند. در ضمن برای حالتی که جابجایی نسبی عمود بر صفحه برش است حل را بصورت بسط توابع ویژه یک مسئله مقدار مرزی نوع دوم بدست آوردند [31,32]. توزیع نابجائی های پادصفحه ای انباشته شده⁵ در فصل مشترک دو نیم فضای الاستیک ایزوتروپیک متفاوت که صفحه لغزش نابجائی نسبت به عمود بر فصل مشترک دارای زاویه $\frac{\pi a}{2}$ است و a یک ثابت می باشد توسط تاکر⁶ بکار رفته است. از تبدیل ملین⁷ و تکنیک وینر-هوف⁸ برای بدست آوردن تعداد نابجائی ها در توده انباشته شده⁹ و تنش در نوک توده استفاده شده و کاربرد نتایج بدست آمده برای تئوری تسلیم مواد بکار رفته است [33]. جاگانادام¹⁰ رفتار یک نابجائی پادصفحه ای نزدیکی و داخل یک ناهمگنی دایروی که در داخل یک ماتریس نا محدود احاطه شده و دارای اتصال ناقص است را توسط روش توابع مختلط بررسی نموده و موقعیتهای تعادل نابجائی را بدست آورده است [34]. میدانهای جابجائی و تنش یک نابجائی پادصفحه ای در یک محیط غیر ایزوتروپیک سه فاز با تقارن ارتوتروپیک توسط لین و چو¹¹ بررسی و حل بصورت سری ارائه شده است. در حالتی که دوفاز بیرونی صلب هستند سری به یک تابع ساده همگرا می شود. چنین تحلیلی برای بررسی نابجائی توده انباشته شده نیز بکار رفته است [35]. میدان جابجائی یک حلقه صفحه ای مستطیل شکل از نابجائی ها بوسیله روش تابع گرین توسط کسکا¹² بدست آمده است [36]. رفتار یک نابجائی پادصفحه ای در یک محیط الاستیک غیر خطی توسط کچانو¹³ بررسی گردیده است [37]. میدان تنش ناشی از یک نابجائی لبه ای واقع در یک ربع صفحه توسط کیر¹⁴ و همکارانش بدست آمده است. حل

¹ Willis, Hangns and Bullough

² voide

³ Rapoport and Khzardzhyan

⁴ Somigliani

⁵ Piled up

⁶ Tucker

⁷ Mellin

⁸ Wiener-Hopf

⁹ pile-up

¹⁰ Jagannatham

¹¹ Lin and Chou

¹² Kossecka

¹³ Kachanov

¹⁴ Keer