دانشکده ریاضی

تولیدگروههای متناهی بوسیله زیرگروههای ماکسیمال از زیرگروههای ماکسیمال

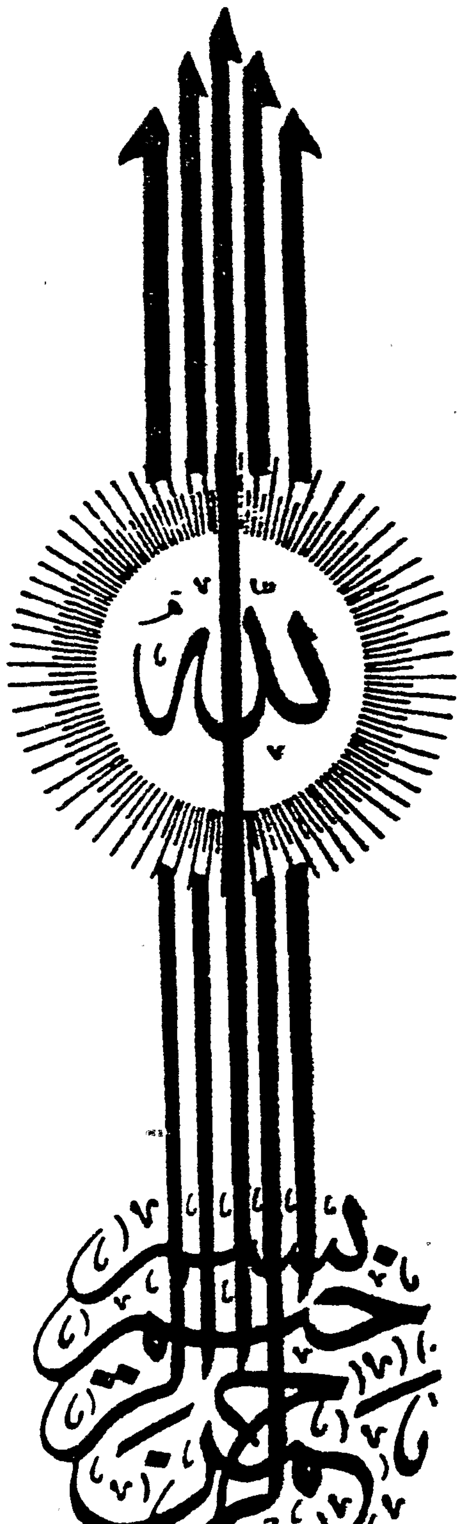
سعید اسکندری

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض

استاد راهنما: دکتر حمید آقا تولایی

زمستان ۱۳۷۷


الله
بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیم به:

پدر و مادر عزیزم و کلیه کسانی که از صمیم قلب دوستشان دارم

چکیده

مطالب مطرح شده در این پایان نامه در مورد تولیدگروههای متناهی است و در واقع در پی یافتن جوابی برای سوال زیر می‌باشد.

فرض کنیم M یک زیرگروه ماکسیمال ، ازگروه متناهی و ساده G باشد و همچنین H نیز یک زیرگروه ماکسیمال از M باشد ، آیا عضوی مانند g از G وجود دارد که :

$$G = < H , g >$$

با توجه به مطالبی که مورد بحث و بررسی قرار خواهیم داد، به این نتیجه خواهیم رسید که جواب این سوال مثبت است. اکنون خلاصه‌ای از مراحل پایان نامه را می‌آوریم .

برای اینکه بتوان لم‌ها و قضایائی را براحتی در مورد G , M و H که بدون در نظر گرفتن شرائط فوق بر روی آنهااثبات کرد ، ابتدا دو تعریف اساسی γ-سه‌تائی و W - سه تائی (سه تائی ویلانت) را خواهیم نوشت ، سپس لم‌های مورد نیاز را با استفاده از این تعاریف اثبات می‌کنیم و در ادامه با استفاده از قضایائی در مورد p - سیلو زیرگروهها ، قضایای ویلانت، قضایای مربوط به عمل گروهها ، مطالب مربوط به مکمل‌های فربنیوس و قضیه شور – زاسن هوس سه قضیه اصلی این پایان نامه اثبات خواهد شد.

در آخر با استفاده از برهان خلف که در آن خواهیم داشت :

G یک گروه ساده و متناهی بوده و فرض خواهیم کرد جواب سوال مطرح شده منفی باشد و نیز به ازای هر $g \in G$ خواهیم داشت : $H = M \cap < H , g >$ در ادامه اثبات خواهیم کرد که $H_M = 1$ و H یک مکمل فربنیوس در G می‌باشد، آنگاه بوسیله یکی از قضایای فربنیوس به این نتیجه خواهیم رسید که G ساده نیست . و این با فرض اولیه در تناقض می‌باشد و به این شکل به جواب سوال دست خواهیم یافت.

تقدیر و تشکر

برخود لازم می‌دانم که از زحمات استاد گرانقدر جناب آقای دکتر حمیدآقا تولایی که استاد راهنمای اینجانب در ارائه این پایان نامه بوده‌اند صمیمانه تشکر نمایم.

همچنین از حضور جناب آقای دکتر مالک نژاد و جناب آقای دکتر ذکائی و جناب آقای دکتر اسرافیلیان و جناب آقای دکتر خیاطی که بعنوان هیئت داوران در جلسه دفاعیه اینجانب شرکت کرده‌اند سپاسگزارم.

و نیز مراتب قدردانی خود را نثار جناب آقای حمید غریبی و سرکارخانم یوسفی می‌نمایم.

فهرست مطالب و عناوین پروژه

فصل سوم

مقدمه:

موضوع اصلی این پایان نامه در مورد تولید گروههای متناهی با استفاده از یک زیرگروه ماکسیمال از زیرگروه ماکسیمال گروه متناهی و ساده G می‌باشد. در واقع فرض خواهیم کرد که G یک گروه ساده و متناهی و M یک زیرگروه ماکسیمال از آن باشد و نیز H یک زیر گروه ماکسیمال از M باشد. آیا عضوی مانند $g \in G$ وجود دارد که بتوان G را با استفاده از H و g تولید کرد؟ یا آیا $G = < H , g >$.

برای پاسخ گوئی به این سوال در این پایان نامه سه فصل در نظر گرفته شده است. در فصل اول سعی خواهیم کرد ،مروری بر قضایا و گزاره‌های مورد نیاز و مهم که در نظریه گروههای متناهی هستند داشته باشیم و احتمالاً در برخی موارد گزاره‌هائی را نیز اثبات خواهیم کرد و ممکن است در مواردی دیگر خواننده را به مراجع و منابع لازم جهت آگاهی بیشتر ارجاع دهیم.

در فصل دوم که همراه با دو تعریف اساسی γ- سه تائی و W - (سه تائی ویلانت) می‌باشند ، با استفاده ازگروههای G , M , H آغازکرده و لم‌های مورد نیاز فصل سوم را اثبات خواهیم کرد ، البته لازم به ذکر است که تعاریف فوق به ما کمک می‌کنند تا بدون اعمال شرائط خاص ذکر شده در مورد G , M و H لم‌ها و قضایا را ثابت کنیم .

در فصل سوم با استفاده از مطالب عنوان شده . در دو فصل قبلی و قضایای لازم ،سه

قضیه اساسی A , B و C را ثابت نموده و در آخر نتیجه‌ای که از قضیه سوم خواهیم داشت (نتیجه D) به سوال مطرح شده جواب خواهیم داد و می‌بینیم که اگر G , M و H دارای شرائط ذکر شده باشند عضوی از G مانند g چنان وجود دارد که $G = < H , g >$ باشد.

در طی این پایان نامه قرار داد می‌کنیم منظور از یک گروه همان گروه متناهی است و $G \leq H$ به معنی زیرگروه بودن H در G. $G \trianglelefteq H$ به مفهوم H در G نرمال است ، می‌باشد . اگر $G \leq H$ باشد تعریف می‌کنیم :

$$H_G = \mathrm{core}G (H) = \cap \{ H^g | \ g \in G \}$$

همچنین $[x , H] = < [x , h] : h \in H >$ و

$$[x , h] = x^{-1} h^{-1} x h$$

که در همان جابجاگر دو عضو x , h می‌باشد.

در اثبات مراحل مختلف لم‌ها و قضایا ، از مطالب مربوط به سیلو گروهها ، قضایای مربوط به ویلانت ، قضایای فربنیوس و مکمل آن ، قضیه شور - زاسن هوس و مطالبی که در مورد عمل گروهها بر یکدیگر می‌باشد استفاده خواهیم نمود که سعی خواهیم کرد گزاره‌های مربوط به آنها را همراه با اثبات بیاوریم و در برخی موارد بعلت حجم زیاد اثبات و قضایای مقدماتی فراوان از نوشتن اثبات خودداری کرده و جهت مطالعه بیشتر خواننده به منابع لازم ارجاع داده خواهند شد.

برای اثبات قضیه ویلانت که نتیجه‌ای از قضیه فربنیوس است احتیاج به مقدماتی دارد

که به اختصار به آن می‌پردازیم .

فصـــــل اول

فصل اول

(۱-۱) مقدمه‌ای بر تئوری مشخصه و قضیه فربنیوس

تعریف [۲۱۵ . P ، ۱۵ ، ۴]: گروه خطی عمومی را با $Gl(n, \mathbb{C})$ نمایش می‌دهیم که گروه ماتریسهای $n \times n$ می‌باشد. اگر G یک گروه متناهی دلخواهی باشد، آنگاه یک همومورفیسم گروهی به شکل: $A : G \to GL(n, \mathbb{C})$

یک نمایش (Representation) از G نامیده می‌شود که n نیز درجه A می‌باشد.

اگر A یک نمایش دلخواه از G باشد تابع:

$$\chi : G \to \mathbb{C}$$

$$\chi(g) = tr(A(g))$$

را یک مشخصه (Character) نمایش A می‌نامیم.

از نماد $Char(G)$ برای نمایش همه مشخصه‌های گروه متناهی G استفاده خواهیم کرد.

تعریف [۲۱۶ . P ، ۱۵ ، ۴]: فرض کنید $\chi \in Char(G)$ باشد، آنگاه مشخصه χ را تحویل ناپذیر (Irreducible) گوئیم اگر نتوان آنرا با استفاده از مجموع دو مشخصه دیگر از $Char(G)$ نوشت.

از نماد $Irr(G)$ برای بیان مجموعه همه مشخصه‌هائی از G استفاده خواهیم کرد که تحویل ناپذیر هستند.

اگر $\chi \in Char(G)$ و $H \leq G$ می‌باشد تابع $\chi_H : H \to \mathbb{C}$ که تحدید تابع $\chi : G \to \mathbb{C}$ می‌باشد را در نظر می‌گیریم. واضح است چنانکه تحدید هر نمایش از G روی H یک نمایش از H می‌باشد، بنابراین می‌توان گفت که $\chi_H \in Char(H)$ است.

تعریف [۲۱۷ .P، ۱۵، ۴]: تابع $\alpha : G \to \mathbb{C}$ را یک تابع رده‌ای (class function) روی G گوئیم هرگاه α رده‌های تزویج G را ثابت نگه دارد. مجموعه چنین توابع روی G را با $cf(G)$ نمایش می‌دهیم.

اکنون می‌خواهیم چگونگی بدست آوردن مشخصه‌های G از مشخصه‌های زیرگروهی چون H از G را بررسی کنیم. اگر $\phi \in cf(H)$ تعریف می‌کنیم:

$$\phi^0 = G \to \mathbb{C}$$

به ازای هر $g \in G$:

$$\phi^0(g) = \begin{cases} \phi(g) & g \in H \\ 0 & g \notin H \end{cases}$$

در کل ϕ^0 روی رده‌های G ثابت نیست. ، بنابراین تابعی جدید تعریف می‌کنیم که این شرط را برقرار کند:

$$\phi^G : G \to \mathbb{C}$$

$$\phi^G(g) = \frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\phi^0(xgx^{-1}) \qquad (1-1)$$

با توجه به تعریف ، روشن است که $\phi^G(g)$ روی رده تزویج g تعریف می‌شود ، بنابراین $\phi^G \in cf(G)$، توجه شود که اگر $G = H$ باشد آنگاه $\phi^0 = \phi$ و $\phi(xgx^{-1}) = \phi(g)$ به ازای هر $x \in G$ و در این حالت $\phi^G = \phi$ و در حالت کلی خواهیم داشت.

$$\phi^G(1) = |G:H|\,\phi(1) \qquad (1-2)$$

اثبات کامل گزاره‌های زیر در [15 . 4] موجود می‌باشد و از نوشتن آنها خودداری می‌کنیم.

گزاره ۱ [P . ۲۲۶ ، ۱۵ ، ۴]: اگر $H \le G$ باشد و فرض کنیم $\phi \in cf(H)$ و $\theta \in cf(G)$ آنگاه:

$$[\phi^G, \theta] = [\phi, \theta_H].$$

گزاره ۲ [P . ۲۲۶ ، ۱۵ ، ۴]: فرض کنید $H \le G$، اگر $\phi \in Char(H)$، آنگاه:

$$\phi^G \in Char(G).$$

گزاره 2 نتیجه‌ای است از گزاره قبلی که اثبات آن در [15 . 4] کامل می‌باشد.

تعریف [P . ۲۲۷ ، ۱۵ ، ۴]: اگر $H \le G$ یک زیرگروه از G باشد که به قسمی

که به ازای هر $g \in G$: $H^g \cap H = 1$

آنگاه H را مکمل فربنیوس G می‌نامیم.