بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه قم
دانشکده علوم پایه
پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض

عنوان:

فضای فوریه ابرگروه های کروی و فراکروی

استاد راهنما:

دکتر سید محمد طباطبایی

نگارنده:

حمیده سادات نژادحسینی

زمستان ۱۳۹۲

چکیده:

در این مقاله فضای فوریه ابرگروه‌های کروی و فراکروی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این منظور ابتدا مفهوم ابرگروه و خواص آن را تشریح می‌کنیم و سپس با استفاده از توابع π-شعاعی ابرگروه‌های کروی و فراکروی را تعریف می‌کنیم.

کلمات کلیدی:

ابرگروه، ابرگروه کروی، ابرگروه فراکروی، پیچش، بازگشت، اندازه، محمل اندازه، تصویرگر کروی، نگاشت π-شعاعی، فضای فوریه، فضای فوریه اشتیلیس، ضرب‌گرها.

فهرست مطالب

۱ مفاهیم اولیه وپیش نیازها ۱

۱.۱ نمادگذاری ۲

۲.۱ اندازه‌ها ۳

۳.۱ جبرهای باناخ ۷

۴.۱ ابرگروه ۱۲

۵.۱ فضای فوریه و فوریه اشتیلیس ۱۶

۲ ابرگروه‌های کروی ۲۸

۱.۲ ابرگروه‌های کروی ۲۹

۳ ابرگروه‌های فراکروی ۵۹

۱.۳ ابرگروه های فراکروی ۶۰

٤ ضرب‌گرهای فضای فوریه $A(K)$ ۷۳

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۸۵

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۷

مقدمه

فضای فوریه یکی از مهم‌ترین و پیچیده‌ترین مباحث در ریاضیات می‌باشد. در این پایان نامه ابتدا به بیان تعریف و ویژگی‌های ابرگروه‌ها می‌پردازیم و سپس با معرفی توابع π–شعاعی که نوع خاصی از توابع با این خاصیت که همواره $\pi(f) = f$ هستند. یک نوع از ابرگروه‌های جدید به نام ابرگروه کروی را توصیف می کنیم که در فصل دوم به تفصیل روند ساخت چنین ابرگروه‌هایی بیان و اثبات شده است. سپس با معرفی تابع Δ_π و با استفاده از این رده جدید در فصل سوم به ساخت رده دیگری از ابرگروه‌ها به نام ابرگروه‌های فراکروی می‌پردازیم و سرانجام این فصل با بیان فضای‌فوریه ابرگروه‌های کروی و فراکروی به پایان می‌رسد. پیش از این فضای فوریه برای رده‌های دیگری از ابرگروه‌ها توسط ریاضیدانان بحث شده است به‌عنوان مثال فضای فوریه برای ابرگروه‌های فشرده توسط $Verm$ در [۲۵] و فضای فوریه برای ابرگروه‌های دوهمدسته توسط $Mizony$ در [۱۷] و سایر جبرها مانند فوریه اشتیلیس و جبرفون‌نویمن برای گروه‌های آزاد توسط $Cohen, Michele$ در [۵] مطالعه شده‌اند.و سرانجام ضرب‌گرهای فضای فوریه در فصل چهارم مورد بحث قرار می گیرند. این پایان نامه برگرفته از مقالات زیر می‌باشد:

1- V. Muruganandam, Fourier algebra of a hypergroup – II. Spherical hypergroups , Math. Nachr. 281, No. 11, 1590-1603 (2008).

2- E. Damek and F. Ricci, Harmonic analysis on solvable ex-

tensions of H-type groups, J. Geom. Anal. 2, No. 3, 213–248 (1992).

فصل ۱

مفاهیم اولیه وپیش نیازها

۱.۱ نمادگذاری

دراین بخش به‌صورت اجمالی و خلاصه نمادهای مورد استفاده در این مقاله را بیان می کنیم، مفاهیم جدید و ناآشنا در بخش مفاهیم اولیه ارائه می‌شوند.

مجموعه تمام اندازه‌های رادون مختلط بر فضای توپولوژیک X .... $M(X)$

فضای همه توابع مختلط مقدار پیوسته با محمل فشرده بر فضای هاوسدورف X .... $C_c(X)$

فضای باناخ توابع پیوسته کراندار بر فضای هاوسدورف X .... $C_b(X)$

مجموعه همه اندازه های نامنفی در $M(X)$ .... $M^+(X)$

مجموعه همه اندازه های با محمل فشرده در $M(X)$ .... $M_c(X)$

محمل اندازه μ .... $supp\mu$

محمل تابع f .... $suppf$

دوگان فضای باناخ X .... X^*

فضای توابع خطی و کراندار از فضای باناخ X به X .... $BL(X)$

مجموعه اعداد مختلط .... $\mathbb{C}$

مجموعه اعداد حقیقی .... $\mathbb{R}$

مجموعه اعداد حقیقی مثبت .... $\mathbb{R}^+$

مجموعه اعداد صحیح .... $\mathbb{Z}$

مفاهیم اولیه

در این بخش، بعضی از تعاریف، لم‌ها و قضایای مورد نیاز و کاربردی در فصل‌های آتی را ذکر می‌کنیم و از آوردن تعاریف، لم و قضایای مقدماتی تا حد امکان صرف‌نظر می‌کنیم.

۲.۱ اندازه‌ها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و M یک σ- جبر بر X است. یک اندازه بر X تابعی مانند $\mu : M \longrightarrow [0, \infty]$ است، به‌طوری‌که اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای ازمجموعه‌های دو به دو جدا از هم در M باشد آن‌گاه،

۱) $\mu(\emptyset) = 0$

۲) $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و M σ- جبر تعریف شده روی X است. به زوج (X, M) فضای اندازه پذیر [۱] گوییم.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید (X, M) فضای اندازه‌پذیر است. یک اندازه علامت‌دار [۲] بر آن تابعی مانند $\mu : M \to [-\infty, +\infty]$ است. به‌طوری‌که،

۱) $\mu(\emptyset) = 0$.

[۱] $Measurable$
[۲] $Signed$

۲) μ فقط یکی از مقادیر $+\infty$ و $-\infty$ را می‌پذیرد.

۳) اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای ازمجموعه‌های دوبه دو جدا از هم در M باشد آن‌گاه، $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ و اگر $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n)$ کراندار باشد جمع اخیر به‌طور مطلق همگرا است. بنابراین هر اندازه یک اندازه علامت‌دار است. اندازه بیان شده در تعریف ۱.۲.۱ را اندازه مثبت می‌نامیم.

تعریف ۴.۲.۱. یک اندازه مختلط [۳] بر فضای اندازه پذیر (X, M) نگاشت $\mu : M \to \mathbb{C}$ است به طوری که $\mu(\emptyset) = 0$ و اگر $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای ازمجموعه‌های مجزا در M باشد آن‌گاه، $\mu(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$، که در آن سری به‌طور مطلق همگرا است.

از این پس در این مقاله به اندازه‌های مختلط اندازه می‌گوییم و اگر نوع دیگری از اندازه‌ها مورد نظر باشد صراحتاً بیان می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید X یک فضای هاوسدورف به‌طور موضعی فشرده است. توپولوژی کُن [۴] بر $M^+(X)$ ضعیف‌ترین توپولوژی است به‌طوری‌که به ازای هر f متعلق به $C_c^+(X)$ نگاشت $\mu \longmapsto \int_X f d\mu$ و نگاشت $\mu \longmapsto \mu(X)$ پیوسته هستند.

قضیه ۶.۲.۱. توپولوژی کُن با توپولوژی ضعیف $*$ یکی است اگر و تنها اگر X فشرده باشد.

برهان. به [۱۵] رجوع کنید. $\square$

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید X فضای توپولوژیک است. σ-جبر تولید شده توسط مجموعه‌های باز X را σ-جبر مجموعه‌های بورل [۵] می‌نامند.

تعریف ۸.۲.۱. هر اندازه تعریف شده بر σ-جبر بورل را یک اندازه بورل [۶] می‌نامیم.

---
[۳] $Complex$
[۴] $Cone$
[۵] $Borel$
[۶] $Borel\ \ measure$

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک هاوسدورف و β، σ-جبر مجموعه‌های بورل است. اندازه مثبت و بورل $\mu : \beta \longrightarrow [0, \infty]$ را منظم [۷] گوییم، اگر شرایط زیر برقرار باشد:

۱) به ازای هر مجموعه فشرده K، $\mu(K) < \infty$.

۲) اگر B یک زیر مجموعه بورل از X باشد آن‌گاه،

$$\mu(B) = \inf\{\mu(U) : B \subset U, \text{باز است } U\}.$$

۳) اگر U یک زیر مجموعه باز X باشد آن‌گاه،

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subset U, \text{فشرده است } K\}.$$

تذکر ۱۰.۲.۱. هر اندازه بورل علامت‌دار μ را می‌توان به‌صورت $\mu = \mu^+ - \mu^-$ نوشت که در آن μ^+ و μ^- اندازه‌های بورل مثبت هستند. μ را منظم می‌نامیم هرگاه μ^+ و μ^- منظم باشند.

تعریف ۱۱.۲.۱. اندازه بورل مختلط μ را می توان به صورت $\mu = \mu_r + i\mu_i$ نوشت که در آن μ_r و μ_i اندازه‌های علامت‌دار هستند. اندازه مختلط μ را منظم می‌نامیم هرگاه μ_i و μ_r منظم باشند. هر اندازه بورل مختلط منظم را یک اندازه رادون [۸] می‌نامیم.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. اندازه مثبت $\mu \in M(X)$ را یک اندازه احتمال [۹] می‌نامیم، هرگاه $\mu(X) = 1$. فضای همه اندازه‌های احتمال روی X مجهز به توپولوژی ضعیف را با $M^1(X)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۱۳.۲.۱. فرض کنید X فضای توپولوژیک و μ متعلق به $M(X)$ باشد. در اینصورت زیرمجموعه یکتای بسته‌ای از X مانند E وجود دارد که $\mu(E^c) = 0$ و اگر V باز باشد

---

[۷] *Regular*

[۸] *Radon measure*

[۹] *Probability measure*

به‌طوری که $(E\cap V)\neq\emptyset$ آن‌گاه $\mu(E\cap V)>0$ است.

برهان. به[۱] رجوع کنید. $\square$

تعریف ۱.۲.۱۴. مجموعه یکتای E به‌دست آمده در قضیه فوق را محمل [۱۰] μ می نامیم و با نماد $supp(\mu)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۵. اندازه دیراک در نقطه x به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\delta_x(E)=\begin{cases} 1 & x\in E \\ 0 & x\notin E \end{cases}$$

که در آن $E\subseteq X$.

تعریف ۱.۲.۱۶. فرض کنید G یک گروه به طور موضعی فشرده است یک اندازه هار چپ (یا به اختصار اندازه هار)، اندازه رادون ناصفر μ روی G است که پایای چپ [۱۱] باشد. یعنی به ازای هر مجموعه بورل E و هر $x\in G$ داشته باشیم $\mu(xE)=\mu(E)$.

تعریف ۱.۲.۱۷. فرض کنید X فضای توپولوژیک است و $f:X\to\mathbb{C}$ یک تابع باشد. بستار مجموعه $\{x\in X : f(x)\neq 0\}$ را محمل f [۱۲] می‌نامیم، و با $supp(f)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۱۸. یک فضای توپولوژیک را به‌طور موضعی فشرده[۱۳] گوییم هر گاه هر نقطه از آن دارای همسایگی فشرده باشد.

نماد ۱.۲.۱۹. فرض کنید X یک فضای هاوسدورف به طور موضعی فشرده است. مجموعه توابع مختلط مقدار پیوسته بر X را با $C(X)$ و مجموعه توابع متعلق به $C(X)$ که محمل

[۱۰] $Support$
[۱۱] $Left\ \ invariant$
[۱۲] $support$
[۱۳] $Locally\ \ compact$

فشرده دارند را با $C_c(X)$ و مجموعه توابع متعلق به $C(X)$ که در بی نهایت صفر می‌شوند را با $C_\circ(X)$ نشان می‌دهیم (گوییم $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ در بی‌نهایت صفر می‌شود، هرگاه به ازای هر $\epsilon > \circ$ زیرمجموعه فشرده $E \subseteq X$ موجود باشد به‌طوری که به ازای هر $x \in X - E$، $|f(x)| < \epsilon$).

۳.۱ جبرهای باناخ

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید X یک مجموعه و $U \subset X$ باشد. تابع مشخصه[۱۴] χ_U با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_U(x) = \begin{cases} ۱ & x \in U \\ \circ & x \notin U. \end{cases}$$

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید X یک فضای برداری و N یک زیرفضای آن است. به‌ازای هر $x \in X$ فرض کنید $\pi(x)$ یک هم‌دسته از N شامل x باشد یعنی $\pi(x) = x + N$. این هم‌دسته‌ها یک فضای برداری را پدید می‌آورند که آن‌را فضای خارج قسمتی X به پیمانه N می‌نامیم و با نماد $\frac{X}{N}$ نمایش می‌دهیم. جمع و ضرب اسکالر این فضا به‌ازای هر $x, y \in X$ و هر اسکالر α به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x+y) \text{ و } \alpha\pi(x) = \pi(\alpha x).$$

حال فرض کنید که $\mathfrak{C}$ یک توپولوژی روی X و N یک زیرفضای بسته از آن است. مجموعه همه $E \subseteq \frac{X}{N}$ هایی که $\pi^{-۱}(E) \in \mathfrak{C}$ است را با $\mathfrak{C}_N$ نمایش می‌دهیم. $\mathfrak{C}_N$ یک توپولوژی روی $\frac{X}{N}$ تعریف می‌کند و آن را توپولوژی خارج قسمتی[۱۵] می‌نامیم. درحقیقت E را نسبت به $\mathfrak{C}_N$ باز است، اگر و تنها اگر $\pi^{-۱}(E)$ نسبت به $\mathfrak{C}$ باز باشد.

[۱۴] *Character*
[۱۵] *Quotient topolpgy*

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنیم X یک فضای به‌طور موضعی فشرده و $\mathcal{K}(X)$ گردایه همه زیرمجموعه‌های فشرده و ناتهی از X است. به‌ازای هر A و B زیرمجموعه X قرار می‌دهیم،

$$K_A(B) = \{C \in \mathcal{K}(X) : C \cap A \neq \emptyset, C \subset B\}.$$

دراینصورت توپولوژی تولید شده توسط زیر پایه $\{K_U(V) \ : \ U, V \ \subseteq \ X$ باز$\}$ را توپولوژی مایکل[16] می‌نامیم.

تذکر ۴.۳.۱. از این به بعد همواره فرض می‌کنیم $\mathcal{K}(X)$ مجهز به توپولوژی مایکل است.

قضیه ۵.۳.۱. فرض کنید G یک گروه به‌طور موضعی فشرده و λ یک اندازه هار چپ بر G است. تابع پیوسته $\Delta : G \to (0, \infty)$ چنان موجود است که به ازای هر مجموعه بورل $E \subseteq G$ و $x \in G$ داریم، $\lambda(Ex) = \Delta(x)\lambda(E)$.

برهان. به [۱۲] رجوع کنید. $\square$

تعریف ۶.۳.۱. تابع Δ بدست آمده در قضیه قبل را تابع مدولار [17] G می‌نامیم.

تعریف ۷.۳.۱. G را مدولار یکه [18] نامیم هرگاه $\Delta \equiv 1$.

لم ۸.۳.۱. گروه‌های فشرده مدولار یکه هستند.

برهان. رجوع کنید به [۱۲]. $\square$

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنید M یک فضای باناخ است. فضای باناخ M_* را پیش‌دوگان [19] M می‌نامیم هرگاه $(M_*)^* \cong M$.

---

[16] *Michael topology*
[17] *Modular*
[18] *unimodular*
[19] *Predual*

گزاره ذیل نتیجه‌ای از قضیه نگاشت باز است.

گزاره ۱۰.۳.۱. اگر X,Y فضاهای باناخ باشند و $\Lambda : X \longrightarrow Y$ پیوسته، خطی، یک‌به‌یک و پوشا باشد، آن‌گاه اعداد حقیقی a و b یافت می‌شوند که به‌ازای هر $x \in X$ داریم،

$$a \parallel x \parallel \leq \parallel \Lambda(x) \parallel \leq b \parallel x \parallel .$$

برهان. به [۲۲] رجوع کنید.

□

تعریف ۱۱.۳.۱. فرض کنید A و B جبرهای باناخ هستند. یک همریختی[۲۰] از A به B یک نگاشت خطی کراندار $\phi : A \longrightarrow B$ است، به‌طوری که به ازای هر x و y متعلق به A داریم، $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$.

تعریف ۱۲.۳.۱. یک کاراکتر یا مشخصه بر جبرجابجایی A عبارت است از یک همریختی ناصفر $f : A \longrightarrow \mathbb{C}$. مجموعه تمام مشخصه‌های A را با $\Omega(A)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۳.۳.۱. فرض کنیم A یک جبر است. یک بازگشت[۲۱] روی A نگاشت مزدوج خطی $a \longmapsto a^*$ است که $a^{**} = a$ و $(ab)^* = b^*a^*$.

زوج $(A,*)$ را $*$–جبر گوییم.

یک $*$–جبر با نرم کامل را یک $*$–جبر باناخ می‌نامیم.

یک C^*– جبر یک $*$ جبر باناخ مانند A است که برای هر a متعلق به A داشته باشیم:

$$\parallel a^*a \parallel = \parallel a \parallel^2 .$$

[۲۰] *Homeomorphism*
[۲۱] *Involution*

تعریف ۱.۳.۱۴. فرض کنید X فضای توپولوژیک و $1 \leq p < \infty$ و $\mu \in M(X)$ است. قرار می‌دهیم،

$$\Omega = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C} : \int \mid f \mid^p d\mu < \infty\}.$$

و رابطه هم ارزی به فرم زیر بیان می‌شود: $f \sim g$ اگر و تنها اگر $\int \mid f - g \mid^p d\mu = 0$ اگر و تنها اگر $f = g(a.e)$.

آن‌گاه فضای همه رده‌های هم ارزی را فضای L^p می‌نامیم به‌عبارت دیگر،

$$L^p(X, \mu) = \{[f] : f \in \Omega\}.$$

برای راحتی $[f]$ را با f نشان می‌دهیم.

$L^p(X, \mu)$ با نرم $\|.\|_p$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، فضای باناخ است.

$$\|f\|_p = (\int |f(x)|^p d\mu(x))^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \leq p < \infty)$$

برای راحتی $L^p(X, \mu)$ را با نماد $L^p(X)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۳.۱۵. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار مختلط است. تبدیل خطی و کراندار $T : X \longrightarrow \mathbb{C}$ را یک تابعک خطی [22] گویند. گردایه همه تابعک‌های خطی روی X را با X^* نشان می‌دهیم و آن را دوگان [23] X می‌نامیم.

تعریف ۱.۳.۱۶. فرض کنید A یک جبرباناخ جابجایی و $\Omega(A)$ مجموعه همه مشخصه‌های A است. برای هر a متعلق به A تبدیل زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\hat{a} : \Omega(A) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$T \longmapsto T(a)$$

[22] $Linear \quad functional$
[23] $Dual$

$\hat{a}$ را تبدیل گلفاند a[۲۴] می‌نامیم.

تعریف ۱.۳.۱۷. جبرنیم‌ساده [۲۵]جبری است که هیچ ایده‌آل پوچ غیربدیهی ندارد.

تعریف ۱.۳.۱۸. جبر باناخ A تاوبری[۲۶] است، اگر هر ایده‌آل سره بسته آن مشمول در یک ایده آل ماکسیمال دوسویی مدولار باشد. یا اگر عناصری از آن که محمل فشرده دارند در آن چگال باشند.

تعریف ۱.۳.۱۹. فرض کنید A یک جبر باناخ است. A را منظم [۲۷]نامیم، هرگاه نیم ساده باشد و به ازای هر $B \subseteq \Omega(A)$ بسته و هر $p \in \Omega(A)$ که $p \notin B$، $a \in A$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\hat{a}(p) \neq 0$. و به ازای هر $f \in B$، $\hat{a}(f) = 0$.

قضیه ۱.۳.۲۰. فرض کنید A جبر باناخ (یا گروه به طور موضعی فشرده) و $\mathcal{C}$ زیرجبر از $C_0(A)$ است. اگر $\mathcal{C}$ قویاً جداکننده نقاط A باشد. تصویر گر طبیعی از A به توی $\Omega(A)$، یک یکریختی از Aبه روی یک زیرمجموعه بسته $\Omega(A)$ است.

برهان. به قضیه ۳.۲.۴ از [۲۱] رجوع کنید. $\square$

لم ۱.۳.۲۱. فرض کنید X یک فضای هاوسدورف به طور موضعی فشرده و $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}(X)$ به‌طوری که $\cup_{A\in\mathcal{A}} A = X$ و اعضای $\mathcal{A}$ جدا از هم هستند (به عبارت دیگر $\mathcal{A}$ یک افراز X است) و $\pi : X \longrightarrow \mathcal{A}$ تصویرگر طبیعی[۲۸] است. در این‌صورت شرایط زیر برقرار است،

۱) توپولوژی خارج قسمتی بر $\mathcal{A}$ با توپولوژی نسبی بر $\mathcal{A}$ برابر است.

۲) π نگاشت باز از X به $\mathcal{A}$ است.

۳) $\mathcal{A}$ یک فضای هاوسدورف به طور موضعی فشرده است.

[۲۴] $Gelfand\ \ transform$
[۲۵] $Semisimple\ \ algebra$
[۲۶] $Tauberian$
[۲۷] $Regular$
[۲۸] $Natural\ \ projector$

برهان. به بخش ۱۳.۱ از [۱۵] رجوع کنید. $\square$

۴.۱ ابرگروه

تعریف زیر برگرفته از تعریف ابرگروه [۲۹] در مقاله [۱۵] است که در آنجا $Canvo$ نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید K یک فضای هاوسدورف به‌طور موضعی فشرده و ناتهی است، اگر K درشرایط زیر صدق کند، یک ابرگروه نامیده می‌شود،

H_1) عمل دوتایی $*$ (که آن‌را پیچش می‌نامیم) بر $M(K)$ موجود است، به‌طوری‌که فضای برداری $M(K)$ را تبدیل به یک جبر می‌کند. به‌علاوه به ازای هر x و y متعلق به K ، $\delta_x * \delta_y$ یک اندازه احتمال است و نگاشت $\delta_x * \delta_y \longmapsto (x, y)$ از $K \times K$ به توی $M^1(K)$ پیوسته است.

H_2) عنصر e در K وجود دارد به‌طوری‌که به ازای هر x در K داریم،

$$\delta_e * \delta_x = \delta_x * \delta_e = \delta_x.$$

H_3) همانریختی $\check{x} \longmapsto x$ از K به K (که آن را بازگشت می‌نامیم) وجود دارد که در شرایط زیر صدق می‌کند،

۱) به ازای هر $x \in K$ همواره $\check{\check{x}} = x$.

۲) اگر $\check{\mu}$ به‌صورت زیر تعریف شود،

$$\int_K f(x)d(\check{\mu}(x)) = \int_K f(\check{x})d\mu(x) \qquad (f \in C_c(K))$$

آن‌گاه،

$$(\delta_x * \delta_y)\check{} = \delta_{\check{y}} * \delta_{\check{x}}. \qquad (x, y \in K).$$

[۲۹] $Hypergroup$

۳) $e \in supp(\delta_x * \delta_y)$ اگر و تنها اگر $y = \check{x}$.

$H_۴$) به ازای هر $x, y \in K$، $supp(\delta_x * \delta_y)$ فشرده است.

به علاوه نگاشت $(x, y) \longmapsto supp(\delta_x * \delta_y)$ از $K \times K$ به توی $\mathcal{K}(K)$ پیوسته است.

تذکر ۱.۴.۲. عنصر e ذکر شده در شرط $H_۲$ در تعریف فوق منحصر به فرد است. برای اثبات فرض کنیم e یکتا نباشد و عنصر $e_۱$ وجود داشته باشد که در شرایط ذکر شده صدق می‌کند در این صورت $\delta_e * \delta_{e_۱} = \delta_e$ و $\delta_e * \delta_{e_۱} = \delta_{e_۱}$ درنتیجه $\delta_e = \delta_{e_۱}$ پس $e = e_۱$.

تذکر ۱.۴.۳. بازگشت ذکر شده در شرط $H_۳$ تعریف فوق منحصر به فرد است. برای اثبات فرض کنیم $x \longmapsto \check{x}$ و $x \longmapsto \tilde{x}$ در شرط ذکرشده صدق‌کنند در این‌صورت $e \in supp(\delta_x * \delta_{\tilde{x}})$ و در نتیجه $\tilde{x} = \check{x}$.

تعریف ۱.۴.۴. فرض کنید K یک ابرگروه است. یک اندازه رادون پایای چپ m بر K، اندازه هار چپ نامیده می‌شود. در واقع به ازای هر $x \in K$ داریم،

$$\delta_x * m = m.$$

تذکر ۱.۴.۵. همواره فرض می‌کنیم ابرگروه‌های بحث شده در این پایان‌نامه دارای اندازه هار چپ باشند و این اندازه را با m نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۴.۶. فرض کنید K یک ابرگروه است. برای هر تابع پیوسته f بر K قرار می‌دهیم،

$$f(x * y) = \langle f, \delta_x * \delta_y \rangle = \int_K f(z) d(\delta_x * \delta_y)(z) \qquad (x, y \in K).$$

تعریف ۱.۴.۷. فرض کنید K یک ابرگروه است. اگر تابع f بر K پیوسته باشد آن‌گاه به ازای هر $x \in K$ انتقال چپ f توسط x را با $_x f$ نشان می‌دهیم، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود،

$$ {}_xf(y) = f(x*y) = \int_K f(z)d(\delta_x * \delta_y)(z). $$

قضیه ۸.٤.۱. فرض کنید G گروه به طور موضعی فشرده است و دو اندازه μ و ν داریم که به ازای هر $f \in C_c(G)$، $\int f d\mu = \int f d\nu$ است. دراینصورت $\mu = \nu$.

برهان. به [۱۳] رجوع کنید. $\square$

توجه کنید حالت ابرگروهی قضیه یکتایی نمایش ریتس معادل حالت گروهی آن است و در [۴] بیان شده است.

تذکر ۹.٤.۱. فرض کنید K یک ابرگروه است. $L^1(K)$ همراه با پیچش و بازگشت زیر یک $*$ جبر باناخ است.

$$ f*g(x) = \int f(x*y)g(\check{y})dy. $$

$$ f^*(x) = \Delta(\check{x})\overline{f(\check{x})}. $$

که در آن $g, f \in L^1(K)$ و $x \in K$ است [۴].

تعریف ۱۰.٤.۱. فرض کنید K یک ابرگروه است. اگر برای $g \in C_c(K)$ قرار دهیم

$$ \tilde{g}(x) = \overline{g(\check{x})} $$

آن‌گاه طبق تعریف $f*g$ داریم:

$$ f*\tilde{g}(x) = \int_K f(x*y)\overline{g(y)}dm(y) \qquad (f, g \in C_c(K)) $$

تعریف ۱۱.٤.۱. یک تابع پیوسته ϕ بر ابرگروه K مثبت معین [۳۰] نامیده می‌شود. اگر برای هر عدد صحیح n و برای هر انتخاب از اعداد مختلط $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ و $x_1, x_2, ..., x_n$ در K داشته باشیم:

[۳۰] $Positive\ \ definite$