بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

دانشگاه تربیت مدرس

دانشکده علوم ریاضی

تأییدیه اعضای هیأت داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد

اعضای هیأت داوران نسخهٔ نهایی پایان‌نامه آقای **منصور حسینی‌حاجی‌حسن** رشته **ریاضی‌محض** به شماره دانشجویی **۸۹۵۲۰۵۱۰۰۵** تحت عنوان: **«درباره برخی خمینه‌های همگن لورنتزی»** را در تاریخ **۱۳۹۱/۸/۳۰** از نظر فرم و محتوا بررسی نموده و آن را برای اخذ درجهٔ کارشناسی‌ارشد مورد تأیید قرار دادند.

اعضای هیأت داوران	نام و نام‌خانوادگی	رتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنما	دکتر سیدمحمدباقر کاشانی	استاد	
۲- استاد ناظر داخلی	دکتر سیدمسعود امینی	دانشیار	
۳- استاد ناظر داخلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	
۴- استاد ناظر خارجی	دکتر ناصر بروجردیان	دانشیار	
۵- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر عباس حیدری	استادیار	

آیین نامه چاپ پایان‌نامه (رساله)های دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس

نظر به اینکه چاپ و انتشار پایان نامه (رساله)های تحصیلی دانشجویان دانشگاه تربیت مدرس، مبین بخشی از فعالیتهای علمی - پژوهشی دانشگاه است بنابراین به منظور آگاهی و رعایت حقوق دانشگاه،دانش آموختگان این دانشگاه نسبت به رعایت موارد ذیل متعهد می‌شوند:

ماده ۱: در صورت اقدام به چاپ پایان نامه (رساله)ی خود، مراتب را قبلاً به طور کتبی به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اطلاع دهد.

ماده ۲: در صفحه سوم کتاب (پس از برگ شناسنامه) عبارت ذیل را چاپ کند:

«کتاب حاضر، حاصل پایان نامه کارشناسی ارشد/ رساله دکتری نگارنده در رشته ریاضی محض هندسه است که در سال ۱۳۹۱ در دانشکده علوم ریاضی دانشگاه تربیت مدرس به راهنمایی سرکار ~~خانم~~/جناب آقای دکتر سید محمد باقر کاشانی ، مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر ـــــ و مشاوره سرکار خانم/جناب آقای دکتر ـــــ از آن دفاع شده است.»

ماده ۳: به منظور جبران بخشی از هزینه‌های انتشارات دانشگاه، تعداد یک درصد شمارگان کتاب (در هر نوبت‌چاپ) را به «دفتر نشر آثارعلمی» دانشگاه اهدا کند. دانشگاه می‌تواند مازاد نیاز خود را به نفع مرکز نشر درمعرض فروش قرار دهد.

ماده ۴: در صورت عدم رعایت ماده ۳، ۵۰٪ بهای شمارگان چاپ شده را به عنوان خسارت به دانشگاه تربیت‌مدرس، تأدیه کند.

ماده ۵: دانشجو تعهد و قبول می کند در صورت خودداری از پرداخت بهای خسارت، دانشگاه می‌تواند خسارت مذکور را از طریق مراجع قضایی مطالبه و وصول کند؛ به علاوه به دانشگاه حق می‌دهد به منظور استیفای حقوق خود، از طریق دادگاه، معادل وجه مذکور در ماده ۴ را از محل توقیف کتابهای عرضه شده نگارنده برای فروش، تامین نماید.

ماده ۶: اینجانب منصوره حسینی جرحسن دانشجوی رشته ریاضی محض مقطع کارشناسی ارشد تعهد فوق وضمانت اجرایی آن را قبول کرده، به آن ملتزم می شوم.

نام و نام خانوادگی: منصوره حسینی جرحسن

تاریخ و امضا: ۱۳۹۱/۱۰/۲

آیین‌نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهشهای علمی دانشگاه تربیت مدرس

مقدمه: با عنایت به سیاست‌های پژوهشی و فناوری دانشگاه در راستای تحقق عدالت و کرامت انسانها که لازمه شکوفایی علمی و فنی است و رعایت حقوق مادی و معنوی دانشگاه و پژوهشگران، لازم است اعضای هیأت علمی، دانشجویان، دانش‌آموختگان و دیگر همکاران طرح، در مورد نتایج پژوهشهای علمی که تحت عناوین پایان‌نامه، رساله و طرحهای تحقیقاتی با هماهنگی دانشگاه انجام شده است، موارد زیر را رعایت نمایند:

ماده ۱- حق نشر و تکثیر پایان نامه/ رساله و درآمدهای حاصل از آنها متعلق به دانشگاه می باشد ولی حقوق معنوی پدید آورندگان محفوظ خواهد بود.

ماده ۲- انتشار مقاله یا مقالات مستخرج از پایان‌نامه/ رساله به صورت چاپ در نشریات علمی و یا ارائه در مجامع علمی باید به نام دانشگاه بوده و با تایید استاد راهنمای اصلی، یکی از اساتید راهنما، مشاور و یا دانشجو مسئول مکاتبات مقاله باشد. ولی مسئولیت علمی مقاله مستخرج از پایان نامه و رساله به عهده اساتید راهنما و دانشجو می باشد.

تبصره: در مقالاتی که پس از دانش‌آموختگی بصورت ترکیبی از اطلاعات جدید و نتایج حاصل از پایان‌نامه/ رساله نیز منتشر می‌شود نیز باید نام دانشگاه درج شود.

ماده ۳- انتشار کتاب، نرم افزار و یا آثار ویژه (اثری هنری مانند فیلم، عکس، نقاشی و نمایشنامه) حاصل از نتایج پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرحهای تحقیقاتی کلیه واحدهای دانشگاه اعم از دانشکده ها، مراکز تحقیقاتی، پژوهشکده ها، پارک علم و فناوری و دیگر واحدها باید با مجوز کتبی صادره از معاونت پژوهشی دانشگاه و براساس آئین نامه های مصوب انجام شود.

ماده ٤- ثبت اختراع و تدوین دانش فنی و یا ارائه یافته ها در جشنواره‌های ملی، منطقه‌ای و بین‌المللی که حاصل نتایج مستخرج از پایان‌نامه/ رساله و تمامی طرح‌های تحقیقاتی دانشگاه باید با هماهنگی استاد راهنما یا مجری طرح از طریق معاونت پژوهشی دانشگاه انجام گیرد.

ماده ٥- این آیین‌نامه در ٥ ماده و یک تبصره در تاریخ ۸۷/٤/۱ در شورای پژوهشی و در تاریخ ۸۷/٤/۲۳ در هیأت رئیسه دانشگاه به تایید رسید و در جلسه مورخ ۸۷/۷/۱٥ شورای دانشگاه به تصویب رسیده و از تاریخ تصویب در شورای دانشگاه لازم‌الاجرا است.

«اینجانب منصور حسینی حاج حسن دانشجوی رشته ریاضی محض - هندسه ورودی سال تحصیلی ۱۳۸۹ مقطع کارشناسی ارشد دانشکده علوم ریاضی متعهد می شوم کلیه نکات مندرج در آئین نامه حق مالکیت مادی و معنوی در مورد نتایج پژوهش های علمی دانشگاه تربیت مدرس را در انتشار یافته های علمی مستخرج از پایان نامه / رساله تحصیلی خود رعایت نمایم. در صورت تخلف از مفاد آئین نامه فوق الاشعار به دانشگاه وکالت و نمایندگی می دهم که از طرف اینجانب نسبت به لغو امتیاز اختراع بنام بنده و یا هر گونه امتیاز دیگر و تغییر آن به نام دانشگاه اقدام نماید. ضمناً نسبت به جبران فوری ضرر و زیان حاصله بر اساس برآورد دانشگاه اقدام خواهم نمود و بدینوسیله حق هر گونه اعتراض را از خود سلب نمودم»

امضا:

تاریخ: ۱۳۹۱/۱۰/۲

دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی محض (هندسه)

درباره برخی خمینه‌های همگن لورنتزی

نگارنده

منصور حسینی‌حاجی‌حسن

استاد راهنما

دکتر سید محمد باقر کاشانی

آبان ماه ۱۳۹۱

تقدیم به

پدربزرگوارم

و

مادر عزیزم

یاحق

تشکر

سپاس ذات پروردگار یکتا که توفیق کسب علم و دانش را به این حقیر عطا فرمود. اکنون که با عنایت به لطف ایشان، توفیق دانش آموختگی دردوره کارشناسی ارشد را یافته‌ام بر خود واجب می‌دانم از استاد گرانقدرم آقای دکتر کاشانی مراتب سپاس و تشکر را بعمل آورم.

چکیده

در این پایان‌نامه ساختار G- خمینه‌های همگن لورنتزی d- بعدی $M = {}^{G}/_{H}$ *بدست آمده از گروه لی نیم*-ساده G توصیف می‌شود. بنا به نتیجه‌ای از کوالسکی کافیست حالتی را بگیریم که G سره عمل کند در نتیجه زیرگروه پایاگر H فشرده است. افزون برآن هر فضای همگن ${}^{G}/_{\widetilde{H}}$ با زیرگروه پایاگر کوچکتر $\widetilde{H} \subset H$ یک متریک لورنتزی ناوردا می‌پذیرد. خمینه همگن ${}^{G}/_{H}$ با زیرگروه پایاگر فشرده همبند H خمینه پذیرفتنی کمین نامیده می‌شود هرگاه یک متریک لورنتزی ناوردا بپذیرد در حالی که خمینه همگن ${}^{G}/_{\widetilde{H}}$ با زیرگروه پایاگر بزرگتر $H \subset \widetilde{H}$ چنین متریکی نپذیرد. برای بعد $d \leq ۱۱$ لیستی از همه چنین خمینه‌های M ارائه می‌شود و متریک‌های لورنتزی ناوردا بر آن توصیف می‌شود.

در این طرح تحقیق مطالب مرجع $[A3]$ تشریح می‌شود.

کلمات کلیدی : متریک‌های ناوردا – متریک‌های لورنتزی – خمینه‌های همگن

فهرست مطالب

عنوان صفحه

پیش گفتار..۱

فصل اول : پیش‌نیاز

۱.۱ گروه وجبرلی..۴

۱.۲ عمل گروه لی..۷

۱.۳ نگاشت نمایی لی..۱۱

۱.۴ زیر خمینه‌های تمام ژئودزیک..۱۲

۱.۵ هندسه‌موضعی لورنتزی..۱۳

۱.۶ استغراق شبه ریمانی..۱۶

۱.۷ کلاف تاری اصلی (PFB) و هموستار اصلی..۱۷

۱.۸ فضاهای متقارن وفضاهای همگن..۱۹

۱.۹ گروه لی نیم ساده وجبر لی نیم ساده..۲۲

۱.۱۰ساختار جبرهای لی نیم‌ساده..۲۴

۱.۱۱جبرهای لی متقارن قائم..۲۹

فصل دوم : خمینه‌های پذیرفتنی کمین همگن لورنتزی

۲.۱ قرارداد و تعریف..۳۲

۲.۲ متریک های لورنتزی ناوردا بر یک G- خمینه همگن سره...............................۳۵

G ۲.۳ – خمینه های لورنتزی همگن کمین $M = {}^{G}/_{H}$ که $G = G_1 \times G_2$ ۴۰

۲.۴ خمینه های همگن لورنتزی گروه لی فشرده ساده...۴۵

۲.۵ خمینه های همگن لورنتزی بدست‌آمده از یک گروه لی ساده نافشرده.......................۵۰

۲.۶ یک توصیف از خمینه‌های همگن نافشرده لورنتزی ازکلاس I و II ۵۲

۲.۷ $SL_n(\mathbb{R})$– خمینه‌های همگن لورنتزی...۵۵

۲.۸ G- خمینه‌های همگن لورنتزی که G گروه لی ساده دارای رتبه ۱ است........................۶۰

۲.۹خمینه‌های همگن لورنتزی از کلاس II با بعد $d \leq 11$ بدست آمده ازیک گروه لی ساده

نافشرده۷۱

کتاب

نامه..۸۳

واژه نامه فارسی به انگلیسی...۸۵

واژه نامه انگلیسی به فارسی...۹۲

پیش گفتار

مطالعه G - خمینه‌های همگن لورنتزی که خودگسترش خمینه‌های همگن ریمانی هستند یک مساله جالب در هندسه دیفرانسیل است. بر خلاف هندسه ریمانی در هندسه لورنتزی ممکن است عمل گروه G بر خمینه M سره نباشد. مثال‌هایی از عمل ناسره عبارت است از فضاهای $\mathrm{S}_۱^{\mathrm{n}}$ و $H_۱^n$. یک نتیجه شگفت انگیز از کوالسکی نشان می‌دهد این دو مثال همه G– خمینه‌های همگن لورنتزی ناسره را که G یک گروه لی ساده باشد با تقریب طولپائی موضعی بدست می‌دهد (که در آن اگر $G = \mathrm{SO}\ (۲, \mathrm{n})$ باشرط $n \geq ۳$، آنگاه مولفه همبندی عضو همانی H یعنی H° با $SO(۱, n)^\circ$ مزدوج است و هم چنین اگر $G = \mathrm{SO}(۱, \mathrm{n})$ که در آن $n \geq ۳$، آنگاه H° با $SO(۱, n-۱)^\circ$ مزدوج است.) افزون بر آن قضیه‌ای از کوالسکی بیان می‌کندکه اگر $\frac{G}{\mathrm{H}}$ فضای همگن نابدیهی، همبند و G یک گروه لی تقریباً ساده با مرکز باپایان و یک متریک G- ناوردای لورنتزی روی $\frac{G}{\mathrm{H}}$ موجود باشد، آنگاه یکی از شرط‌های پایین درست است

الف – یک متریک G- ناوردای ریمانی بر $\frac{G}{\mathrm{H}}$ نیز وجود دارد، یا

ب - یک n وجود دارد که برای آن G بصورت موضعی با $SO\ (۱, n)$، یا با $SO\ (۲, n)$ طولپاست.

از طرفی فرض کنید $\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}$ یک فضای همگن بدست آمده ازگروه لی G با جبر لی ساده $\mathfrak{g}$ و $۲ \leq \dim\left(\frac{G}{H}\right)$ باشد. آنگاه حکم‌های پایین هم‌ارزست.

الف – فضای همگن $\frac{G}{\mathrm{H}}$ هم متریک ریمانی G - ناوردا، و هم متریک لورنتزی G- ناوردا می‌پذیرد.

ب – بستار $\mathrm{Ad}_{\mathrm{G}}\ (H)$ فشرده است و زیر فضای یک بعدی $\mathfrak{g}$ که در $\mathfrak{h}$ قرار ندارد نسبت به آن ناورداست.

همچنین برای هر زیرگروه گسسته Γ از $SO(۱,۲)$، فرم کیلینگ یک متریک لورنتزی ناوردا بر ${SO(۱,۲)^\circ}/{\Gamma}$

تعریف می‌کند. ولی با این حال $SO(۲,۲)$ و $SO(۱,۱)$ نمی‌توانند تقریباً ساده باشد.پس برای $n \geq ۲$ ،G بصورت موضعی با $SO(۱,n)$ طولپاست.یا برای $n \geq ۳$ ، G بصورت موضعی با $SO(۲,n)$ طولپاست .

در باره قضیه کوالسکی مقاله‌های زیادی منتشر شده است در مرجع $[S1]$ قضیه کوالسکی به حالتی که G نیم ساده باشد گسترش یافته است.

((هر خمینه همگن لورنتزی ناسره بدست آمده از گروه لی نیم ساده G، با ضرب مستقیم $\mathrm{S}_۱^{\mathrm{n}}$ یا $H_۱^n$ ویک خمینه همگن ریمانی، موضعی طولپاست .))

با در نظر گرفتن مطلب بالا رده بندی خمینه‌های همگن لورنتزی $M = \frac{G}{H}$ که در آن G یک گروه لی نیم ساده است به این حالت، یعنی هنگامی که زیرگروه پایاگر H فشرده باشد (با تقریب پوششی) فرو می‌کاهد.

این پایان نامه با عنوان ((درباره برخی خمینه‌های همگن لورنتزی)) شامل دو فصل است که در فصل اول پیش نیازهای مورد نیاز فصل دوم نوشته است و در فصل دوم با ارائه مفهوم پذیرفتنی کمین، خمینه‌های پذیرفتنی‌کمین همگن لورنتزی توضیح داده و در پایان برای بعد $d \leq ۱۱$ لیستی از همه چنین خمینه‌های M ارائه می‌شود و متریک‌های لورنتزی ناوردا بر آن توصیف می‌شود که مرجع اصلی آن $[A3]$ است.

فصل اول

پیش نیازها

در این فصل پیش نیازها بیان می‌شود.

۱.۱ گروه و جبر لی

۱.۱.۱تعریف$[KP; P. 69]$

گروه توپولوژیک جدائی‌پذیر G را یک گروه لی گویند اگر G ساختار خمینه‌ای هموار داشته باشد چنان که نسبت به آن نگاشت $(g_۱ g_۲) \rightarrow (g_۱$ و $g_۲)$ از خمینه حاصلضربی $G \times G$ به G ونگاشت

$g \rightarrow g^{-۱}$ بر G هموار باشد .

یک گروه لی همبند را گروه لی تحلیلی گویند.

مثال : خمینه‌های $GL(n, R)$ ، $SL(n, R)$ ، $O(n)$ و $U(n)$ مثال‌هایی ازگروه‌های لی است .

مثال : گروه‌های لی $SO(n)$ ، $\mathrm{SU(n)}$، $GL(n, C)$ و $U(n)$ گروه‌های لی تحلیلی است.

۱.۱.۲تعریف$[KP; P. 69]$

فرض کنید G یک گروه لی (تحلیلی) باشد . زیرگروه H از G را یک زیرگروه لی (تحلیلی) گویند هرگاه H یک ساختار گروه لی (تحلیلی) داشته باشد که نسبت به آن نگاشت شمول از H به G هموار ودر هر نقطه منظم (یعنی یک فروبری هموار) باشد .

فرض کنید H یک زیرگروه بسته گروه لی G باشد، آنگاه یک ساختار یگانه هموار بر H وجود دارد که نسبت به آن H یک گروه لی است و مولفه‌ی هبندیH شامل عضو همانی، زیرگروه تحلیلی مولفه‌ی همبندی G شامل عضو همانی است .

۱.۱.۳تعریف$[\boldsymbol{Lee}; \boldsymbol{P}.\,\boldsymbol{39}]$

فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ دو گروه لی باشد . منظور از یک همریختی (یکریختی) گروه‌های لی بین $G_۱$ و $G_۲$ عبارت است از یک همریختی $f: G_۱ \rightarrow G_۲$ که هموار (وابرسانی) نیز باشد.

مثال : نگاشت $f: R \rightarrow S^۱$ با فرمول $f(t) = e^{it}$ یک همریختی بین گروه‌های لی است .

۱.۱.۳تعریف$[\boldsymbol{KP}; \boldsymbol{P}.\,\boldsymbol{24}]$

فرض کنید F یک میدان باشد. منظور از یک جبر لی $\mathfrak{g}$ با میدان F، یک فضای برداری با میدان F همراه با ضرب *[.,.]* است که در هرمولفه F- خطی باشد .

جبر $\mathfrak{g}$ با میدان F را یک جبر لی نامند هرگاه رابطه‌های پایین درست باشد .

الف – رابطه پاد تقارنی :$\forall\, X, Y \in \mathfrak{g}, [X, Y] = -[Y, X]$.

ب – اتحاد ژاکوبی : $\forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{g}, \big[[X, Y], Z\big] + \big[[Y, Z], X\big] + \big[[Z, X], Y\big] = ۰$

اگر F میدان عددهای حقیقی یا میدان عددهای مختلط باشد، $\mathfrak{g}$ را به ترتیب یک جبر لی حقیقی یا یک جبر لی مختلط نامند.

نگاشت خطی $ad: \mathfrak{g} \rightarrow End_{\mathrm{F}}(\mathfrak{g})$ (End_{F} : فضای برداری F – درون‌ریختی‌های $\mathfrak{g}$ است) چنین تعریف می‌شود

$$(adX)(Y) = [X, Y] \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \tag{۱-۱}$$

چون کروشه نسبت به مولفه‌ی اول خطی است، برای هر $X \in \mathfrak{g}$، adX نسبت به X خطی است. خطی بودن کروشه نسبت به مولفه‌ی دوم نتیجه می‌دهد : $adX \in End_{\mathrm{F}}(\mathfrak{g})$.

فرض‌کنید شرط (الف) در تعریف جبر لی برقرار باشد. در این صورت شرط (ب) درست است اگروتنها اگر

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} ; \left[Z, [X, Y] \right] = \left[X, [Z, Y] \right] + \left[[Z, X], Y \right].$$

و رابطه‌ی بالا درست است اگروتنها اگر

$$\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g} ; \ (adZ)[X, Y] = [X, (adZ)Y] + [(adZ)X, Y]. \qquad (۱-۲)$$

۱.۱.۴تعریف$[\boldsymbol{Lee}; \boldsymbol{P}.95]$

فرض‌کنید $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ دو جبر لی باشد. نگاشت خطی $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ یک همریختی جبرهای لی نامیده می‌شود هرگاه

$$\varphi([X, Y]) = [\varphi(X), \varphi(Y)] \qquad (۱-۳)$$

منظور از یک یکریختی بین دو جبر لی یک همریختی جبرهای لی است که یک به یک و پوشا باشد.

۱.۱.۵تعریف $[\boldsymbol{Hel}; \boldsymbol{P}.99]$

فرض کنید b و a دوزیر فضای جبر لی $\mathfrak{g}$ باشند.کروشه $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ چنین تعریف می‌شود

$$[\mathrm{a}, \mathrm{b}] = \mathrm{span}\{ [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] : \mathrm{X} \in \mathrm{a}, \mathrm{Y} \in \mathrm{b} \} \qquad (۱-۴)$$

زیر فضای $\mathfrak{h}$ از $\mathfrak{g}$ یک زیر جبر لی آن است اگر $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ و ایده‌آل آن است اگر $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$.

هر ایده‌آل یک زیرجبر لی است.

جبر لی $\mathfrak{g}$ را جابجائی یا آبلی گویند اگر $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = ۰$.

۱.۱.۶گزاره $[KP; P.30]$

فرض کنید $\mathfrak{g}$ یک جبر لی و b و a دو زیر جبر لی آن باشند، آنگاه زیر فضاهای $a \oplus b, a \cap b, [a, b]$ (جمع مستقیم فضاهای برداری) از $\mathfrak{g}$ زیر جبرهای لی آن است .

مثال‌هایی از ایده‌آل :

الف – $Z_{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$ مرکز $= \{ X : [X, Y] = ۰ \quad \forall Y \in \mathfrak{g} \}$

ب – جابجاگر $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ یک ایده‌آل $\mathfrak{g}$ است .

پ – هسته هر همریختی جبرهای لی مانند $\tau : \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ (یعنی $Ker\ \tau$) یک ایده‌آل $\mathfrak{h}$ است.

۱.۲ عمل گروه لی

۱.۲.۱ تعریف $[Lee; P.206]$

فرض کنید G یک گروه و M یک مجموعه باشد. یک عمل چپ G بر M یک نگاشت

$$\theta : G \times M \to M, \quad (g, p) \to g.p$$

است که برای هر $p \in M$ و $g_۱, g_۲ \in G$:

الف - $g_۱ .(g_۲.p) = (g_۱ g_۲).p$

ب - $e.p = p$

عمل راست G بر M مانند بالا تعریف می‌شود.

اکنون فرض کنید G یک گروه لی و M یک خمینه باشد. عمل راست (چپ) G بر M را هموار نامیم اگر نگاشت‌های بالا هموار باشد. از این پس با عمل چپ گروه لی G بر خمینه M سروکار داریم.

خمینه M به همراه عمل هموار یک گروه لی G برآن، یک G- فضای (چپ یا راست) هموار نامیده می‌شود.

فرض کنید $G \times M \to M$ یک عمل پیوسته باشد برای $g \in G$ قرار دهید

$$\theta_g : M \to M \ ; \ \ p \to \theta_g (p)= \ g.p \tag{۱-۵}$$

آنگاه θ_g یک همانسانی با وارون $\theta_{g^{-1}}$ است و چنان چه عمل گروه هموار باشد θ_g یک وابرسانی است.

همواره می توان یک عمل راست را با تعریف $p.g = g.p^{-1}$ به یک عمل چپ تبدیل کرد و با روش مشابه می‌توان یک عمل چپ را به یک عمل راست تبدیل کرد.

فرض کنید $G \times M \to M$ عمل گروه G بر مجموعه M باشد. آنگاه

برای هر $p \in M$، مجموعه $G.p = \{g.p : g \in G\}$ را مدار p نسبت به عمل G بر M گویند.

عمل را ترایا گویند اگر برای هر دو نقطه $p, q \in M$ ، $g \in G$ چنان موجود باشد که $g.p = q$، یعنی مدار هر نقطه از M، سراسر M است.

برای هر $p \in M$، گروه پایاگر آن چنین تعریف می‌شود

$$G_{\mathrm{p}} = \{g \in G ; g.p = p\} \ . \tag{۱-۶}$$

عمل $G \times M \to M$ را موثر نامند، اگر $\forall\, p \in M$ ،$g.p = p$ آنگاه $g = e$.

عمل $G \times M \to M$ را آزاد نامند اگر $\forall\, p \in M \ ; G_p = \{ e \}$

یادآوری: از تعریف آشکارا دیده می‌شود هر عمل آزاد عمل موثر است.

مثال :

الف (عمل ترایا) : عمل گروه $SO(n+۱)$ بر خمینه S^{n} .

ب (عمل آزاد) : عمل هر گروه لی G بر خودش آزاد و ترایاست.

۱.۲.۲ عمل های سره $[\boldsymbol{Lee}; \boldsymbol{P}. \mathbf{215}]$

فرض کنید M و N فضاهای توپولوژیک باشد. نگاشت $f: M \to N$ را سره نامند اگر برای هر زیر مجموعه‌ی فشرده‌ی $K \subseteq N$، $f^{-۱}(K)$، زیر مجموعه‌ی فشرده M باشد.

فرض کنید $G \times M \to M$ یک عمل پیوسته باشد. عمل G را سره نامند اگر نگاشت

$\theta : G \times M \to M \times M \,, (g,p) \to (g.p,p)$ سره باشد.

۱.۲.۳ گزاره $[\boldsymbol{Lee}; \boldsymbol{P}. \mathbf{215}]$

فرض کنید گروه لی G بر خمینه M پیوسته عمل کند. این عمل سره است اگر وتنها اگر برای هر زیر مجموعه فشرده $K \subseteq M$، مجموعه $G_K = \{ g \in G \,;\, (g.K) \cap K \neq \emptyset \}$ فشرده باشد که در آن $g.K = \{g.k \,;\, k \in K\}$.

۱.۲.۴ گزاره $[\boldsymbol{Lee}; \boldsymbol{P}. \mathbf{217}]$

برای هر عمل پیوسته $G \times M \to M$، نگاشت خارج قسمتی $\pi : M \to M/G$ باز است.

۱.۲.۴ قضیه (خمینه‌های خارج قسمتی) $[Lee; P. 217]$

فرض کنید $G \times M \to M$ یک عمل هموار، آزاد و سره گروه لی G برخمینه هموار M باشد. آنگاه فضای مداری M/G یک خمینه توپولوژیک با بعد $\dim(M) - \dim(G)$ است و دارای یک ساختار هموار یگانه است که نسبت به آن نگاشت $\pi : M \to M/G$ یک استغراق هموار است.

۱.۲.۵ فضاهای همگن$[Lee; P. 223]$

یک خمینه هموار با یک عمل هموار و ترایای گروه لی G برآن، یک G- فضای همگن (خمینه همگن) نامیده می‌شود.

فرض کنید G یک گروه لی و H یک زیر گروه لی آن باشد. فرض کنید G/H مجموعه همه همدسته‌های چپ H در G باشد. G/H را با توپولوژی خارج قسمتی که با نگاشت طبیعی $\pi : G \to G/H$ مشخص می‌شود فضای همدسته‌ای چپ G به پیمانه H نامند.

۱.۲.۶ قضیه (ساخت فضای همگن)$[Lee; P. 224]$

فرض کنید G یک گروه لی و H زیرگروه لی بسته آن باشد. فضای همدسته‌ای چپ G/H یک ساختار هموار یگانه دارد که نسبت به آن نگاشت خارج قسمتی $\pi : G \to G/H$ یک استغراق هموار است.

عمل $G \times G/H \to G/H$، که به صورت $g_1.(g_2H) = (g_1g_2)H$ تعریف می‌شود G/H را به یک G- فضای همگن تبدیل می‌کند.