بسم الله الرحمن الرحيم

٣٧٢١٣

مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران

دانشگاه تربیت معلم تهران

۱۳۸۰ /۸/ ۱۰

دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

درخت‌های تصادفی و فرآیندهای مسیری آنها

استاد راهنما:

دکتر علی اکبر رحیم زاده ثانی

تدوین:

مژگان مشایخ

011327

تابستان ۸۰

۳۷۲۱۳

بسمه تعالی

آگهی دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار

عنوان:

درخت‌های تصادفی و فرآیند کنتوری آنها

استاد راهنما : آقای دکتر علی‌اکبر رحیم‌زاده

داور خارجی : آقای دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل

داور داخلی : آقای دکترعین‌اله پاشا

دانشجو : خانم مژگان مشایخ

زمان : ساعت ۵ بعدازظهر روز شنبه مورخ ۸۰/۴/۲

مکان : دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر دانشگاه تربیت معلم

خلاصه:

فرآیند کنتور درخت تصادفی، فرآیند فاصله از ریشه یک درخت تصادفی در جستجوی عمق اولیه می‌باشد که شاخه‌های درخت را با یک روش خطی منظم پیمایش می‌کند. با استفاده از تناظر بین درخت‌های تصادفی خاص و فرآیندهای نقطه‌ای، مارکف بودن فرآیند کنتور این درخت‌ها نتیجه می‌شود. همچنین ارتباط درخت‌های تصادفی و فرآیندهای پواسون بررسی شده و احتمالات مربوط به این درخت‌های تصادفی محاسبه می‌شود.

۳۷۲۱۳

تاریخ .....
شماره .....
پیوست .....
واحد .....

بسمه تعالی

دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

صورتجلسهٔ دفاع از پایان نامهٔ کارشناسی ارشد

جلسهٔ دفاع از پایان نامه خانم مژگان مشایخ دانشجوی دورهٔ کارشناسی ارشد رشتهٔ ریاضی شاخهٔ آمار تحت عنوان:

درختهای تصادفی و فرآیند کنتوری آنها

در روز شنبه مورخه ۸۰/۴/۲۳ در دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرهٔ این آزمون ۱۷/۱ (هفده و یک) می‌باشد.

۱- عالی ☐
۲- بسیار خوب ☑
۳- خوب ☐
۴- قابل قبول ☐
۵- غیر قابل قبول ☐

استاد راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر علی‌اکبر رحیم‌زاده	دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل	دکتر عین‌الله پاشا

اسماعیل بابلیان
رئیس دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

تهران، خیابان طالقانی بین بهار وشریعتی، پلاک ۵۹۹ کدپستی ۱۵۶۱۸ تلفن ۷۵۰۷۷۷۲ فاکس ۷۶۲۹۸۸

تقدیم به مادر خوبم

و با سپاس از تمام کسانی که دوستشان دارم

سپاسگزاری:

از استاد عالیقدر، جناب آقای دکتر رحیم زاده ثانی که راهنمایی این رساله را عهده دار شدند و در تمام مراحل تکوین آن مرا راهنمایی کردند و به خاطر زحمات دوران تحصیل تشکر می‌نمایم. همچنین از جناب آقای دکتر پاشا به خاطر زحمات دوران تحصیل و داوری این رساله قدردانی می‌کنم.شایسته است از جناب آقای دکتر محمد قاسم وحیدی اصل که قبول زحمت نموده و داوری این رساله را به عهده گرفته‌اند نیز قدر دانی نمایم.

چکیده

فرآیند مسیری درخت تصادفی، فرآیند فاصله از ریشه یک درخت تصادفی در جستجوی عمق اولیه می‌باشد که شاخه‌های درخت را با یک روش خطی منظم پیمایش می‌کند. با استفاده از تناظر بین درخت‌های دودویی تصادفی خاص و فرآیندهای نقطه‌ای می‌توان مارکفی بودن فرآیند کنتور این درخت‌ها و درنتیجه خود آنها را نتیجه گرفت و به محاسبه احتمالهای جهش‌های آن پرداخت.

کلید واژه

درخت تصادفی دودویی *(Random binary tree)*، درخت گالتون ـ واتسون *(Galton - watson)*، درخت شکافته شده *(Splitting tree)*، درخت شاخه‌ای *(Branching tree)*، فرآیند مسیری *(Contour process)*، فرآیند نقطه‌ای پواسون *(Poission point process)*.

پیشگفتار

درخت‌های تصادفی در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه قرار گرفته‌اند. آلدوش[۱] و لیونز[۲] از جمله افرادی هستند که در این زمینه مطالعات بسیاری داشته‌اند. در حقیقت درخت‌های تصادفی شاخه‌ای ما را قادر می‌سازند تا توزیع طول عمر افراد جمعیت و به تبع آن مسائل مربوط به آن را مورد بررسی قرار دهیم. درخت‌های تصادفی خانوادگی مربوط به فرآیندهای گالتون - واتسون چند نوعی توسط اورت [۳] و اولام[۴] *(1948)* و به طور مستقل توسط اوتر[۵]، معرفی گردیده‌اند *[19]*.

ما در این ساله، درخت‌های تصادفی را در یک جامعه متناهی؛ با یک جد اولیه در نظر گرفته، قصد داریم تا روابط گوناگون بین درخت‌های تصادفی و فرایند نقطه‌ای پواسون را مشخص نمائیم. همچنین می‌خواهیم کاربرد مفید فرایند نقطه‌ای پواسون را در بررسی درخت‌های تصادفی و فرایند مسیری آنها نشان دهیم.

1- Aldous

2- Lyons

3- Everett

4- Olam

5- Otter

رسالهٔ حاضر مقاله گایگر[1] و کرستینگ[2] *(1997) [9]* را مورد بررسی قرار می‌دهد و در همین راستا از مقاله گیگر *(1991)[7]* نیز بهره می‌گیرد. در فصل اول این رساله، مقدماتی از فرایندهای تصادفی ارائه نموده و قضایایی را که در فصل بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌آوریم. فصلی را نیز به معرفی درخت‌های تصادفی و انواع آن اختصاص داده‌ایم و فرایندهای مسیری آنها را نیز تعریف می‌کنیم. در فصل سوم درخت‌های تصادفی با فرایندی مسیری مارکف، با استفاده از فرایندهای نقطه‌ای پواسون مورد بررسی قرار می‌گیرند. در فصل چهارم نیز احتمالهای جهش در فرایند مسیری درخت‌های تصادفی شاخه‌ای را به دست می‌آوریم.

1- Geiger *2- Kersting*

فهرست مطالب

عنوان | صفحه

فصل اول: مقدماتی از فرآید تصادفی

۱.۱ فرآیند تصادفی ۲

۲.۱ فرآیند پواسون ۳

۳.۱ اصول موضوع برای فرآیند پواسون ۴

۴.۱ توزیع‌های زمان بین ورود و زمان انتظار ۶

۵.۱ تظریف فرآیند پواسون ۸

۶.۱ فرآیند پواسون ناهمگن ۹

۷.۱ فرآیند نقطه‌ای ۱۰

۸.۱ فرآیند مارکف ۱۲

۹.۱ فرآیند گالتون - واتسون ۱۳

فصل دوم: درخت‌های تصادفی

۱.۲ مقدمه ۱۸

۲.۲ تعاریف و اصطلاحات ۱۹

۳.۲ درخت‌های تصادفی ۲۲

۴.۲ درخت‌های خانوادگی ۲۴

۵.۲ فرایند مسیری ۲۷

۶.۲ بازیابی درخت شاخه‌ای از فرآیند کنتور ۳۱

فهرست مطالب

عنوان — صفحه

فصل سوم: درخت‌های دودویی و فرآیند مارکف

۱.۳ مقدمه ۳۵

۲.۳ درخت‌های خود مشابه ۳۶

۳.۳ درخت تصادفی در یک فرآیند نقطه‌ای ۴۰

۴.۳ تحدید فرآیند نقطه‌ای ۵۱

۵.۳ فرآیند حذف و انتقال ۵۳

۶.۳ درخت‌های شاخه‌ای مارکف ۶۳

۷.۳ درخت‌های شکافته شده مارکف ۶۹

فصل چهارم: احتمالات جهش در فرایند مسیری و ایجاد درخت‌های شاخه‌ای

۱.۴ مقدمه ۷۹

۲.۴ مشخصه‌های بی نهایت کوچک ۷۹

۳.۴ تولید درخت‌های شاخه‌ای از فرآیند نقطه‌ای پواسون ۸۹

فصل اول:

مقدماتی

از فرآیند پواسون تصادفی

۱.۱ فرآیند تصادفی

فرآیندهای نقطه‌ای پواسون نقش مهمی در بررسی پدیده‌های گوناگون دارند. در این فصل به بررسی این فرآیندها و خواص آنها پرداخته و در فصول دیگر از آنها بهره خواهیم برد. جهت درک مطلب لازم دیدیم ابتدا فرآیندهای تصادفی را تعریف کرده و انواع آن را معرفی کنیم.

لازم به تذکر است که عمدهٔ مطالب این فصل از کارلین [۳] و راس [۱] می‌باشد.

۱.۱.۱ تعریف: یک فرآیند تصادفی $X = \{X(t), t \in T\}$، گردایه‌ای از متغیرهای تصادفی روی یک فضای مشترک S است. یعنی به ازای هر t در مجموعه اندیس گذار T، $X(t)$ یک متغیر تصادفی روی فضای S است. اغلب t را به زمان تعبیر می‌کنیم و $X(t)$ را حالت فرآیند در زمان t می‌گوئیم. اگر مجموعه اندیس گذار T شما را باشد، X را فرآیندی زمان - گسسته می‌گوئیم و اگر T پیوسته باشد، آن را فرآیند پیوسته ـ زمان می‌گوئیم. فرآیند تصادفی زمان - پیوسته $\{X(t),\ t \in T\}$ نموهای مستقل دارد اگر به ازای هر T دلخواه، $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ متغیرهای تصادفی $X(t_0), X(t_1)-X(t_0), X(t_2)-X(t_1), \ldots, X(t_n)-X(t_{n-1})$ مستقل باشند و گوئیم دارای نموهای مانا است، اگر $X(t+s)-X(t)$ برای تمام tها و تمام sها دارای یک توزیع باشند.

به عبارت دیگر، فرآیند دارای نموهای مستقل است اگر تغییرات مقادیر آن روی فاصله‌های

زمانی ناهمپوش، مستقل باشند و دارای نموهای مانا است اگر، توزیع تغییرات مقادیر در بین هر دو نقطه فقط به فاصله آن دو نقطه بستگی داشته باشد.

۲.۱.۱ تعریف: فرآیند تصادفی $\{N(t),\ t \geq 0\}$ را فرآیند شمارشی گوئیم هر گاه، $N(t)$ تعداد کل پیشامدهایی باشد که تا زمان t رخ داده‌اند. از این رو، فرآیند شمارشی $N(t)$ باید در شرایط زیر صدق کند:

الف: $N(t) \geq 0$،

ب: $N(t)$ صحیح مقدار باشد،

ج: اگر $s < t$، آنگاه $N(s) \leq N(t)$،

د: اگر $s < t$ ، $N(t) - N(s)$ برابر پیشامدهایی باشد که در بازهٔ $(s,t]$ رخ داده‌اند.

یکی از مهمترین انواع فرآیند شمارشی، فرآیند پواسون می‌باشد که به عنوان مدلی ریاضی برای خیلی از پدیده‌های تجربی به کار می‌رود.

۲.۱ فرآیند پواسون

۱.۲.۱ تعریف: فرآیند شمارشی $\{N(t), t \geq 0\}$ با فضای وضعیت $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ را فرآیند پواسون با نرخ λ , $\lambda > 0$ گوئیم هرگاه:

الف) $N(0) = 0$