دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض- هندسه و توپولوژی

اوربیفلد ها و گروه کوهمولوژی

استاد راهنما:

دکتر اکبر دهقان نژاد

استاد مشاور:

دکتر حسین خورشیدی

پژوهش و نگارش:

مریم السادات طباطبایی

۱۳۹۲

چکیده

مقدمه

اوربیفلدها در زمینه های مختلف ریاضیات نظیر هندسه دیفرانسیل، جبر و توپولوژی بسیار مورد توجه هستند. اوربیفلدها تاریخچه‌ی طولانی دارند، مثلا در هندسه جبری مطالعه‌ی آنها به مدرسه‌ی ایتالیایی تحت نام" مشخصات با تکینگی خارج قسمتی"[۱] برمی گردد. خارج از هندسه جبری، اوربیفلدها اولین بار در توپولوژی و هندسه دیفرانسیل توسط ساتاکه[۲] در سال ۱۹۵۰ [۳] به نام منیفلدهایی با فضای زمینه مدولی V(V−منیفلد) بیان شد. ایشان اوربیفلدها را به عنوان فضاهای توپولوژیکی که تعمیم منیفلدها هستند مطرح کرد و بسیاری از قضیه ها نظیر گاوس بونه، کوهمولوژی درام و مشخصه های رده را به $V-$ منیفلد ها تعمیم داد. در سال ۱۹۷۰ ویلیام ترستن[۳]، از $V-$ منیفلد ها برای کار روی هندسه‌ی منیفلدهای ۳ بعدی استفاده کرد. ترستن بحث" گروه بنیادی اوربیفلدها" را اختراع کرد که اولین حقیقت پایدار یک ساختار اوربیفلد در مباحث توپولوژیکی بود. در همین دوره بود که نام های متفاوتی برای اوربیفلدها مطرح گردید.

---

[۱] Varieties with quotient singularities

[۲] Satake

[۳] William Thurston

ریشه کلمه‌ی اوربیفلدها

در سال ۱۹۷۶، بیل ترستن تصمیم داشت که کلمه جدیدی جایگزین V−منیفلدهای ساتاکه کند. اولین انتخاب وی $manifolded$ و انتخاب بعدی کلمه‌ی $foldimani$ بود که خیلی مورد پسند عام نبود سپس او تصمیم گرفت که برای انتخاب این نام از پیشنهادهای مردم استفاده کند که چک گیفن[۴] کلمه‌ی $origam$، دنیس سولیوان [۵] نام $spatialdollop$ و بیل برودر [۶] نام $orbifold$ را پیشنهاد کردند. البته به غیر از این اسم ها پیشنهادهای زیادی شد ولی در نهایت تنها ۴ نام $origam, orbifold, foldimani$ و $V - manifold$ باقی ماند. اکنون $V - manifold$ را با نام **اوربیفلد** می شناسند. مفهوم اوربیفلدها تعمیم مفهوم منیفلد است. می دانیم یک منیفلد به صورت موضعی با بازهایی از فضای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ هومئومورف است در این صورت یک اوربیفلد، فضای خارج قسمت ایجاد شده از عمل موثر یک گروه متناهی از دیفئومورفیسم ها روی زیر مجموعه های باز فضای اقلیدسی n بعدی می باشد.

با وسعت مطالعه این نظریه، کاربردهای مختلف آن در حوزه هایی از علوم مختلف مانند ریاضیات(هندسه جبری، هندسه دیفرانسیل، توپولوژی و جبر)، فیزیک(نظریه ریسمان) و حتی نظریه موسیقی ظاهر می شود.

به جهت بهره مندی خوانندگان این پژوهش، مفاهیم مورد نیاز برای آشنایی با نظریه اوربیفلدها به مانند(گروهواره ها، عمل یک گروه روی یک منیفلد، کاتگوری و شبه گروه) در فصل اول بیان می گردد.

در فصل دوم مشابه بحث منیفلدها به معرفی کارت، اطلس، ساختار اوربیفلدها و در نهایت

[۴] Chuch Giffen

[۵] Dennis Sillivan

[۶] Bill Browder

اوربیفلد ها می پردازیم و با بیان دو تعریف متفاوت از آن، معادل بودن آنها را می آوریم.
در فصل سوم کاتگوری اوربیفلدها بیان و آنها را به عنوان یک منیفلدهایی با ساختار g، ($g-$منیفلد) معرفی می کنیم.
در فصل چهارم که هدف انجام این پایان نامه است به گروه کوهمولوژی اوربیفلدها و مقایسه این مبحث با منیفلدها می پردازیم.

واژه‌های کلیدی: کارت، اطلس و ساختار اوربیفلد، گروهواره ها، کاتگوری اوربیفلدها

فهرست مطالب

فصل ۱

تعریف ها و پیش نیازها

۱.۱ حاصل ضرب نیم مستقیم

گروه G را ضرب نیم مستقیم گوئیم اگر و تنها اگر آن دارای دو زیر گروه نرمال N_1 و N_2 باشد به طوری که:

$$G = N_1 N_2, \qquad N_1 \cap N_2 = \{e\}.$$

فرض کنیم دو گروه H و N (زیر گروه نرمال در G) باشند که :

$$N \cap H = \{e\}, \qquad G = NH$$

هر عنصر گروه G به طور یکتا به صورت حاصل ضربی از دو عضو N و H نوشته می شود. نگاشت $H \longrightarrow Aut(N)$ با ضابطه $n \mapsto hnh^{-1}$ یک خودریختی گروهی است؛ در حقیقت با انتخاب دو عضو دلخواه $g, h \in H$ و $n \in N$ داریم :

$$\varphi_{gh}(n) = ghn(gh)^{-1} = ghnh^{-1}g^{-1}$$

$$= g(hnh^{-1})g^{-1} = \varphi_g(hnh^{-1}) = \varphi_g(\varphi_h(n)) = (\varphi_g o \varphi_h)(n).$$

که در نتیجه $\varphi_{gh} = \varphi_g o \varphi_h$ و لذا همریختی است. همچنین نگاشت $\varphi : H \longrightarrow Aut(N)$ با ضابطه‌ی $\varphi(h) = \varphi_h$ یک همریختی گروهی است. به ازای دو زیر گروه N و H از G می‌-توان یک ضرب روی G تعریف کرد به این صورت که به ازای هر دو عنصر nh و $n'h'$ از G داریم:

$$(nh)(n'h') = (nhn'h^{-1})(hh') = (n\varphi_h(n'))(hh').$$

حال نشان می دهیم که عمل فوق برگشت پذیر است.

فرض کنیم N و H دو گروه و $\varphi : H \longrightarrow Aut(N)$ یک همریختی گروهی باشد. قرار می-

دهیم $G = N \times H$، یک مجموعه باشد و ضرب روی آن را به این صورت تعریف می کنیم:

$$(n,h)(n^{'}h^{'}) = (n\varphi_h n^{'}, hh^{'})$$

به وضوح G با عمل فوق یک گروه است. عضو همانی G، (e_N, e_H) است و معکوس (n,h)، $(n\varphi_{h^{-1}}(n^{-1}), h^{-1})$.

بنابراین با تعریف دو زیر گروه:

$$N^{'} := N \times \{e_H\} \trianglelefteq G \cong N$$

$$H^{'} := \{e_H\} \times H \leq G \cong H$$

$$N^{'} \cap H^{'} = \{e_G\}$$

G را به صورت ضرب نیم مستقیم داخلی دو زیر گروه $N^{'}$ و $H^{'}$ نوشتیم. این **ضرب نیم مستقیم خارجی** را با $N \times_\varphi H$ و یا $N \rtimes H$، نمایش می دهیم.

مثال ۱.۱.۱. فرض می کنیم $N = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ و $H = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ باشد.

همچنین نگاشت $\varphi : H \longrightarrow Aut(N)$ یک خود ریختی گروهی باشد که e را به e ببرد و عنصر غیر بدیهی H را به نگاشت معکوس N(یعنی $\forall x \in N,\ \ x \longrightarrow x^{-1}$)

از اینکه N گروه آبلی است و این خود ریختی از مرتبه ۲، لذا یک زیر گروه از $Aut(N)$ وجود دارد که با H یکریخت است.

نگاشت φ را به این صورت در نظر می گیریم که ایزومورفیسم از H به خودش باشد، قرار می‌دهیم: $G = N \times_\varphi H$. ادعا داریم $G \cong D_n$ (گروه دو وجهی از مرتبه $2n$).

یاد آوری می کنیم $D_n =< a, b \mid a^n = b^2 = 1, bab = a^{-1} >$ قرار می‌دهیم: $N =< x >$ و $H =< y >$، آنگاه $(x,1)$ از مرتبه n و $(1,y)$ از مرتبه ۲ است و لذا φ_y نگاشت

معکوس روی N است پس:

$$(۱, y)(x, ۱)(۱, y) = (\varphi_y(x), y)(۱, y) = (\varphi_y(x), y^۲)$$
$$= (\varphi_y(x), ۱) = (x^{-۱}, ۱) = (x, ۱)^{-۱}$$

در نتیجه در G دو عنصر $u = (x, ۱)$ و $v = (۱, y)$ وجود دارند که $u^n = v^۲ = ۱$ و $vuv = u^{-۱}$.

پس یک همریختی گروهی پوشا مانند $D_n \longrightarrow G$ وجود دارد و:

$$| G |=| N || H |= ۲n \longrightarrow \ | G |=| D_n | \ \longrightarrow D_n \approx G.$$

۲.۱ کاتگوری و فانکتورها

یک **کاتگوری**، به وسیله‌ی حدود(اصطلاحات) و شرایط ذیل مشخص می شود:

- حدود:

۱) یک کلاس $\mathcal{C}$ از اشیاء.

۲) به ازای هر دو شی A و B از $\mathcal{C}$، یک مجموعه $mon(A, B)$ (که هر عنصر آن مانند $f \in mon(A, B)$، یک مورفیسم بر A به توی B است و به صورت $f : A \longrightarrow B$ نمایش داده می شود.)

۳) یک عمل $\circ$ (برای ترکیب بعضی مورفیسم ها).

- شرایط:

۱) به ازای هر دو مورفیسم $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$ ترکیب g و f که با $g \circ f$ که به اختصار با gf نمایش می دهیم، تعریف شده باشد و به $mon(A, C)$ متعلق باشد. یعنی gf یک مورفیسم بر A به توی C باشد. (بسته بودن، البته در صورت ترکیب،چون دلیل ندارد هر دو مورفیسم را بتوان با هم ترکیب کرد).

۲) به ازای هر سه مورفیسم $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$ و $h : C \longrightarrow D$

$$(hg)f = h(gf),$$ (شرکت پذیری)

۳) به ازای هر شی A یک مورفیسم $i_A : A \longrightarrow A$ موسوم به مورفیسم همانی وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر دو مورفیسم $f : A \longrightarrow B$ و $g : C \longrightarrow A$ داشته باشیم:

$$i_A g = g, \qquad f i_A = f$$ (وجود مورفسیم های همانی)

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو کاتگوری باشند. یک تابع $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ را یک **فانکتور هموردا** بر $\mathcal{C}$ به توی $\mathcal{D}$ نامیم هرگاه هر شی A از $\mathcal{C}$ را به یک شی $F(A)$ از $\mathcal{D}$ و هر مورفیسم $f : A \longrightarrow B$ را به یک مورفیسم $F(f) : F(A) \longrightarrow F(B)$ در $\mathcal{D}$ ببرد، به طوری که در شرایط ذیل صدق کنند:

i) به ازای هر شی دلخواه از $\mathcal{C}$ مثل A، داشته باشیم $F(i_A) = i_{F(A)}$.

ii) به ازای هر سه شی دلخواه A، B، C و هر دو مورفیسم $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$ از کاتگوری $\mathcal{C}$ داشته باشیم:

$$F(gf) = F(g)F(f),$$ (معنی دیگر، F ترکیب را به ترکیب ببرد)

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{C}$ و $\mathcal{D}$ دو کاتگوری باشند. یک تابع $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ را یک **فانکتور پادورد** از $\mathcal{C}$ به $\mathcal{D}$ نامیم هرگاه هر شی A از $\mathcal{C}$ را به یک شی $F(A)$ از $\mathcal{D}$ و هر مورفیسم $f : A \longrightarrow B$ را به یک مورفیسم $F(f) : F(B) \longrightarrow F(A)$ در $\mathcal{D}$ ببرد به طوری که در شرایط ذیل صدق کنند:

i) به ازای هر شی دلخواه از $\mathcal{C}$ مثل A، داشته باشیم $F(i_A) = i_{F(A)}$.

ii) به ازای هر سه شی دلخواه A، B، C و هر دو مورفیسم $f : A \longrightarrow B$ و $g : B \longrightarrow C$ از کاتگوری $\mathcal{C}$ داشته باشیم:

$$F(gf) = F(f)F(g),$$ (معنی دیگر، F ترکیب را به ترکیب ببرد)

۳.۱ گروهواره ها

به بیان کلی، گروهواره[۱] یک کاتگوری کوچکی[۲] است که هر مورفیسم آن یک ایزومورفیسم می باشد که البته در ادامه، یک بیان دقیق تر از این مفهوم را ارایه می دهیم.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم G_o مجموعه اشیاء و G_1، مجموعه مورفیسم ها (پیکان) باشند و نگاشت های i, u, m, t, s در شرایط زیر صدق کنند:

۱) نگاشت $s : G_1 \longrightarrow G_o$ که $s(g)$، سرچشمه g است .

۲) نگاشت $t : G_1 \longrightarrow G_o$ که $t(g)$، هدف g است .

[۱] Groupoid

[۲] Small Category

۳) با تعریف مجموعه $G_1 \times G_1 = \{(h,g) \in G_1 \times G_1 \mid s(h) = t(g)\}$، نگاشت $m : G_1 \times G_1 \longrightarrow G_1$ نگاشت ضرب یا ترکیب، ضرب تاری s و t باشد.

۴) یک نگاشت $u : G_o \longrightarrow G_1$ نگاشت همانی است.

۵) یک نگاشت $i : G_1 \longrightarrow G_1$ نگاشت معکوس باشد به گونه ای که:

الف) به ازای هر $(g,f) \in G_1 \times G_1$ داشته باشیم:

$$s(m(g,f)) = s(f), \qquad t(m(g,f)) = t(g)$$

ب) برای تمام $(h,g),(g,f) \in G_1 \times G_1$ داشته باشیم:

$$m(h,m(g,f)) = m(m(h,g),f)$$

دقت کنیم که دو عضو $(m(h,g),f)$ و $(h,m(g,f))$ عضو $G_1 \times G_1$ باید در شرط (الف) صدق کند.

پ) برای هر $x \in G_o$ داشته باشیم:

$$s(u(x)) \;=\; x \;=\; t(u(x))$$

ت) برای هر $x \in G_o$ و هر $(u(x),f)$ و $(g,u(x))$ عضو $G_1 \times G_1$ داشته باشیم:

$$m(u(x),f) = f, \qquad m(g,u(x)) = g$$

ث) برای هر $g \in G_1$ داریم:

$$s(i(g)) = t(g), \qquad t(i(g)) = s(g)$$

همچنین:

$$m(g, i(g)) = u(t(g)), \qquad m(i(g), g) = u(s(g))$$

به چندتایی $\mathcal{G} = (G_o, G_1, s, t, m, u, i)$ یک **گروهواره** گوئیم که در آن نگاشت‌های s, t, m, u, i نگاشت های ساختار گروهواره G هستند و معمولا از نمادهای $m(g, f) = gf$، $u(x) = 1_x$ و $i(g) = g^{-1}$ در تعریف بالا استفاده می کنیم و برای پیکان $g : x \longrightarrow y$ هایی که $s(g) = t(g)$ است، نماد $x \underset{\rightarrow}{g} y$ را به کار می بریم و مجموعه $G(x, y)$ را به عنوان تمام پیکان هایی با این شرط تعریف می کنیم.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنیم $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ دو گروهواره باشند. یک **هomomorphism** از $\mathcal{G}$ به $\mathcal{H}$، یک فانکتور بین دو کاتگوری، مانند $\phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ است. به این معنی که ϕ تشکیل شده است از یک دو تایی $\phi = (\phi_o, \phi_1)$، که در آن نگاشت های ϕ_o و ϕ_1 به گونه ای باشند که نمودار زیر جابجایی باشد:

$$\begin{tikzcd} G_o \arrow[r, "\phi_o"] & H_o \\ G_1 \arrow[u, "s,t"] \arrow[r, "\phi_1"] & H_1 \arrow[u, "s',t'"'] \end{tikzcd}$$

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنیم $\mathcal{G}$ یک گروهواره باشد:

الف) **مدار** نقطه $x \in G_o$ به این صورت تعریف می شود:

$$\mathcal{G}_x := t(s^{-1}(x)) = \{y \in G_o \mid \exists g \in G_1 : x \underset{\rightarrow}{g} y\}$$

ب) دو عنصر $x, y \in G_o$ **راهم ارز** گوئیم و با نماد $x \sim y$ نشان می دهیم اگر در یک مدار قرار داشته باشند. فضای خارج قسمت $G_o / \sim$ را **فضای مدار** $\mathcal{G}$ نامیم و با نماد $\mid \mathcal{G} \mid$

نشان می دهیم. بعلاوه نگاشت خارج قسمتی کانونی به این صورت تعریف می شود:

$$\begin{cases} Pr_{\mathcal{G}} : G_o \longrightarrow \ \mid \mathcal{G} \mid \\ x \mapsto [x] \end{cases}$$

تعریف ۴.۳.۱. به گروهواره $\mathcal{G} = (G_o, G_1, s, t, m, u, i)$ که در آن G_o و G_1 منیفلدهای هموار هاوسدورف هستند و نگاشت های ساختاری t و s سوبمرسیون های هموار و نگاشت‌های ساختاری i, u, m هموار می باشند، یک **گروهواره لی** $\mathcal{G}$ می نامیم.

مثال ۵.۳.۱. فرض کنید G یک گروه لی باشد که به طور هموار روی منیفلد هموار M عمل می کند. گروه واره لی $G \ltimes M$ را به این صورت می سازیم که $(G \ltimes M)_o = M$ و $(G \ltimes M)_1 = G \times M$ به ترتیب مجموعه اشیاء و مجموعه پیکان ها باشند و نگاشت سرچشمه و نگاشت هدف $s, t : G \times M \longrightarrow M$ را به ترتیب نگاشت تصویر و نگاشتی که از عمل القا می شود در نظر می گیریم. در این صورت اگر:

$$(g', x') \in G \times M, \qquad (g, x) \in G \times M$$

دو عضو دلخواه باشند برای معرفی نگاشت m، دامنه این نگاشت به صورت مجموعه $G_1 \times G_1 = \{((g, x), (g', x')) \mid g'x' = x\}$ خواهد بود. زیرا:

$$s(g, x) = x = g'x' = t(g', x').$$

در این صورت ضابطه m را به این صورت در نظر می گیریم:

$$(g, x) \circ (g', x') = (gg', x')$$

نکته ۶.۳.۱. با توجه به اینکه $G_x = s^{-1}(x) \cap t^{-1}(x)$ است و همچنین نگاشت های s و t سوبمرسیون می باشند می توان نتیجه گرفت G_x یک زیر گروه لی است .

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنید G یک گروهواره لی باشد .

۱) گروهواره $\mathcal{G}$ **سره** است هرگاه نگاشت $(s,t) : G_1 \longrightarrow G_o \times G_o$ سره باشد (می‌دانیم که یک نگاشت هنگامی سره است که تصویر معکوس هر زیر مجموعه فشرده ای، یک مجموعه فشرده باشد).

۲) $\mathcal{G}$ یک گروهواره، **برگ بندی** است هرگاه هر گروه ایزوتروپی متناهی باشد .

۳) گروهواره $\mathcal{G}$ را **اتال** گوئیم هرگاه نگاشت های s و t در آن دیفئومورفیسم های موضعی باشند . برای یک گروهواره اتال بعد قابل تعریف است :

$$dim(\mathcal{G}) = dim(G_o) = dim(G_1)$$

با توجه به تعریف های بالا نتیجه می شود هر گروهواره اتال یک گروهواره برگ بندی است، بعلاوه اگر $\mathcal{G}$ یک گروهواره برگ بندی سره باشد آنگاه تمام گروه های ایزوتروپی، متناهی هستند.

این نتیجه می دهد که اگر یک گروهواره اتال سره داشته باشیم. برای هر نقطه $x \in G_o$ یک همسایگی U_x از x با شرایط زیر وجود دارد :

برای هر $g \in G_x$ نگاشت $\sigma : U_x \longrightarrow W_g$ معکوس موضعی s است که در نتیجه نگاشت $t : W_g \longrightarrow U_x$ یک دیفئومورفیسم می باشد و لذا $t \circ \sigma : U_x \longrightarrow U_x$ دیفئومورفیسم خوش تعریف ار U_x است و این منجر به خوش تعریف بودن نگاشت $G_x \longrightarrow Diff(U_x)$ می شود.

تعریف ۸.۳.۱. یک گروهواره سره و اتال $\mathcal{G}$، **موثر** نامیده می شود هرگاه همومورفیسم گروهی توصیف شده در بالا $G_x \longrightarrow Diff(U_x)$، یک نگاشت یک به یک باشد .

اکنون بحث مربوط همومورفیسم های بین گروهواره های لی و فانکتورهای آنها را آغاز می کنیم .

تعریف ۹.۳.۱. به فانکتور $\phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ بین دو گروهواره لی $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ که در آن دو نگاشت $\phi_o : G_o \longrightarrow H_o$ و $\phi_1 : G_1 \longrightarrow H_1$ نگاشت های هموار باشند، یک **همومورفیسم** گوئیم.

تعریف ۱۰.۳.۱. یک همومورفیسم $\phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ بین گروهواره های لی را یک **هم ارزی** گوئیم اگر:

۱) نگاشت $t \circ \pi_1 : G_1 \times H_o \longrightarrow G_o$ تعریف شده روی ضرب تاری منیفلد ها، $\{(g, y) \in G_1 \times H_o \mid s(g) = \phi(y)\}$ یک سوبمرسیون پوشا باشد .

۲) مربع :

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{\phi} & G_1 \\ {\scriptstyle (s,t)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (s,t)} \\ H_o \times H_o & \xrightarrow[\phi\times\phi]{} & G_o \times G_o \end{array}$$

یک ضرب تاری از منیفلدها باشد.

تعریف ۱۱.۳.۱. دو گروهواره لی $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ در **تعادل موریتا**[3] هستند هرگاه یک گروهواره سومی مانند $\mathcal{G}'$ همراه با دو تعادل های زیر وجود داشته باشند:

$$\mathcal{G} \longleftarrow \mathcal{G}' \longrightarrow \mathcal{H}$$

[3]Morita equivalent

توضیح آنکه اگر دو گروه‌واره لی $\mathcal{G}$ و $\mathcal{H}$ در تعادل موریتا باشند، آنگاه $\mathcal{G}$ سره است (برگ بندی) اگر و تنها اگر $\mathcal{H}$ سره (برگ بندی) باشد. هر چند اتال بودن تحت تعادل موریتا پایدار نیست.

قضیه ۱.۳.۱۲. یک گروهواره لی، یک گروهواره برگ بندی است اگر و تنها اگر در تعادل موریتا با یک گروهواره‌ی اتال باشد و یک گروهواره لی، برگ بندی و سره است اگر وتنها اگر در تعادل موریتا با یک گروهواره اتال و سره باشد[۱۵].

۴.۱ بافه‌ها و پیش بافه‌ها

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک باشند. یک **پیش بافه(از گروه های آبلی)** A روی X تابعی است که به ازای هر مجموعه باز $U \subset X$ یک گروه آبلی $A(U)$ را نسبت می دهد و برای دو زیر مجموعه باز از فضای X مانند، $U \subset V$ یک هومئومورفیسم $\tau_{U,V} : A(V) \longrightarrow A(U)$ (که نگاشت های تحدید نامیده می شوند.) موجود باشند به طوری که

$$\tau_{U,U} = i$$

$$\tau_{U,V}\tau_{V,W} = \tau_{U,W} \ , \qquad U \subset V \subset W$$

به عبارت دیگر نمودار زیر بسته باشد:

$$\begin{tikzcd} A(V) \arrow[r, "\tau_{U,V}"] \arrow[dr, "\tau_{W,V}"'] & A(U) \arrow[d, "\tau_{W,U}"] \\ & A(W) \end{tikzcd}$$