دانشگاه صنعتی امیرکبیر
(پلی تکنیک تهران)
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (جبر)

موضوع:

گراف نادوری یک گروه

نگارنده:

زینب اخلاقی

استاد راهنما:

دکتر داریوش کیانی و دکتر بهروز خسروی

استاد مشاور:

دکتر خدیجه احمدی آملی

شهریور ماه ۱۳۸۶

چکیده

از راههای مختلف می‌توان گرافی را به یک گروه مرتبط کرد. قسمت عمده این پایان‌نامه را به تعریف گراف $\Gamma(G)$ و ارتباط آن با گروههایی که موضعا دوری نیستند اختصاص داده‌ایم، که این گرافها را گرافهای نادوری می‌نامند. ما خصوصیات این گراف را بررسی کرده و به مطالعه این مطلب می‌پردازیم که خواص مربوط به گرافها، چه خاصیتی در گروهها را موجب می‌شود. همچنین به بررسی گروههایی با گراف نادوری یکریخت می‌پردازیم و برخی از خواص گروه را که با یکریختی گرافهای نادوری دو گروه از یکی به دیگری به ارث می رسد مورد مطالعه قرار می‌دهیم. همچنین گروههایی را ارائه می‌دهیم که توسط گراف نادوری شناسایی پذیرند. در انتها به این حدس می‌رسیم که اگر G گروهی ساده و غیرآبلی باشد و H گروهی باشد که گراف نادوری آن با گراف نادوری G یکریخت باشد، آنگاه $G \cong H$. بخشهای بعدی پایان‌نامه به گرافهای ناجابجایی اختصاص داده‌شده است. از مقالاتی که در مورد گرافهای ناجابجایی نوشته شده حدسی به جا مانده که می‌گوید اگر G گروهی ساده و غیرآبلی باشد و H گروهی باشد که گراف ناجابجایی آن با گراف ناجابجایی G یکریخت است، در این صورت $G \cong H$. ما در فصل انتهایی این پایان‌نامه با استفاده از مقاله‌ایی که اخیراً پذیرش گرفته به بررسی این حدس در مورد گروه A_{10} می‌پردازیم و ثابت می‌کنیم که حکم فوق در مورد این گروه صادق است. تاکنون این حدس برای هیچ گروه غیرساده‌ایی ثابت نشده‌است. ما در فصل انتهایی این پایان‌نامه دو حدس فوق را برای $PGL(2,q)$، به‌رغم اینکه این گروه غیرساده است بررسی می‌کنیم و ثابت می‌کنیم این گروه توسط گراف ناجابجایی، گراف نادوری و همچنین مجموعه مرتبه مولفه‌هایش شناسایی‌پذیر است.

این نتایج به صورت مقاله‌ایی با عنوان "Some New Characterizations for PGL(2,q)" توسط آقای دکتر بهروز خسروی و خانم مریم خاتمی و نگارنده این پایان نامه تدوین و برای داوری به یکی از مجلات ارسال شده است.

کلمات کلیدی: گراف ناجابجایی، کلاس تزویجی، گراف نادوری ، گروههای دوری، گراف اول.

مقدمه

تا کنون از طرق مختلف و با استفاده از برخی خواص گروهها، گرافهایی را تعریف کرده‌اند که با استفاده از آنها می‌توان خواص گروه مورد نظر را به روش ساده‌تری بررسی کرد. هدف اصلی این کار، شناسایی ساختار گروهها با استفاده از خواص گرافها است. یکی از این گرافها، که در مقالات مختلفی روی آنها مطالعه شده گرافهای ناجابجایی است. این گراف با توجه به مفهوم آشنای مرکزساز یک عنصر در گروه تعریف می‌شود. این گراف دارای مجموعه رئوس $G \setminus Z(G)$ است و دو عنصر $x, y \in G \setminus Z(G)$ وقتی به یکدیگر متصل می‌شوند که $[x, y] \neq ۱$، به عبارت دیگر زیرگروه تولید شده توسط x و y یک گروه غیرآبلی باشد. واضح است که درجه رأس $x \in G \setminus Z(G)$ در این گراف برابر با $|G| - |C_G(x)|$ است. بخشی از این پایان‌نامه به تعریف مفهومی به نام دوری‌ساز اختصاص دارد دوری‌ساز عنصر $x \in G$ و دوری‌ساز گروه G که آنها را به ترتیب با $Cyc_G(x)$ و $Cyc(G)$ نمایش می‌دهند دارای تعاریف زیرند:

$$Cyc_G(x) = \{y \in G | \text{یک گروه دوری است } \langle x, y \rangle\}.$$

$$Cyc(G) = \{y \in G | \forall x \in G \quad \text{یک گروه دوری است } \langle x, y \rangle\}.$$

تعاریف بالا مشابه با تعریف مرکزساز عنصر $x \in G$ و مرکز G است. با توجه به این تشابه تعریف می‌توان گراف نادوری را با صورت زیر تعریف کرد:

$$V(\Gamma_G) = G - Cyc(G)$$

$$E(\Gamma_G) = \{\{x, y\} \subset V(\Gamma_G) | \text{دوری نیست } \langle x, y \rangle\}$$

فصل اول این مقاله را به تعریف دوری‌ساز و ذکر چند قضیه، لم و خاصیت برای این مفهوم اختصاص

داده‌ایم و در فصل دوم به موضوع اصلی این مقاله یعنی گراف نادوری پرداخته‌ایم. در این فصل مفاهیمی چون عدد خوشه‌ایی و عدد استقلال را روی گراف نادوری مورد بررسی قرار داده و به مطالعه این مطلب می‌پردازیم که هرگاه گراف نادوری یک گروه دارای عدد خوشه‌ایی و عدد استقلال نامتناهی نباشد، آن گروه چه خاصیتی دارد. در یکی از بخشها به بررسی گروههای متناهی با گراف نادوری منظم پرداخته و آنها را رده‌بندی می‌کنیم. در بخش آخرفصل ۲ نیز به بررسی این موضوع می‌پردازیم که هرگاه گراف نادوری دو گروه با هم یکریخت باشند، چه خواصی در دو گروه مشترک خواهد بود و درآخر حدسی را به جا می‌گذاریم که می‌گوید اگر G گروهی ساده و غیرآبلی باشد و H گروهی باشد که گراف نادوری آن با گراف نادوری G یکریخت است، در این صورت $G \cong H$.

فصل آخر این پایان نامه به مطالبی در مورد گرافهای ناجابجایی اختصاص داده شده است. از مقالاتی که در مورد گرافهای ناجابجایی نوشته شده حدسی به جا مانده که می‌گوید اگر G گروهی ساده و غیرآبلی باشد و H گروهی باشد که گراف ناجابجایی آن با گراف ناجابجایی G یکریخت است، در این صورت $G \cong H$. تا کنون این مطلب برای اکثر گروههای ساده و غیر آبلی به اثبات رسیده است. اما گروههایی مانند A_n $(n \geq ۵)$ گروههایی هستند که تاکنون برای تمام آنها اثباتی ارائه نشده است اما اخیراً در یکی از مقالات اثباتی برای $A_{۱۰}$ ارائه شده است. ما در فصل آخر پایان نامه به بررسی گروههایی با گراف ناجابجایی یکریخت با گراف ناجابجایی $A_{۱۰}$ پرداخته و روند اثبات این مقاله را مورد بررسی قرار می‌دهیم. تاکنون دو حدس فوق در مورد هیچ گروه غیرساده‌ایی ثابت نشده است. گروه $PGL(۲,q)$، که در آن $q = p^n$ و p عددی اول است، اولین گروه غیرساده‌ایی است که این مطلب را در مورد آن بررسی می‌کنیم. در فصل انتهایی این پایان‌نامه ثابت کردیم که دو حکم فوق در مورد گروه $PGL(۲,q)$ صحیح است.

برای گروههای متناهی G، مجموعه مرتبه های عناصر G را با $\pi_e(G)$ نمایش می‌دهند. فرض کنیم G گروه غیربدیهی باشد. گراف اول G گرافی است که رئوس آن شمارنده های اول $|G|$ است و دو راس p و q مجاورند اگر G عنصری از مرتبه pq داشته باشد. تعداد مولفه‌های همبندی گراف اول G را با $s(G)$ نمایش می‌دهند و $\pi_۱, \pi_۲, ..., \pi_{s(G)}$ مولفه‌های همبند گراف اول G است. $|G|$ را می‌توان به صورت حاصل ضرب

عناصر دوبه‌دو نسبت به هم اول n_i نوشت، که $s(G) \geq i \geq ۱$ و $\pi(n_i) = \pi_i$. این اعداد را مرتبه مولفه می‌نامیم و مجموعه مرتبه‌مولفه‌های گروه G را با $OC(G)$ نمایش می‌دهند. ما در روند اثبات دو حدس ذکر شده برای $PGL(۲,q)$ نشان می‌دهیم، اگر گروه H چنان موجود باشد که $OC(H) = OC(PGL(۲,q))$، (یا $|H| = |PGL(۲,q)|$ و $\pi_e(H) = \pi_e(PGL(۲,q))$) در این صورت $H \cong PGL(۲,q)$.

در این قسمت تعاریفی اولیه در مورد گرافها را که از آنها استفاده می‌کنیم، به طور مختصر می آوریم.

گراف کامل گرافی است که هر دو راس در آن با هم مجاور باشند.

گراف منظم گرافی است که درجه رئوس در آن با هم برابر باشند.

گراف $\Gamma_۱$ و $\Gamma_۲$ را یکریخت گویند، هرگاه تابع یک‌به‌یک و پوشا ϕ بین آنها چنان موجود باشد که اگر x و y دو راس مجاور در گراف $\Gamma_۱$ باشند، آنگاه $\phi(x)$ و $\phi(y)$ دو راس مجاور در $\Gamma_۲$ باشند.

مرجع اصلی این پایان نامه مقاله زیراست که در اوایل تابستان ۸۵ نسخه پذیرش شده آن در اختیار ما قرار گرفت و اخیراً در سال ۲۰۰۷ به چاپ رسیده است:

"*Non-cyclic graph of a group*"

A.Abdollahi and Mohammadi Hassanabadi

Communications in Algebra, **35**, , (2007),1-25 .

مقاله زیر مرجع بعضی خواص دوری‌سازها است که در فصل اول مورد استفاده قرار گرفته است.

"*Some facts about cycels and tidy groups*"

K.O'Bryant, D.Patrick,L.Smithline and E.Wepsic

Rose-Halman Institute of Technology MS TR 92-04,(1992),1-7.

مرجعی که در فصل آخر مورد استفاده قرار گرفته مقاله زیر است که به تازگی پذیرش گرفته و هنوز به چاپ نرسیده‌است:

"*A New Characterization of* A_{10} *by Its Noncommutating Graph*"

L. Wang and W. Shi

Communications in Algebra, to appear.

فصل ۱

دوری ساز گروه

۱.۱ مقدمه

برای تعریف گراف نادوری نیاز به تعریف دو مفهوم به نام دوری‌ساز[۱] عنصر ودوری‌ساز گروه داریم. در این فصل به تعریف این مفاهیم می‌پردازیم.

تعریف دوری‌ساز عنصر مشابه تعریف $C_G(x)$ یعنی مرکزساز عنصر $x \in G$ است. به یاد داریم که مرکزساز عنصر $x \in G$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_G(x) = \{y \in G| \text{ یک گروه آبلی است } \langle x,y\rangle\}.$$

در واقع با جایگزینی کلمه دوری به جای کلمه آبلی در تعریف مرکزساز یک عنصر، تعریف دوری‌ساز عنصر در گروه به دست می آید که عبارت است از:

$$Cyc_G(x) = \{y \in G| \text{ یک گروه دوری است } \langle x,y\rangle\}.$$

در بخش اول به بررسی شباهتها و تفاوتهای این دو مجموعه می‌پردازیم. با توجه به این مطلب که مرکزساز یک عنصر در G یک زیرگروه G است این سئوال به ذهن می‌رسد که آیا دوری‌ساز یک عنصر نیز یک زیرگروه G است. در این بخش با ذکر مثالی نشان می‌دهیم این مطلب درست نیست. در بخش دوم

[۱] cyclicizer

خواص دوری‌ساز عنصر و گروه را بررسی می‌کنیم و چند قضیه و لم را در مورد آنها بیان و اثبات می‌کنیم. همچنین در این بخش با توجه به خواص دوری‌ساز زیرگروهی را تعریف می‌کنیم که در اثبات قضایا و در بخشهای آتی جایگزین مناسبی برای خاصیت گروه بودن مرکزساز خواهد بود.

۲.۱ دوری‌ساز گروه

فرض کنیم G یک گروه باشد. دوری‌ساز عنصر $x \in G$ عبارت است از :

$$Cyc_G(x) = \{y \in G| \text{ یک گروه دوری است } \langle x, y\rangle\}.$$

همچنین برای هر زیرمجموعه X از G دوری‌ساز X در G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Cyc_G(X) = \bigcap_{x \in X} Cyc_G(x).$$

اگر $X = G$، آنگاه مجموعه بالا را دوری ساز G می‌نامیم و آن را با نماد $Cyc_G(G)$ یا $Cyc(G)$ نمایش می‌دهیم و داریم :

$$Cyc(G) = \{y \in G| \forall x \in G \text{ یک گروه دوری است } \langle x, y\rangle\}.$$

مثال ۱.۲.۱ فرض کنیم $G = \mathbb{Z}_p \bigoplus \mathbb{Z}_p$. در این صورت به ازای هر عنصر $g \in G$ داریم $Cyc_G(g) = \langle g\rangle$. زیرا اگر فرض کنیم $x \in Cyc_G(g) - \langle g\rangle$، در این صورت $A = \langle x, g\rangle$ یک گروه دوری خواهد بود. می‌دانیم گروههای دوری دارای تنها یک زیرگروه از هر مرتبه مشخص می‌باشند. از آنجائی که $\langle x\rangle$ و $\langle g\rangle$ زیرگروههائی از مرتبه p در A می‌باشند، داریم $\langle g\rangle = \langle x\rangle$. لذا $x \in \langle g\rangle$ که با فرض اولیه ما در تناقض است.

می‌توان دید که $Cyc(G) = (۰.۰)$. زیرا $Cyc_G((۰,۱)) = \langle(۰,۱)\rangle$ و $Cyc_G((۱,۰)) = \langle(۱,۰)\rangle$ و اشتراک این دو مجموعه تهی می‌باشد.

به طور کلی با استدلالی مشابه می‌توان ثابت کرد، هر p-گروه G که دارای مشخصه[۱] p است، دارای چنین خاصیتی است. یعنی به ازای هر عنصر $g \in G$، $Cyc_G(g) = \langle g \rangle$ و $Cyc(G) = 1$.$\square$

یادآوری: گروه G را موضعاً دوری[۲] گویند، هرگاه هر زیرگروه تولید شده توسط تعداد متناهی از عناصر G، دوری باشد.

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنیم p یک عدد اول باشد. p-زیرگروه ماکسیمال (p–مولفه اولیه[۳]) یکتای $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ را p-گروه شبه دوری[۴] می‌نامند و آن را با $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ نمایش می‌دهند. اگر $X = \{1/p, 1/p^2, 1/p^3, ...\}$، در این صورت $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \langle X \rangle$.

مثال ۲.۲.۱ $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ یک گروه موضعاً دوری است. زیرا زیرگروه تولید شده توسط عناصر $a_1/p^{n_1}, a_2/p^{n_2}, ..., a_k/p^{n_k}$ برابر با زیرگروه تولید شده توسط a_i/p^{n_i} است، که $n_i = max\{n_1, n_2, ..., n_k\}$.

می‌توان دید که این گروه، دوری نیست. این مثال نشان می‌دهد که گروههای موضعاً دوری لزوماً دوری نیستند. اما با توجه به تعریف، گروههای متناهی موضعاً دوری، همان گروههای دوری‌اند.

لم ۱.۲.۱ فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت $Cyc(G)$ یک زیر گروه موضعاً دوری از G است.

اثبات : ابتدا ثابت می‌کنیم $Cyc(G)$ یک زیرگروه از G است. کافی است نشان دهیم :

$$\forall x, y \in Cyc(G) \quad , xy^{-1} \in Cyc(G)$$

می‌دانیم که

$$\forall z \in G, \quad \langle xy^{-1}, z \rangle \leq \langle x, y, z \rangle.$$

---

[۱] exponent

[۲] locally cyclic

[۳] p-primary component

[۴] quasicyclic

وجود دارد $a \in G$ به قسمی که $\langle y, z\rangle = \langle a\rangle$. اما با توجه به نوع انتخاب x، زیرگروه $\langle x, a\rangle = \langle x, y, z\rangle$ یک زیرگروه دوری است و در نتیجه $\langle xy^{-1}, z\rangle$ زیرگروه دوری G خواهد بود. پس خواهیم داشت

$$xy^{-1} \in Cyc(G)$$

حال فرض کنیم $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq Cyc(G)$. در نتیجه وجود دارد $b_1 \in G$ به قسمی که $\langle x_1, x_2\rangle = \langle b_1\rangle$ و عنصر $b_2 \in G$ چنان موجود است که $\langle x_1, x_2, x_3\rangle = \langle b_1, x_3\rangle = \langle b_2\rangle$. همین کار را ادامه می‌دهیم و می‌توان دید عنصر $b_{n-1} \in G$، چنان موجود است که $\langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle = \langle b_{n-2}, x_n\rangle = \langle b_{n-1}\rangle$. بنابراین $Cyc(G)$ یک گروه موضعاً دوری می‌باشد.□

می‌دانیم که $C_G(x)$ زیرگروه G است. باتوجه به شباهت $C_G(x)$ و $Cyc_G(x)$، این سئوال مطرح می‌شود که آیا این خاصیت برای $Cyc(x)$ نیز برقرار است. جواب این سئوال منفی است. مثال زیر نقض کننده این مطلب است.

مثال ۳.۲.۱ گروه $H = \mathbb{Z}_2 \bigoplus \mathbb{Z}_4$ را در نظر بگیرید. نشان می‌دهیم دوری ساز $(0, 2)$ مجموعه زیر است.

$$Cyc_G((0, 2)) = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 3)\}$$

اثبات : می‌توان دید که $\langle (0, 2), (1, 3)\rangle = \langle (1, 1)\rangle$

$$\langle (0, 2), (0, 1)\rangle = \langle (0, 1)\rangle \qquad \langle (0, 2), (0, 3)\rangle = \langle (0, 1)\rangle$$

$$\langle (0, 2), (1, 1)\rangle = \langle (1, 1)\rangle \qquad \langle (0, 2), (0, 0)\rangle = \langle (0, 2)\rangle$$

اما عناصر $(1, 0), (1, 2)$ در $Cyc((0, 2))$ قرار ندارند. زیرا در غیراین صورت خواهیم داشت:

$$\exists x \in H \quad s.t. \quad \langle (0, 2), (1, 2)\rangle = \langle x\rangle \Rightarrow \exists i, j \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad x = i(0, 2) + j(1, 2)$$

بنابراین $x = (j, 2i + 2j)$ وعدد صحیح l چنان موجود است که $lx = (0, 2)$ درنتیجه خواهیم داشت:

$$lj \equiv 0 \pmod 2 \qquad (1)$$

$$2lj + 2li \equiv 2 \pmod 4 \qquad (2)$$

از رابطه (۱) نتیجه می‌شود، $j \equiv 0 \pmod 2$ یا $l \equiv 0 \pmod 2$. اما j در پیمانه ۲ همنهشت با صفر نیست. زیرا در غیر این صورت $x = (0, 2i)$. در نتیجه x نمی‌تواند $(1, 2)$ را تولید کند. پس به تناقض می‌رسیم. پس $l \equiv 0 \pmod 2$. بنابراین برای عدد صحیح و مثبت n داریم $l = 2n$. اما معادله (۲)، نتیجه می‌دهد $4n(i + j) \equiv 2 \pmod 4$ ، که باز هم یک تناقض است.

همین طور اگر $(1, 0)$ در $Cyc_H((0, 2))$ باشد خواهیم داشت:

$$\exists i, j \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad \langle (0, 2), (1, 0) \rangle = \langle (j, 2i) \rangle$$

پس وجود دارد عدد صحیح l به قسمی که $(lj, 2li) = (0, 2)$. در نتیجه داریم:

$$lj \equiv 0 \pmod 2 \qquad (3)$$

$$2li \equiv 2 \pmod 4 \qquad (4)$$

همانند حالت قبل می‌توان نتیجه گرفت که، $j \not\equiv 0 \pmod 2$. پس $l \equiv 0 \pmod 2$. در نتیجه برای عدد صحیح و مثبت n داریم $l = 2n$ و از معادله (۴)، داریم $4ni \equiv 2 \pmod 4$ که یک تناقض است.
پس نشان دادیم $Cyc((0, 2))$ دقیقاً همان مجموعه ذکر شده است. می‌دانیم که $(1, 2) = (1, 1) + (0, 1)$.
اما $(1, 2)$ در $Cyc_G((0, 2))$ نیست و این مطلب با زیرگروه بودن $Cyc_G((0, 2))$ در تناقض است.$\square$

۳.۱ خواص دوری سازها

در این بخش چند خاصیت دوری‌سازها را در قالب چند لم و قضیه ذکر می‌کنیم. قبل از بیان اولین لم به تعریف زیر توجه کنید:

تعریف ۱.۳.۱ برای گروه G و زیرمجموعه‌های X, Y از G تعریف می‌کنیم :

$$Cyc_X(Y) = \{x \in X | \forall y \in Y \text{ دوری است } \langle x, y \rangle\}.$$

لم ۱.۳.۱ فرض کنیم G یک گروه باشد و $x \in G$ و $D = Cyc_G(x)$. در این صورت:

۱) D اجتماع هم‌دسته‌های $Cyc(G)$ است و اگر $|D| < \infty$، آنگاه $|Cyc(G)| < \infty$ و بعلاوه $|Cyc(G)|$ مرتبه D را می‌شمارد.

۲) $Cyc_D(D)$ یک زیرگروه موضعاً دوری از G شامل x است.

اثبات : ۱) ادعا می‌کنیم که هر عنصر G در یک زیرگروه موضعاً دوری ماکزیمال قرار دارد. فرض می‌کنیم

$$\sum = \{H \leq G | x \in H \text{ و } H \text{ موضعاً دوری است}\}.$$

می دانیم $\sum$ یک مجموعه جزئاً مرتب با ترتیب شمول است و همچنین تهی نیست، زیرا زیرگروه $\langle x \rangle$ را دارا است.

فرض کنیم $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ یک زنجیر از زیرگروههای موضعاً دوری شامل x واز عناصر $\sum$ باشد. ثابت می‌کنیم $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} H_\alpha$ عضو $\sum$ است. برای اثبات این مطلب کافی است نشان دهیم، این گروه یک زیرگروه موضعاً دوری است. فرض کنیم :

$$\{x_۱, x_۲, ..., x_n\} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \Gamma} H_\alpha \Rightarrow \forall i \in \{۱, ۲, ..., n\} \quad \exists \alpha_i \quad s.t. \quad x_i \in H_{\alpha_i}$$

پس با توجه به زنجیر بودن این زیرگروهها، وجود دارد $j \in \{۱, ۲, ..., n\}$ به قسمی که $\{x_۱, x_۲, ..., x_n\} \subset H_{\alpha_j}$ که با توجه به موضعاً دوری بودن H_{α_j}، می‌توان دید $\langle x_۱, x_۲, ..., x_n \rangle$ دوری است. در نتیجه $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} H_\alpha$ موضعاً دوری است. پس هر زنجیر دارای کران بالا در $\sum$ می‌باشد و طبق لم زورن $\sum$ عنصر ماکزیمال دارد. در نتیجه حداقل یک زیرگروه ماکزیمال موضعاً دوری شامل x، مانند D وجود دارد. نشان می‌دهیم D اجتماع زیرگروههای موضعاً دوری ماکزیمال از G شامل x است.

می‌دانیم برای هر $y \in D$، $\langle x, y \rangle$ زیرگروه دوری G است. بنابراین $\langle x, y \rangle$ یکی از عناصر $\sum$ است. پس زیرگروه ماکسیمال موضعاً دوری شامل x، مانند M موجود است که $\langle x, y \rangle$ را در بردارد. پس خواهیم داشت $D \subseteq \bigcup M$. بر عکس از آنجایی که عناصر هر زیرگروه ماکسیمال موضعاً دوری شامل x مانند M، با x زیرگروه دوری تشکیل می‌دهند، در نتیجه این زیرگروههادر D قرار دارند. در نتیجه $\bigcup M = D$.

از طرفی از آنجائی که عناصر $Cyc(G)$ با تمام عناصر و در نتیجه با x زیرگروه دوری تشکیل می‌دهند،

پس هر زیر گروه ماکسیمال موضعاً دوری، شامل $Cyc(G)$ است. در نتیجه $M = \bigcup_{x\in M} xCyc(G)$.
پس M اجتماعی از هم دسته‌های $Cyc(G)$ است و لذا اگر $|D| < \infty$، آنگاه $|Cyc(G)| < \infty$ و بعلاوه $|Cyc(G)|$، مرتبه D را می‌شمارد.

۲) می‌دانیم که $x \in Cyc_D(D)$. می‌خواهیم ثابت کنیم $Cyc_D(D)$ یک زیرگروه موضعاً دوری از G است. ابتدا زیرگروه بودن آن را بررسی می‌کنیم. کافی است نشان دهیم

$$\forall a, b \in Cyc_D(D), \qquad ab^{-1} \in Cyc_D(D).$$

می‌دانیم

$$\forall d \in D \quad \exists c \in G \quad s.t. \quad \langle b, d\rangle = \langle c\rangle \Rightarrow \langle b, d, x\rangle = \langle c, x\rangle.$$

چون $\langle d, x\rangle$ یک زیرگروه دوری است، پس $k \in G$ موجود است که $\langle d, x\rangle = \langle k\rangle$ و $\langle k\rangle = \langle k, x\rangle$ و در نتیجه $k \in D$. می‌دانیم $\langle c, x\rangle = \langle b, k\rangle$. با توجه به دوری بودن $\langle b, k\rangle$، می‌توان نتیجه گرفت، $\langle c, x\rangle$ نیز دوری است و $c \in D$. حال داریم

$$\langle ab^{-1}, d\rangle \leq \langle a, b, d\rangle = \langle a, c\rangle.$$

که $\langle a, c\rangle$ نیز دوری است. از آنجایی که $x \in D$ و $ab^{-1} \in D$، لذا $ab^{-1} \in Cyc_D(D)$. در نتیجه $Cyc_D(D)$ زیرگروهی از G می‌باشد.

حال مجموعه $\{d_1, d_2, ..., d_n\} \subseteq Cyc_D(D)$ را در نظر می‌گیریم. می‌توان نوشت

$$\exists a_1 \in G \quad s.t. \quad \langle x, d_1\rangle = \langle a_1\rangle.$$

از آنجایی که $x \in \langle a_1\rangle$، داریم $a_1 \in D$ و $d_1 \in \langle a_1\rangle$. در نتیجه

$$\exists a_2 \in G \quad s.t. \quad \langle a_1, d_2\rangle = \langle a_2\rangle.$$

به همین ترتیب داریم $d_1, d_2 \in \langle a_2\rangle$. این کار را ادامه می‌دهیم و نهایتاً داریم، $a_n \in G$ چنان موجود است که $\langle d_1, d_2, ..., d_n\rangle \leq \langle a_n\rangle$. پس $Cyc_D(D)$ یک زیرگروه موضعاً دوری است.□

یادآوری : گروه کواترنیون تعمیم یافته[۱] که آن را با Q_{4n} نمایش می‌دهند، به صورت زیر تعریف می‌شود.
$$Q_{4n} = \langle a, b | a^{2n} = b^4 = 1, a^n = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle.$$

لم ۲.۳.۱ (رجوع شود به قضیه (۶.۳.۵) در [?]) یک p-گروه متناهی تنها یک زیرگروه از مرتبه p دارد اگر و تنها اگر یک گروه دوری یا یک کواترنیون تعمیم یافته باشد.

قضیه ۱.۳.۱ فرض کنیم p یک عدد اول و G یک $p-$گروه متناهی باشد. در این صورت $Cyc(G) \neq 1$ اگر و تنها اگر G یک گروه دوری یا یک گروه کواترنیون تعمیم یافته باشد.

اثبات : کافی است ثابت کنیم که G فقط یک زیرگروه از مرتبه p دارد. در این صورت بنابر لم قبل، نتیجه می‌شود G یک گروه دوری یا یک گروه کواترنیون تعمیم یافته است. فرض کنیم $x \in Cyc(G)$ عنصری با مرتبه p باشد. در این صورت اگر A یک زیرگروه G با مرتبه p باشد، پس $A = \langle a \rangle$، که a عنصری در G با مرتبه p است. اما می‌دانیم $H = \langle x, a \rangle$ دوری می‌باشد. پس تنها یک زیرگروه با مرتبه p دارد. در نتیجه $\langle x \rangle = \langle a \rangle$ که $\langle a \rangle$ و $\langle x \rangle$، دو زیرگروه با مرتبه p در $H = \langle x, a \rangle$ است. در نتیجه $A = \langle a \rangle = \langle x \rangle = \langle a, x \rangle = H$. پس G تنها یک زیرگروه با مرتبه p دارد. پس G یا دوری یا یک کواترنیون تعمیم یافته است.

بر عکس فرض کنیم G یک گروه دوری باشد. در این صورت $Cyc(G) = G$. اگر G یک گروه کواترنیون تعمیم یافته باشد، در این صورت برای عدد صحیحی مانند n داریم:

$$G = Q_{4n} = \langle a, b | a^{2n} = b^4 = 1, a^n = b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle.$$

نشان می‌دهیم a^n در $Cyc(G)$ قرار دارد. می‌دانیم برای هر $x \in Q_{4n}$، اعداد صحیح i, j موجود است که $x = a^i b^j$. کافی است نشان دهیم برای هر دو عدد صحیح i, j، $\langle a^n, a^i b^j \rangle$ دوری است. می‌دانیم که $j \in \{-1, 0, 1, 2\}$. اگر $j = 0$، ادعای فوق به وضوح برقرار است. اگر $j = 1$ آنگاه

$$(a^{n+i}b)^2 = a^{n+i}ba^{n+i}b = a^{2n}a^iba^ib = a^iba^ib.$$

---
[۱] Generalized Quaternion group

اما با استفاده از ساختار Q_{4n} داریم

$$aba = b \Rightarrow a^i b a^i b = a^{i-1}(aba)a^{i-1}b = a^{i-1}ba^{i-1}b = ... = abab = bb = b^2 = a^n.$$

در نتیجه داریم $a^n \in \langle a^{n+i}b \rangle$ و لذا $a^i b \in \langle a^{n+i}b \rangle$. پس $\langle a^n, a^i b \rangle = \langle a^{n+i}b \rangle$.

اگر $j = -1$، دقیقاً مانند حالت قبل عمل می کنیم و نتیجه به دست می آید. اگر $j = 2$، کاملاً واضح است. زیرا $a^i b^2 = a^i a^n = a^{i+n}$. پس $\langle a^n, a^{n+i} \rangle = \langle a^{(n,i)} \rangle$. پس ثابت شد که $Cyc(G) \neq 1$.□

یادآوری : گروه G را تابدار[2] گویند، هرگاه همه عناصر ازمرتبه متناهی باشند.

گروه G را بی‌تاب[3] گویند، هرگاه همه عناصر غیر بدیهی آن از مرتبه نامتناهی باشد.

لم ۳.۳.۱ (رجوع شود به قضیه (۲.۲.٦) در [?]) فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی غیر بدیهی باشد. در این صورت اگر G بی‌تاب باشد آنگاه G را می‌توان به حاصل‌ضرب مستقیم تعداد متناهی از زیرگروههای دوری غیربدیهی اش تجزیه کرد.

تذکر : معلوم است که هرگاه G در شرایط قضیه بالا صدق کند آنگاه $G \cong \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}}_{r}$. که r تعداد مولدهای مینیمال G است.

تذکر : $Cyc(G)$ زیرگروهی از $Z(G)$ می‌باشد. در نتیجه $Cyc(G)$ زیرگروه نرمال G است. پس می‌توان گروه خارج قسمتی $G/Cyc(G)$ را تعریف کرد.

لم ۴.۳.۱ فرض کنیم G یک گروه و $x \in G$ باشد. فرض کنیم، $\tilde{G} = G/Z(G)$ و $\overline{G} = G/Cyc(G)$. در این صورت :

۱) $Cyc_{\overline{G}}(xCyc(G)) = \frac{Cyc_G(x)}{Cyc(G)}$

۲) $Cyc(\overline{G}) = 1$

۳) $Cyc(\tilde{G}) = 1$

۴) اگر G گروه تابدار و گروه بی‌تاب نباشد آنگاه $Cyc(G) = 1$.

---

[2] torsion

[3] torsion-free

۵) اگر G گروه بی‌تاب باشد و $Cyc(G) \neq ۱$، آنگاه $Z(G) = Cyc(G)$. اگر $Z(G)$ یک گروه بخشی باشد، آنگاه G موضعاً دوری است.

اثبات : ۱) فرض کنیم $y \in G$ چنان باشد که $yCyc(G) \in Cyc_{\overline{G}}(xCyc(G))$. در این صورت $\langle y,x\rangle Cyc(G)/Cyc(G)$ دوری است. در نتیجه $z \in \langle x,y\rangle$ چنان موجود است که $\langle y,x\rangle Cyc(G)/Cyc(G) = \langle z\rangle Cyc(G)/Cyc(G)$. پس عناصر $a_۱, a_۲ \in Cyc(G)$ چنان موجود است که $y = z^i a_۱, x = z^j a_۲$. پس $\langle x,y\rangle = \langle z^i a_۱, z^j a_۲\rangle \leq \langle z, a_۱, a_۲\rangle$. اما می‌دانیم $\langle z, a_۱, a_۲\rangle$ دوری است. پس $\langle x,y\rangle$ نیز دوری است. در نتیجه $y \in Cyc_G(x)$. پس همان‌طور که می‌خواستیم $Cyc_{\overline{G}}(xCyc(G)) \subseteq Cyc_G(x)/Cyc(G)$. بر عکس آن نیز واضح است و تساوی برقرارمی‌شود.

۲) با توجه به قسمت قبل داریم:

$$Cyc(\overline{G}) = \bigcap_{x\in G} Cyc_{\overline{G}}(xCyc(G)) = \bigcap_{x\in G} \frac{Cyc_G(x)}{Cyc(G)} = \frac{\bigcap_{x\in G} Cyc_G(x)}{Cyc(G)} = \frac{Cyc(G)}{Cyc(G)} = ۱.$$

۳) فرض کنیم $y \in G$ چنان موجود باشد که

$$yZ(G) \in Cyc(\widetilde{G}) \Rightarrow \forall x \in G \quad \exists z \in G \quad s.t. \quad \frac{\langle y,x\rangle Z(G)}{Z(G)} = \frac{\langle z\rangle Z(G)}{Z(G)}$$

پس عناصر $a_۱, a_۲ \in Z(G)$ موجودند که

$$y = a_۱ z^i, x = a_۲ z^j \Rightarrow yx = z^i a_۱ z^j b_۲ = z^j a_۲ z^i a_۱ = xy \Rightarrow \forall x \in G \quad yx = xy$$

$$\Rightarrow y \in Z(G) \Rightarrow Cyc(\widetilde{G}) = ۱.$$

۴) اگر G تابدارو بی تاب نباشد، در این صورت حتماً عنصری مانند x با مرتبه متناهی و عنصری مانند y با مرتبه نامتناهی در G وجود خواهد داشت. اگر فرض کنیم $Cyc(G)$ بدیهی نباشد عنصر $۱ \neq a \in Cyc(G)$ موجود است. اگر a با مرتبه متناهی باشد در این صورت داریم $\langle a,y\rangle$ دوری است که یک تناقض است و اگر a با مرتبه نامتناهی باشد با توجه به دوری بودن $\langle x,a\rangle$ به تناقض می‌رسیم.

۵) فرض کنیم $Cyc(G) \neq Z(G)$، در این صورت وجود دارد عنصر $x \in Z(G)$ به قسمی که $x \notin Cyc(G)$. پس عنصر $y \in G$ موجود است که $\langle x,y\rangle$ یک گروه آبلی نادوری است. می‌دانیم $Cyc(G) \neq ۱$. پس

عنصر $a \in Cyc(G)$ موجوداست. حال زیرگروه $H = \langle a, x, y\rangle$ را در نظر می‌گیریم. H یک زیرگروه آبلی از G است، زیرا عناصر a, x از $Z(G)$ انتخاب شده‌اند. پس یک گروه آبلی متناهی مولد بی‌تاب است در نتیجه بنابر قضیه قبل $H \cong \mathbb{Z} \bigoplus \mathbb{Z}$. زیرا تعداد مولدهای مینیمال H برابر ۲ است. اما از آنجائی که $Cyc(H) = ۱$، (زیرا $(۱, ۰)$ در $Cyc((۰, ۱))$ و $(۰, ۱)$ در $Cyc((۱, ۰))$ قرار ندارد) به تناقض می‌رسیم. زیرا $a \in Cyc(G)$ پس در $a \in Cyc(H)$. لذا $Z(G) = Cyc(G)$ و فرض خلف به تناقض می‌رسد. حال فرض کنیم $Z(G)$ بخشی باشد. اگر $y \in G$ را در نظر بگیریم با توجه به اینکه $Cyc(G) \neq ۱$ لذا عنصر $a \in Cyc(G) \neq ۱$ موجود است که $\langle a, y\rangle$ یک زیرگروه دوری است. در نتیجه

$$\exists c \in G, \langle a, y\rangle = \langle c\rangle \quad s.t. \quad y = c^i, a = c^j \Rightarrow y^j = a^i \Rightarrow y^j \in \langle a\rangle \leq Z(G)$$

با توجه به بخشی بودن $Z(G)$، عنصر z در $Z(G)$ چنان موجود است که $y^j = z^j$. از آنجائی که $z \in Z(G)$، داریم $(yz^{-۱}) = y^j z^{-j} = ۱$. اما G بی‌تاب است. در نتیجه با توجه به اینکه $yz^{-۱} = ۱$، داریم $y = z$. بنابراین $y \in Z(G)$. پس $G \subseteq Z(G)$ و بنابراین $G = Z(G) = Cyc(G)$. لذا G موضعاً دوری است. $\square$

۴.۱ گروههای مرتب

این بخش را به تعریف گروههای مرتب و ذکر چند لم و قضیه اختصاص داده‌ایم. در تمام این بخش گروهها متناهی فرض می‌شود.

تعریف ۱.۴.۱ گروه G را مرتب[۱] گویند هرگاه برای هر عنصر x در G، $Cyc_G(x)$ یک زیرگروه G باشد.

مثال زیر نمونه‌ایی از این گروهها است.

[۱] tidy group

مثال ۱.۴.۱ اگر G گروهی باشد که تمام عناصر آن از مرتبه عددی اول باشد آنگاه G گروهی مرتب است.

اثبات : ادعا می‌کنیم برای هر $x \in G$، $Cyc_G(x) = \langle x \rangle$. فرض کنیم $y \in Cyc(G) - \langle x \rangle$ در این صورت اگر $|x| = |y|$، با توجه به اینکه $\langle x, y \rangle$ دوری است می‌توان نتیجه گرفت $y \in \langle x \rangle$ و اگر $|y| = q \neq |x| = p$ با توجه به دوری بودن $\langle x, y \rangle$ داریم $\langle x, y \rangle = \langle xy \rangle$. اما می‌دانیم $|xy| = pq$، زیرا $y \in Cyc(G) \subset Z(G)$. که با اول بودن مرتبه همه عناصر G در تناقض است.□

این بخش را با لمی درباره ضرب مستقیم گروههای مرتب شروع می‌کنیم.

لم ۱.۴.۱ فرض کنیم G و H گروههای باشند که $|G|$ و $|H|$ نسبت به هم اولند. در این صورت $G \times H$ مرتب است، اگر وتنها اگر G و H مرتب باشند.

اثبات : فرض کنیم G وH مرتب باشند. اگر $(g, h) \in G \times H$، آنگاه $Cyc_{G\times H}(g, h) = Cyc_G(g) \times Cyc_H(h)$. زیرا برای هر $(g_۱, h_۱), (g_۲, h_۲) \in G \times H$ داریم $\langle (g_۱, h_۱), (g_۲, h_۲) \rangle = \langle g_۱, g_۲ \rangle \times \langle h_۱, h_۲ \rangle$. در نتیجه $Cyc_{G\times H}(g, h)$ یک زیرگروه $G \times H$ است. برعکس، فرض کنیم $G \times H$ مرتب باشد. در نتیجه برای هر $g \in G$ داریم $Cyc_G(g) = \pi_G(Cyc_{G\times H}(g, e))$. (که π_G یک همریختی طبیعی از $G \times H$ به G است). لذا $Cyc_G(g)$ یک زیرگروهG است.□

با توجه به لم بالا اگر G را گروه متناهی و پوچتوان در نظر بگیریم، G مرتب است اگر و تنها اگرهر pـزیرگروه سیلوی آن مرتب باشد.

لم ۲.۴.۱ فرض کنیم G یک pـگروه آبلی باشد. در این صورت G یک گروه مرتب است اگر وتنها اگر G یک گروه دوری یا گروه آبلی مقدماتی باشد.

اثبات : اگر G دوری باشد واضح است که G مرتب است. اگر G یک pـگروه آبلی مقدماتی باشد، در این صورت برای هر $g \in G$ $Cyc_G(g) = \langle g \rangle$. زیرا اگر فرض کنیم عنصری مانند $x \in Cyc_G(g) - \langle g \rangle$ موجود باشد. پس $\langle x, g \rangle$ دوری است. اما می‌دانیم $\langle x \rangle$ و $\langle g \rangle$ دو زیرگروه با مرتبه p از گروه مورد نظر می‌باشد. از

آنجائی که هر گروه دوری دارای تنها یک زیرگروه از هر مرتبه مشخص می‌باشد، داریم $\langle x\rangle = \langle g\rangle$. پس $x \in \langle g\rangle$ که یک تناقض است.

برعکس، فرض کنیم G گروه دوری و pـگروه آبلی مقدماتی نباشد. در این صورت دارای زیرگروهی یکریخت با $\mathbb{Z}_p \bigoplus \mathbb{Z}_{p^۲}$ خواهد بود. اما این گروه مرتب نیست. زیرا مرکزساز عنصر $(۰, p)$ یک زیرگروه نیست.□

پس با توجه به این لم، هرگاه G یک گروه آبلی باشد، آنگاه G مرتب است اگر و تنها اگر هر pـزیرگروه آن دوری یا آبلی مقدماتی باشد.

ما حتی می‌توانیم pـگروههای مرتب را در حالت کلی شناسایی کنیم و خواص آنها را مشخص کنیم. اما ابتدا لازم است لم زیر را مورد توجه قرار دهیم.

لم ۳.۴.۱ فرض کنیم G یک pـگروه مرتب باشد. x را عنصری در G در نظر می‌گیریم که $|x| \neq p$ و $\langle x\rangle$ زیرگروه دوری ماکسیمال باشد. در این صورت $Z(G) \leq \langle x\rangle$.

اثبات : فرض کنیم $z \in Z(G)$ و x همان عنصر ذکر شده در قضیه باشد. در نتیجه $\langle x, z\rangle$ آبلی است. اما $\langle x, z\rangle$ آبلی مقدماتی نیست. در نتیجه با استفاده از لم قبل $\langle x, z\rangle$ دوری است. اما از آنجائی که $\langle x\rangle$ زیرگروه دوری ماکسیمال است. در نتیجه $z \in \langle x\rangle$. بنابراین $Z(G) \leq \langle x\rangle$.

لم بالا می‌گوید اگر G یک pـگروه مرتب باشد، در این صورت $Z(G)$ دوری است. حال می‌توانیم قضیه زیر را ثابت کنیم.

قضیه ۱.۴.۱ فرض کنیم G یگ pـگروه باشد. در این صورت G یک گروه مرتب است اگرو تنها اگر G دارای زیرگروه نرمال دوری یازیرگروه نرمال با ساختار کواترنیون تعمیم یافته مانند H باشد و به ازای هر $x \in G - H$ مرتبه x، p باشد.

اثبات : فرض کنیم G یک pـگروه مرتب باشد. فرض کنیم $H = Cyc_G(z)$ که z یک عنصر غیر همانی از $Z(G)$ باشد. فرض می‌کنیم $x \in G - H$ که $|x| \neq p$ باشد. x در یک زیرگروه دوری ماکسیمال مانند $\langle y\rangle$ قرار دارد که $|y| \neq p$. پس با استفاده از لم قبل داریم $z \in \langle y\rangle$. در نتیجه $\langle x, z\rangle \in \langle y\rangle$. بنابراین $\langle x, z\rangle$

دوری است و در نتیجه $x \in Cyc_G(z) = H$. می توان دید $z \in Cyc(H)$. با استفاده از قضیه (۱.۳.۱) می‌توان نتیجه گرفت H دوری یا کواترنیون تعمیم یافته است. حال اگر فرض کنیم $\langle h\rangle$ یک زیرگروه دوری ماکسیمال از H باشد که $|h| > p$، هر مزدوج این زیرگروه نیز دوری و دارای مرتبه بزرگتر از p خواهد بود. در نتیجه در H قرار خواهد داشت. لذا H یک زیرگروه نرمال G خواهد بود.

برعکس، فرض کنیم G یک pـگروه با زیرگروه نرمال H با شرایط بالا باشد. در این صورت اگر $x \in H$، آنگاه $Cyc_G(x)$ دوری خواهد بود، زیرا H یا دوری است یا کواترنیون تعمیم یافته است. اگر $x \notin H$، در نتیجه $|x| = p$. پس $\langle x\rangle = Cyc_G(x)$. در نتیجه برای هر $x \in G$، $Cyc_G(x)$ دوری است و G یک گروه مرتب است.□