بسم الله الرحمن الرحیم

آ

دانشگاه شیخ بهایی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی

عنوان:

برخی روش‌های تفاضلات متناهی تقلیل یافته بر پایه تکنیک افراز متعامد سره برای حل معادلات سهموی

تدوین:

محمدرضا عندلیب

استاد راهنما:

دکتر مهدی تاتاری

استاد مشاور:

دکتر رضا مختاری

خرداد ۱۳۹۰

باسمه تعالی

دانشگـــــــاه شیـــــــخ بهائی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی آقای محمدرضا عندلیب

تحت عنوان

برخی روش های تفاضلات متناهی تقلیل یافته بر پایه تکنیک افراز متعامد سره برای حل معادلات سهموی

در تاریخ ۹۰/۰۴/۰۱ توسط هیأت داوران زیر بررسي و با درجه .... به تصویب نهائي رسید.

۱– استاد راهنمای پایان‌نامه	**دکتر مهدی تاتاری**	با مرتبه علمی **استادیار**	امضاء
۲– استاد مشـــاور پایان‌نامه	**دکتر رضا مختاری**	با مرتبه علمی **استادیار**	امضاء
۳– استاد داور داخل گروه	**دکتر علی دانایی**	با مرتبه علمی **استادیار**	امضاء
٤– استاد داور خارج گروه	**دکتر علی داوری**	با مرتبه علمی **استادیار**	امضاء

دکتر سید محمدحسن فیض

مدیر تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالي

اقرارنامه

اينجانب **محمدرضا عندليب** به شماره دانشجويي **۸۷۱۴۱۰۷**

دانشجوي رشته **رياضي كاربردي** كه

پايان نامه خود تحت عنوان:

برخي روش‌هاي تفاضلات متناهي تقليل يافته بر پايه تكنيك افراز متعامد سره براي حل معادلات سهموي

را نوشته و براي دفاع آماده كرده‌ام اعلام مي نمايم كه محتوا و نوشته‌هاي اين پايان نامه متعلق به خودم بوده و هيچ قسمت از آن به طور مستقيم يا غيرمستقيم كپي و يا برگرفته از كار ديگران خارج از ضوابط متعارف نگارش پايان نامه نمي‌باشد. اينجانب نيز آگاهم كه در صورتي كه خلاف موضوع فوق الذكر در هر زمان و به هر طريق اثبات گردد از كليه امتيازات مكتسبه از اين پايان نامه محروم و ملزم به پذيرش عواقب و مجازات حقوقي ناشي از آن مي‌باشم.

نام و نام خانوادگي امضاء

تقدیم به

پدر زحمتکش، مادر دلسوز

برادر عزیز و خواهر مهربان

به نام آنکه جان را فکرت آموخت

پس از حمد و سپاس خداوند متعال، وظیفه خود می دانم از زحمات دلسوزانه و برادرانه استاد راهنمای خودم جناب آقای دکتر مهدی تاتاری که نقش بسزایی در به ثمر رسیدن این پایان نامه داشته اند تشکر و قدردانی نمایم و از خداوند متعال، آرزوی توفیق روز افزون برای ایشان و خانواده محترم را خواستارم. همچنین از زحمات استاد مشاور خودم جناب آقای دکتر رضا مختاری که در این مدت با بنده همکاری داشته اند نیز تشکر و قدردانی می نمایم.

از زحمات اساتید محترم آقایان دکتر جعفر زعفرانی ریاست محترم دانشگاه، دکتر علی دانایی ریاست محترم دانشکده، دکتر نظام الدین مهدوی امیری و دکتر مجید فخار که افتخار شاگردی ایشان را دارم نیز سپاسگزاری می نمایم.

در پایان از خانواده خود نیز که در این مدت با بنده همکاری داشته اند و بنده را تحمل نموده اند سپاسگزاری و قدردانی نموده و امید است با بر جای گذاشتن این اثر ناچیز، قطره ای از اقیانوس بی کران زحمات این عزیزان را جبران کرده باشم.

محمدرضا عندلیب

خرداد ۱۳۹۰

چکیده:

در این پایان نامه، روشی برای حل معادله گرما که نمونه‌ای از معادلات سهموی است ارایه می‌شود. در حالت یک‌بعدی، ابتدا با استفاده از روش تفاضلات متناهی کرانک − نیکلسون، معادله حل می‌شود و با استفاده از این جواب تقریبی، ماتریس اطلاعات فوری به‌دست می‌آید. با تجزیه مقدار تکین ماتریس اطلاعات فوری، پایه بهینه و جواب‌های بهینه− که تقریبی از جواب‌های روش کرانک − نیکلسون هستند− به‌دست می‌آیند. در حالت دو بعدی، به کمک حالتی از روش تفاضلات متناهی ضمنی جهت‌های متناوب (ADI) که به $DADI$ معروف است معادله حل می‌شود. به طریق مشابه، پایه‌های بهینه و جواب‌های بهینه به‌دست می‌آیند. روش تفاضلات متناهی تقلیل‌یافته ارایه شده به تکنیک افراز متعامد سره معروف است. سپس نتایج عددی به‌دست‌آمده از روش‌های تفاضلات متناهی معمول با نتایج عددی به‌دست آمده از روش‌های تفاضلات متناهی تقلیل‌یافته مقایسه می‌شوند. در پایان، خطای روش‌های تفاضلات متناهی تقلیل‌یافته برآورد می‌شود.
کلید واژه‌ها: افراز متعامد سره، معادله سهموی، روش تفاضلات متناهی،ماتریس اطلاعات فوری، تجزیه مقدار تکین، تخمین خطا، پایه بهینه، جواب بهینه.

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه و تاریخچه

بسیاری از مسایل در طبیعت، زیست شناسی و مهندسی مانند گسترش گازها، جریان گرما و گسترش ناخالصی ها در مواد نیمه رسانا با معادلات سهموی توصیف می‌شوند. چون محاسبه جواب‌های دقیق برای مسایل عملی مهندسی مشکل و زمان‌بر است، به حل عددی آنها اقدام می‌کنیم. در حال حاضر، روش‌های عددی زیادی مانند روش‌های تفاضلات متناهی (FD)، روش‌های عناصر متناهی، روش‌های حجم‌های متناهی و روش‌های طیفی برای مسایل انتقال گرما موجود است [۲۹، ۷].
در بین روش‌های موجود، روش‌های FD به دلیل سادگی، فهم آسان و قابلیت آنها در پیاده‌سازی آسان به‌صورت برنامه‌های کامپیوتری به عنوان یکی از مؤثرترین روش‌ها در نظر گرفته می‌شوند اما این‌گونه روش‌ها برای مسایل سهموی به ویژه در ابعاد بالا درجه‌های آزادی زیادی را دربر می‌گیرند. بنابراین مسأله مهم این است که چگونه بار محاسباتی را ساده کرده و هزینه محاسباتی را پایین آورد، به طوری که جواب‌های عددی به اندازه کافی دقیق به دست آیند.
افراز متعامد سره (POD) تکنیکی است که تقریب مناسب برای جریان سیال با کاهش تعداد درجه‌های آزادی ارایه می‌دهد به عبارت ساده‌تر یک مدل با هزینه محاسباتی پایین به‌دست می آید و در نتیجه با کاهش بار محاسباتی، نیاز به حافظه مصرفی کاهش می‌یابد [۱۲].
افراز متعامد سره به عنوان بسط‌های $Karhunen - Loeve$ در تحلیل سیگنال و تشخیص الگو [۱۰] یا تحلیل اجزای اصلی در آمار [۱۳] یا روش توابع متعامد تجربی در دینامیک سیال ژئوفیزیکی [۵] و هواشناسی [۲۷] شناخته می‌شود.

بنابراین روش POD کاربردهای گسترده‌ای در محاسبات آماری و دینامیک سیالات دارد [۲۸، ۲۴، ۲۲، ۱۳، ۱۲، ۱۰]. این روش عموماً در اجرای تحلیل قسمت اصلی و جستجوی رفتار اصلی یک دستگاه دینامیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

به‌تازگی برخی مدل‌های تفاضلات متناهی تقلیل یافته با مرتبه بهینه و فرمول‌های عناصر متناهی ترکیبی و تخمین‌های خطا برای مدل اقیانوس آرام استوایی بالایی بر پایه POD گسترش یافته اند [۱، ۲، ۱۹، ۲۰، ۳۱].

همچنین یک روش تفاضلات متناهی بر پایه POD برای معادلات غیر ایستای نویر-استاکز [۱] ارایه شده اما تحلیل خطای آن به دست نیامده است [۲۱].

تا کنون نتایج منتشرشده مبنی بر به‌کارگیری POD به منظور تقلیل یک روش تفاضلات متناهی معمولی برای حل معادلات سهموی وجود ندارد. با به کارگیری تکنیک POD روی روش‌های تفاضلات متناهی معمول حل معادلات سهموی تعداد درجه‌های آزادی و هزینه محاسباتی روش را کاهش داده و جواب‌های مناسب را به دست می‌آوریم. خطای حاصل از جواب‌های روش‌های تفاضلات متناهی تقلیل‌یافته بر پایه POD و جواب‌های دقیق را بررسی کرده سپس با استفاده از نرم افزارها درستی نتایج حاصله را در مورد مثال‌های عددی بررسی می‌کنیم [۳۰].

فصل‌های بعدی به صورت زیر مرتب شده اند:

فصل دوم به حل معادله گرما در حالت یک بعدی اختصاص می‌یابد. برای این منظور، ابتدا به معرفی روش تفاضلات متناهی کرانک — نیکلسون [۲] (CN) پرداخته‌می‌شود. سپس اطلاعات فوری را از جواب‌های گذرای محاسبه شده توسط دستگاه معادلات حاصل از روش تفاضلات متناهی کرانک— نیکلسون به دست می‌آوریم. پس از بیان قضیه تجزیه مقدار تکین (SVD) با تجزیه SVD ماتریس اطلاعات فوری، یک پایه متعامد بهینه به دست آورده، با استفاده از این پایه متعامد بهینه، یک روش تفاضلات متناهی با هزینه محاسباتی پایین برای معادله گرما در حالت یک بعدی به دست می‌آید. روش حاصل را روش تفاضلات متناهی کرانک — نیکلسون تقلیل‌یافته (RCN) می‌نامیم. با استفاده از نرم‌افزار $MATLAB$ جواب‌های حاصل از روش تفاضلات متناهی کرانک — نیکلسون و روش کرانک — نیکلسون تقلیل‌یافته را برای یک مثال عددی در حالت یک‌بعدی بررسی می‌کنیم. همچنین نمودارهای مرتبه همگرایی روش تفاضلات متناهی کرانک — نیکلسون و روش کرانک — نیکلسون تقلیل‌یافته با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

فصل سوم به حل معادله گرما در حالت دو بعدی اختصاص می‌یابد. برای این منظور، ابتدا به معرفی

[۱] $Navier - Stokes$

[۲] $Crank - Nicolson$

حالتی از روش تفاضلات متناهی ضمنی جهت‌های متناوب (ADI) که به $DADI$ معروف است پرداخته‌می‌شود. پس از آن اطلاعات فوری را از جواب‌های گذرای محاسبه شده توسط دستگاه معادلات حاصل از روش تفاضلات متناهی $DADI$ به دست آورده و با تجزیه SVD ماتریس‌های اطلاعات فوری، پایه‌های متعامد بهینه را پیدا می‌کنیم. با استفاده از پایه‌های متعامد بهینه، یک روش تفاضلات متناهی با هزینه محاسباتی پایین برای معادله گرما در حالت دو بعدی به دست می‌آید که روش حاصل را روش $DADI$ تقلیل‌یافته $(RDADI)$ می‌نامیم. با استفاده از نرم‌افزار $MATLAB$ جواب‌های حاصل از روش تفاضلات متناهی $DADI$ و روش تفاضلات متناهی $DADI$ تقلیل‌یافته را برای یک مثال عددی در حالت دو بعدی بررسی می‌کنیم. همچنین نمودارهای مرتبه همگرایی روش تفاضلات متناهی $DADI$ و روش تفاضلات متناهی $DADI$ تقلیل‌یافته با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

در فصل چهارم، پس از بیان و اثبات لم گسسته گرونوال، خطای حاصل از جواب‌های دقیق و جواب‌های روش تفاضلات متناهی کرانک − نیکلسون تقلیل‌یافته در حالت یک بعدی و همچنین خطای حاصل از جواب‌های دقیق و جواب‌های روش تفاضلات متناهی $DADI$ تقلیل‌یافته در حالت دو بعدی برآورد می‌شوند.

فصل ۲

روش های تفاضلات متناهی تقلیل یافته برای حل معادله گرما در حالت یک بعدی

۲ــ۱ مقدمه

این فصل به حل معادله گرما در حالت یک بعدی اختصاص می‌یابد. برای این منظور ابتدا به معرفی روش تفاضلات متناهی کرانک ــ نیکلسون (CN) می‌پردازیم، پس از آن با استفاده از این روش، معادله گرما را حل می‌کنیم سپس به‌طور یکنواخت تعدادی از گره‌های حاصل از روش کرانک ــ نیکلسون را در بعضی گام‌های زمانی انتخاب می‌کنیم و گره‌های منتخب را در یک ماتریس که ماتریس اطلاعات فوری نامیده می‌شود، قرار می‌دهیم.

پس از بیان قضیه تجزیه مقدار تکین (SVD) به تجزیه ماتریس اطلاعات فوری می‌پردازیم و پایه بهینه را به‌دست می‌آوریم. سپس با استفاده از این پایه بهینه و روش کرانک ــ نیکلسون (CN)، یک روش تفاضلات متناهی با مرتبه محاسبات پایین‌تر نسبت به روش کرانک ــ نیکلسون به‌دست می‌آید که روش مذکور به روش تفاضلات متناهی کرانک ــ نیکلسون تقلیل‌یافته (RCN) معروف است.

سپس به کمک برنامه‌ای که با استفاده از نرم‌افزار $MATLAB$ نوشته شده است به حل یک مثال عددی می‌پردازیم. این مثال درمورد معادله گرما در حالت یک‌بعدی است که جواب‌ها و نمودارهای CN و RCN آن را با استفاده از برنامه نوشته شده به دست می‌آوریم. با مقایسه جواب‌ها نمودارها، به مقایسه نتایج

حاصل در مورد روش تفاضلات متناهی کرانک — نیکلسون و روش تفاضلات متناهی کرانک — نیکلسون تقلیل‌یافته می‌پردازیم. همچنین زمان مورد نیاز برای حل معادله گرما با استفاده از روش تفاضلات متناهی کرانک — نیکلسون و زمان مورد نیاز برای حل معادله گرما با استفاده از روش تفاضلات متناهی کرانک — نیکلسون تقلیل‌یافته را گزارش می‌دهیم. در پایان با رسم نمودارهای مرتبه همگرایی درمی‌یابیم که مرتبه همگرایی روش تفاضلات متناهی کرانک — نیکلسون تقلیل‌یافته تقریباً ۲ است لذا مرتبه همگرایی روش تفاضلات متناهی کرانک — نیکلسون تقلیل‌یافته مشابه مرتبه همگرایی روش تفاضلات متناهی کرانک — نیکلسون است.

۲—۲ روش تفاضلات متناهی کرانک — نیکلسون

مسأله مقدار مرزی — آغازی یک بعدی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$u_t - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),\ 0 < t < T,\ 0 < x < l, \qquad (1)$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le l, \qquad (3)$$

که a یک ثابت بسیار کوچک است و $f(x,t)$ و $\varphi(x)$ توابع به اندازه کافی هموار فرض می‌شوند.
با فرض اینکه h، گام فضایی روی مسیر x و k، گام زمانی باشد داریم

$$x_j = jh \quad (j = 0, 1, \cdots, J),$$
$$t_n = nk \quad (n = 0, 1, \cdots, N).$$

حال u_j^n را به عنوان تقریبی از $u(x_j,t_n)$ در نظر می‌گیریم و f_j^n را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f_j^n = \frac{1}{2}[f(x_j,t_n) + f(x_j,t_{n+1})].$$

روش تفاضلات متناهی کرانک — نیکلسون برای مسأله (۱)—(۳) به صورت زیر است

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} = \frac{1}{2}a^2\left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2}\right) + f_j^n.$$

با ضرب دو طرف رابطه بالا در k، رابطه روش تفاضلات متناهی کرانک — نیکلسون مطابق

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \frac{a^2k}{2h^2}[(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)] + kf_j^n, \qquad (4)$$

$$u_0^n = 0, \quad u_J^n = 0, \quad n = 1, 2, \cdots, N, \tag{5}$$

$$u_j^0 = \varphi(x_j), \quad j = 0, 1, \cdots, J \tag{6}$$

به دست می‌آید.

این طرح تفاضلی پایدار نامشروط است و دارای خطای برشی $O(k^2 + h^2)$ است [۳۰].

با نوشتن رابطه (۴) به صورت برداری داریم

$$\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{J-3}^{n+1} \\ u_{J-2}^{n+1} \\ u_{J-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^{n} \\ u_2^{n} \\ u_3^{n} \\ \vdots \\ u_{J-3}^{n} \\ u_{J-2}^{n} \\ u_{J-1}^{n} \end{bmatrix} + \frac{a^2 k}{2h^2}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{J-3}^{n+1} \\ u_{J-2}^{n+1} \\ u_{J-1}^{n+1} \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n} \\ u_2^{n} \\ u_3^{n} \\ \vdots \\ u_{J-3}^{n} \\ u_{J-2}^{n} \\ u_{J-1}^{n} \end{bmatrix} \right) + k \begin{bmatrix} f_1^{n} \\ f_2^{n} \\ f_3^{n} \\ \vdots \\ f_{J-3}^{n} \\ f_{J-2}^{n} \\ f_{J-1}^{n} \end{bmatrix}.$$

برای سهولت $J - 1 = m$ در نتیجه $J - 2 = m - 1$.

بردارها و ماتریس ضرایب را به صورت

$$\mathbf{u}^{n+1} = (u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \cdots, u_{m-1}^{n+1}, u_m^{n+1})^t,$$

$$\mathbf{u}^{n} = (u_1^{n}, u_2^{n}, \cdots, u_{m-1}^{n}, u_m^{n})^t,$$

$$\mathbf{F}^{n} = (f_1^{n}, f_2^{n}, \cdots, f_{m-1}^{n}, f_m^{n})^t,$$

$$K=\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{m\times m}$$

نامگذاری می‌کنیم.

با نمادگذاری بردارها و ماتریس ضرایب به صورت بالا، رابطه برداری کرانک – نیکلسون به صورت خلاصه شده به شکل زیر است

$$\mathbf{u}^{n+1}=\mathbf{u}^{n}+\frac{a^2k}{2h^2}K\mathbf{u}^{n+1}+\frac{a^2k}{2h^2}K\mathbf{u}^{n}+k\mathbf{F}^{n},\quad n=0,1,\cdots,N-1. \qquad (7)$$

با توجه به سه‌قطری بودن ماتریس K می‌توان $\mathbf{u}^{n+1}$ را با استفاده از الگوریتم توماس[1] با هزینه محاسباتی $O(m)$ به‌دست آورد.

تعریف ۱.۲ با انتخاب تعدادی نقاط مشخص از $\{u_j^n\}_{n=1}^{N}$ – که از روش تفاضلات متناهی کرانک – نیکلسون به دست آمده‌اند– نقاط $\{u_j^{n_i}\}_{i=1}^{d}$، $(j=1,2,\cdots,J-1\ ,\ 1\le n_1\le n_2\le\cdots\le n_d\le N)$ به دست می آید که این نقاط را اطلاعات فوری می‌نامیم.

طبق این تعریف، اجزای اطلاعات فوری از جواب‌های تقریبی روش‌های تفاضلات متناهی گرفته می‌شوند اما در مسایل عملی با رسم نمونه‌هایی از تجربیات و درونیابی (یا ادغام داده‌ها) می‌توان اجزای اطلاعات فوری را از روندهای فیزیکی دستگاه به دست آورد.

به دلیل اینکه تغییرات و گسترش تعداد زیادی از حوادث طبیعی آینده مثلا تغییرات آب و هوا به شدت وابسته به نتایج گذشته است، اگر دستگاه فیزیکی حوادث طبیعی خوش رفتار باشد یعنی رفتار گذشته نشان دهنده و دربرگیرنده رفتار آینده باشد می توان نتایج حاضر یا گذشته را برای ساختن اطلاعات فوری به کار برد.

بنابراین تغییرات و گسترش تعدادی از حوادث طبیعی آینده می‌تواند به طور موثر، مصنوعی و قابل پیش بینی باشد.

[1] *Thomas*

۲–۳ تولید پایه بهینه با استفاده از اطلاعات فوری

در این بخش با استفاده از اجزای اطلاعات فوری، یک مجموعه پایه بهینه تولید می‌کنیم. اگر جواب‌های تقریبی حاصل از روش کرانک – نیلکسون، $\{u_j^n\}_{n=1}^{N}$، $(j = 1, 2, \cdots, J-1)$ باشد می‌توان اطلاعات فوری را به صورت $\{u_j^{n_i}\}_{i=1}^{d}$، $(j = 1, 2, \cdots, J-1 \ , \ 1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_d \leq N)$ نمایش داد.
با قرار دادن $m = J-1$، مجموعه اطلاعات فوری را می‌توان به صورت یک ماتریس $m \times d$ به‌صورت زیر در نظر گرفت

$$A_{m\times d} = \begin{pmatrix} u_1^{n_1} & u_1^{n_2} & \cdots & u_1^{n_d} \\ u_2^{n_1} & u_2^{n_2} & \cdots & u_2^{n_d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_m^{n_1} & u_m^{n_2} & \cdots & u_m^{n_d} \end{pmatrix}_{m\times d} .$$

اکنون به بیان این قضیه که معروف به تجزیه مقدار تکین $(Singular \quad Value \quad Decomposition)$ یا به اختصار (SVD) است می‌پردازیم:

قضیه ۲.۲ فرض کنید A یک ماتریس حقیقی $m \times n$ باشد، آنگاه ماتریس‌های متعامد U و V وجود دارند به قسمی که

$$U^t A V = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \Sigma$$

که در آن Σ_1 یک ماتریس قطری نامنفرد است. عناصر قطری Σ همگی نامنفی هستند و می‌توانند به ترتیب ناصعودی مرتب شوند. تعداد عناصر قطری مخالف صفر Σ برابر رتبه ماتریس A است.تجزیه $A = U\Sigma V^t$ به تجزیه مقدار تکین (SVD) ماتریس A معروف است. عناصر قطری ماتریس Σ مقادیر تکین ماتریس A نامیده می‌شوند. اعداد σ_1،σ_2،$\cdots$،σ_r (عناصر قطری Σ_1) مقادیر تکین غیرصفر A هستند.ستون‌های U بردارهای تکین چپ و ستون‌های V بردارهای تکین راست نامیده می‌شوند.

متداول‌ترین راه برای محاسبه SVD ماتریس A، الگوریتم گولوب – کاهان – رینسک[۲] است [۶]. تغییری از این روش توسط دمل و کاهان در ۱۹۹۰ پیشنهاد شده است [۸]. روش دمل[۳] و کاهان[۴] همه مقادیر تکین یک ماتریس دو قطری را با دقت نسبتاً بالا محاسبه می‌کند. روش دیگری توسط فرناندو[۵] و پارلت[۶] در ۱۹۹۴ پیشنهاد شده است [۹].

---
۲ $Golub - Kahan - Reinsch$
۳ $Demmel$
۴ $Kahan$
۵ $Fernando$
۶ $Parlett$

اکنون با به کار بردن تجزیه مقدار تکین (SVD) روی ماتریس اطلاعات فوری $A_{m\times d}$ داریم

$$A_{m\times d} = U \begin{pmatrix} D_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V^t,$$

که $U = U_{m\times m}$ و $V = V_{d\times d}$ ماتریس‌های متعامد هستند.

ستون‌های ماتریس $U = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m)$ دربرگیرنده بردارهای ویژه متعامد AA^t و ستون‌های ماتریس $V = (\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_d)$ دربرگیرنده بردارهای ویژه متعامد A^tA هستند.

همان‌گونه که در تعریف نقاط اطلاعات فوری بیان شد برای تشکیل اجزای اطلاعات فوری، به‌طور یکنواخت تعدادی از گره‌های حاصل از روش کرانک — نیکلسون در برخی گام‌های زمانی را حذف می‌کنیم و تنها به انتخاب گره‌های حاصل از روش کرانک — نیکلسون در بعضی گام‌های زمانی می‌پردازیم در حالیکه گره‌های مربوط به تمام گام‌های فضایی انتخاب می‌شوند لذا بدیهی است که در ماتریس اطلاعات فوری $(A_{m\times d})$ تعداد سطرها بسیار بیشتر از تعداد ستون‌هااست و داریم

$$m \gg d.$$

بنابراین اگرچه مقادیر ویژه صفر ماتریس‌های AA^t و A^tA یکسان هستند اما مرتبه m ماتریس AA^t بسیار بزرگتر از مرتبه d ماتریس A^tA است.

در تجزیه SVD ماتریس اطلاعات فوری $A_{m\times d}$، D_r یک ماتریس قطری به صورت

$$D_r = diag(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r),$$

است، که σ_1، σ_2، $\cdots$، σ_r مقادیر تکین غیرصفر A^tA هستند و برای به دست آوردن آنها ابتدا مقادیر ویژه مثبت A^tA را به دست آورده، سپس از این مقادیر ویژه مثبت جذر می‌گیریم.

با توجه به اینکه ماتریس A^tA، $d \times d$ است دارای d مقدار ویژه است که اگر رتبه A برابر r، باشد دارای r، $(r \leq d)$ مقدار تکین غیر صفر است.

چون A^tA ماتریس مربعی متقارن و نیمه معین مثبت است مقادیر ویژه آن همگی نامنفی هستند پس می‌توان نتیجه گرفت مقادیر ویژه غیر صفر آن همگی مثبت هستند. حال اگر مقادیر ویژه مثبت ماتریس A^tA را با λ_1، λ_2، $\cdots$، λ_r نشان دهیم، خواهیم‌داشت

$$\lambda_i = \sigma_i^2, \quad i = 1, 2, \cdots, r,$$

یا

$$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}.$$

طبق قضیه تجزیه مقدار تکین (۲.۲) می‌توان مقادیر تکین غیرصفر، یعنی σ_iها، $(i = ۱, ۲, \cdots, r)$ را به ترتیب ناصعودی مرتب کرد بنابراین رابطه زیر در مورد مقادیر تکین غیرصفر برقرار است

$$\sigma_۱ \geq \sigma_۲ \geq \cdots \geq \sigma_r > ۰, \quad \sigma_{r+۱} = \sigma_{r+۲} = \cdots = \sigma_d = ۰, \quad rank(A) = r, \quad r \leq d.$$

اگر d ستون ماتریس $A_{m\times d}$ را با $\mathbf{a}^l = (u_۱^{n_l}, u_۲^{n_l}, \cdots, u_m^{n_l})^t$، $(l = ۱, ۲, \cdots, d)$ نشان دهیم آنگاه تصویر ستون l ام ماتریس $A_{m\times d}$ در فضای تولید شده توسط ϕ_j ها،$(j = ۱, ۲, \cdots, M)$ از رابطه زیر به دست می آید

$$P_M(\mathbf{a}^l) = \sum_{j=۱}^{M} (\phi_j, \mathbf{a}^l)\phi_j, \tag{۸}$$

که $۰ < M \leq d$ است و $(.,.)$ بیانگر ضرب داخلی بردارها است.

ثابت می شود که می‌توان تصویر ستون l ام ماتریس $A_{m\times d}$ در فضای تولید شده توسط ϕ_j ها، $(j = ۱, ۲, \cdots, M)$ را به عنوان تقریبی از ستون l ام ماتریس $A_{m\times d}$ در نظر گرفت و خطای آن کوچکتر یامساوی $\sigma_{M+۱}$ است که

$$M < r = rank(A).$$

یعنی ثابت می‌کنیم

$$\|\mathbf{a}^l - P_M(\mathbf{a}^l)\|_۲ \leq \sigma_{M+۱}. \tag{۹}$$

قبل از اینکه به اثبات رابطه(۹) بپردازیم به بیان مفاهیم و قضایای زیر می‌پردازیم.

تعریف ۳.۲ نرم ماتریسی $\|.\|_{\alpha,\beta}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|A\|_{\alpha,\beta} = \sup_{X\neq ۰} \frac{\|AX\|_\alpha}{\|X\|_\beta},$$

که $\|.\|_\alpha, \|.\|_\beta$ نرم‌های برداری هستند.

قضیه زیر معمولاً معروف به قضیه اکارت – یانگ [۷] (۱۹۳۹) است [٦].

قضیه ۴.۲ فرض کنید $A = U\Sigma V^t$، SVD ماتریس A باشد، و فرض کنید $rank(A)$ برابر $r > ۰$ باشد. فرض کنید $M \leq r$. ماتریس

$$A_M = U\Sigma_M V^t$$

[۷] $Eckart - Young$